



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2021. Т. 29, № 4
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2021;29(4)

Обзорная статья


УДК 621.373.1

DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-4-635-675

Нелинейные явления в осцилляторных сетях Курамото с динамическими связями

Д. В. Касаткин , А. А. Емельянова, В. И. Некоркин

Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики
Российской академии наук, Нижний Новгород, Россия

E-mail:  kasatkin@appl.sci-nnov.ru, emelianova@ipfran.ru, vnekorkin@appl.sci-nnov.ru

Поступила в редакцию 7.04.2021, принята к публикации 15.04.2021,

опубликована 30.07.2021

Аннотация. Цель настоящего исследования – познакомить читателя с одним из эффективных подходов к описанию процессов в адаптивных сетях, построенных в рамках широко известной модели Курамото. **Методы.** Решение поставленной задачи основано на анализе результатов работ, посвящённых изучению динамики осцилляторных сетей с адаптивными связями. Рассмотрены основные классы моделей динамических связей, используемых при описании адаптивных сетей, проанализированы динамические и структурные эффекты, вызванные наличием соответствующего закона адаптации связей. **Результаты.** Изложены принципы построения моделей адаптивных сетей, основанных на фазовом описании, развитии Курамото. Представленные в обзоре материалы показывают, что система Курамото с динамическими связями демонстрирует широкий набор принципиально новых явлений и режимов. Рассмотренные сети включают известные модели динамических связей, реализующих различные законы адаптации межэлементных взаимодействий в зависимости от состояний элементов, в частности, от их относительной разности фаз. Для каждой модели сети установлен класс возможных решений, а также выявлены общие свойства коллективной динамики, обусловленные наличием адаптивности соединений. Одной из особенностей таких сетей является мультистабильность поведения, определяемая возможностью формирования в сети множества различных кластерных состояний, включая химерные состояния. Установлено, что реализуемый механизм адаптации связей влияет не только на конфигурацию формируемых в сети кластеров, но также на характер фазовых распределений внутри них. Процессы формирования кластеров сопровождаются перестроением топологии взаимодействий, приводящим к образованию иерархических и модульных структур. **Заключение.** В Заключение кратко резюмируются результаты, приведённые в рамках обзора.

Ключевые слова: модель Курамото, фазовые осцилляторы, адаптивные связи, кластерные состояния, динамические сети.

Благодарности. Работа выполнена в рамках государственного задания ИПФ РАН, проект № 0030-2021-0011, при финансовой поддержке РФФИ (грант № 20-52-12021).

Для цитирования: Касаткин Д. В., Емельянова А. А., Некоркин В. И. Нелинейные явления в осцилляторных сетях Курамото с динамическими связями // Известия вузов. ПНД. 2021. Т. 29, № 4. С. 635–675.

DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-4-635-675

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Nonlinear phenomena in Kuramoto networks with dynamical couplings

D. V. Kasatkin✉, A. A. Emelianova, V. I. Nekorkin

Federal Research Center Institute of Applied Physics
of the Russian Academy of Sciences (IAP RAS), Nizhny Novgorod, Russia
E-mail: ✉kasatkin@appl.sci-nnov.ru, emelianova@ipfran.com, vnekorkin@appl.sci-nnov.ru
Received 7.04.2021, accepted 15.04.2021, published 30.07.2021

Abstract. The purpose of this study is to acquaint the reader with one of the effective approaches to describing processes in adaptive networks, built in the framework of the well-known Kuramoto model. **Methods.** The solution to this problem is based on the analysis of the results of works devoted to the study of the dynamics of oscillatory networks with adaptive couplings. Main classes of models of dynamical couplings used in the description of adaptive networks are considered, and the dynamical and structural effects caused by the presence of the corresponding law of coupling adaptation are analyzed. **Results.** Principles of constructing models of adaptive networks based on the phase description developed by Kuramoto are presented. Materials presented in the review show that the Kuramoto system with dynamic couplings demonstrates a wide range of fundamentally new phenomena and modes. Considered networks include well-known models of dynamical couplings that implement various laws of adaptation of inter-element interactions depending on the states of the elements, in particular, on their relative phase difference. For each network model, a class of possible solutions is established, and general properties of collective dynamics are identified, due to the presence of adaptability of couplings. One of the features of such networks is the multistability of behavior, determined by the possibility of the formation in the network of many different cluster states, including chimera ones. It was found that the implemented coupling adaptation mechanism affects not only the configuration of clusters formed in the network, but also the nature of phase distributions within them. The processes of cluster formation are accompanied by a restructuring of the interaction topology, leading to the formation of hierarchical and modular structures. **Conclusion.** In conclusion, we briefly summarize the results presented in the review.

Keywords: Kuramoto model, phase oscillators, adaptive couplings, cluster states, dynamical networks.

Acknowledgements. The work was performed as a part of the State Assignment of the Institute of Applied Physics RAS, project No. 0030-2021-0011, and was supported by the Russian Foundation for Basic Research (grant No. 20-52-12021).

For citation: Kasatkin DV, Emelianova AA, Nekorkin VI. Nonlinear phenomena in Kuramoto networks with dynamical couplings. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2021;29(4):635–675. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-4-635-675

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

На наш взгляд, в широкой области интересов Дмитрия Ивановича Трубецкого особое место занимали явления и процессы в автоколебательных распределённых системах. В этом направлении Дмитрием Ивановичем и его учениками получен ряд важных фундаментальных результатов. Здесь можно отметить экспериментальное наблюдение явления обобщённой синхронизации в кольцевом генераторе с запаздывающей обратной связью и обнаружение переходного хаоса в системе «электронный пучок – обратная электромагнитная волна». В нашем обзоре, который мы посвящаем светлой памяти Дмитрия Ивановича Трубецкого, также затрагиваются проблемы синхронизации и хаотизации. Мы представляем результаты исследования сетевых систем Курамото, которые, как известно, возникают при изучении процессов в многоэлементных автоколебательных системах.

К настоящему времени достигнут значительный прогресс в понимании коллективного поведения связанных колебательных динамических систем. Прежде всего это относится к развитию представлений о синхронизации – одном из фундаментальных и наиболее широко изучаемых феноменов, характерных для осцилляторных сетей. Успех в этом направлении связан с возникновением универсальных способов описания таких систем и развитием методов их анализа, посредством которых удалось выявить базовые принципы, лежащие в основе поведения сетевых

систем различной природы. Одной из основополагающих в данном направлении стала работа А. Уинфри [1], который в 1967 году предложил подход для описания процессов взаимной синхронизации в больших сетях (популяциях) осцилляторов. В рамках представленного подхода динамика каждого осциллятора, взаимодействующего с остальными осцилляторами через среднее поле, сводилась к описанию с помощью только одной фазовой переменной. Такое описание имеет место в случае, когда связь между осцилляторами является слабой и можно пренебречь изменениями амплитуды колебаний, рассматривая лишь динамику их фаз. Впоследствии данная концепция фазового описания была развита в работах Курамото [2,3], в которых была предложена более удобная с точки зрения математического анализа модель, ставшая парадигматической для изучения процессов синхронизации в больших популяциях взаимосвязанных осцилляторов. В наиболее известной версии модель Курамото представляется уравнением вида:

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i + \frac{\kappa}{N} \sum_{j=1}^N \Gamma(\phi_i - \phi_j), \quad i = 1, \dots, N. \quad (1)$$

Здесь ϕ_i и ω_i характеризуют, соответственно, фазу и индивидуальную частоту i -го осциллятора сети, κ описывает силу связи. Функция связи $\Gamma(\phi)$ зависит от разности фаз взаимодействующих осцилляторов и в оригинальной модели имеет следующий вид $\Gamma(\phi) = -\sin \phi$. Заметим, что модель (1) в более общем случае, когда функция связи $\Gamma(\phi) = -\sin(\phi + \alpha)$ содержит дополнительный фазовый сдвиг α , характеризующий задержку взаимодействия, в литературе известна как модель Курамото–Сакагучи [4].

С момента своей первоначальной формулировки появилось огромное число исследований всевозможных вариаций и обобщений модели (1), учитывающих влияние различных факторов на коллективное поведение сетей связанных осцилляторов, применительно к широкой области приложений. К числу таких факторов относятся, в частности, мультимодальные частотные распределения, наличие шума, неоднородность межэлементных связей, сложная конфигурация соединений, влияние инерции и др. Обширный анализ результатов работ в этой области дают обзоры [5–8] и источники, указанные в них.

Другое обобщение модели Курамото, на которое мы хотим обратить внимание, связано с изучением эффектов и явлений в адаптивных осцилляторных сетях. Данное направление лишь относительно недавно получило свое развитие и потому не нашло достаточного отражения в обзорах, упомянутых нами выше. Особенностью таких сетей является наличие свойства адаптивности межэлементных взаимодействий, которое заключается в динамическом изменении силы связи между элементами сети в зависимости от их текущих состояний [9]. Структура взаимодействий в сетях с адаптивными связями формируется в результате совместной эволюции состояний элементов сети и межэлементных соединений. Для описания динамики элементов в сетях с таким сложным нестационарным характером взаимодействий используют обобщение модели (1) следующего вида

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \kappa_{ij}(t) \sin(\phi_i - \phi_j + \alpha), \quad i = 1, \dots, N. \quad (2)$$

Здесь $\kappa_{ij}(t)$ характеризует силу воздействия, оказываемого со стороны j -го на i -й осциллятор сети. В модели (2) мы отказываемся от ограничения идентичности взаимодействия и полагаем, что сила связи между двумя произвольными i и j осцилляторами сети изменяется во времени в зависимости от значений их фаз ϕ_i и ϕ_j . Для описания динамики коэффициентов связей κ_{ij} используют уравнение, которое в общем виде может быть записано следующим образом:

$$\frac{d\kappa_{ij}}{dt} = -\varepsilon F(\kappa_{ij}, \Lambda(\phi_i - \phi_j)), \quad (3)$$

где $\Lambda(\phi)$ – 2π -периодическая функция пластичности (адаптации), определяющая характер изменения силы межэлементных связей в зависимости от состояний взаимодействующих элементов, в частности, от их относительной разности фаз. Параметр ε характеризует временной масштаб изменения коэффициентов связей. Традиционно предполагается, что связи между осцилляторами изменяются во времени значительно медленнее по сравнению с изменением состояний самих осцилляторов, поэтому выбирают значение параметра $\varepsilon \ll 1$. За последние два десятилетия были предложены и изучены различные модели эволюции коэффициентов κ_{ij} , позволяющие описать различные схемы адаптации связей и понять взаимодействие коллективной динамики и адаптивного характера взаимодействий.

Наличие адаптивности соединений является неотъемлемым свойством многих сетевых систем. Представление о распространённости адаптивных сетей даёт обзор [10] и многочисленные источники, цитируемые в нём. Модели адаптивных сетей возникают при описании процессов в широком ряде областей, включая экологические и эпидемиологические системы; генетические, нейронные и иммунные сети; распределительные и коммуникационные сети; социальные модели. Этим объясняется возрастающий интерес к изучению адаптивных сетей, наблюдаемый в последнее время. Неслучайным является и обращение исследователей в этой области к подходу, развитому Курамото, который продемонстрировал свою эффективность при описании и изучении различных проявлений процессов синхронизации в сложных сетях с неизменными во времени межэлементными связями. Анализ основных результатов, полученных на сегодняшний день для адаптивных осцилляторных сетей, построенных в рамках модели Курамото, посвящён настоящий обзор. В разделе 1 рассмотрены основные классы моделей динамических связей, используемых при описании адаптивных сетей. Наряду с описанием законов адаптации связей, реализуемых в рамках рассматриваемых моделей, будут проанализированы динамические эффекты, вызванные наличием свойства адаптивности соединений на примере как малых ансамблей, так и больших сетей взаимодействующих фазовых осцилляторов. В разделе 2 представлены недавние результаты, касающиеся взаимодействия адаптивности связей и сложной сетевой структуры, включающей, в том числе, многослойность. В Заключение кратко резюмируются результаты, приведённые в рамках обзора.

1. Сети Курамото с динамическими связями

1.1. Синхронные состояния в моделях с синаптической пластичностью связей. Представленные в этом разделе модели были мотивированы развитием представлений о процессах обучения и памяти, формирование которых определяется свойством пластичности синаптических соединений в нейронных сетях. Это обнаруженное экспериментально свойство заключается в том, что сила синаптической связи между парой нейронов изменяется в зависимости от разности времён генерации пре- и постсинаптическим нейронами потенциалов действия (спайков). А именно, если пресинаптический спайк предшествует постсинаптическому, то есть способствует генерации последнего, то сила такой связи увеличивается; в противном случае сила связи уменьшается.

В работе [11] была рассмотрена упрощённая модель нейронной сети с синаптической пластичностью следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_i}{dt} &= \omega_i - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \kappa_{ij} \sin(\phi_i - \phi_j), \quad i = 1, \dots, N, \\ \frac{d\kappa_{ij}}{dt} &= \varepsilon \begin{cases} (\alpha - \kappa_{ij}) \exp\left(\frac{\phi_i - \phi_j}{\tau_p}\right), & (\phi_i - \phi_j) \in [-\pi, 0], \\ -\kappa_{ij} \exp\left(-\frac{\phi_i - \phi_j}{\tau_d}\right), & (\phi_i - \phi_j) \in [0, \pi], \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

где ϕ_j – фаза пресинаптического нейрона j , ϕ_i – фаза постсинаптического нейрона i , а τ_p и τ_d – временные константы потенциации и депрессии синаптической передачи, соответственно. Считается, что нейрон генерирует потенциал действия, когда его фаза, взятая по модулю 2π , принимает нулевое значение. Модель (4) учитывает, что все синаптические веса положительны и ограничены сверху величиной α , и если синаптический вес между парой нейронов мал, то κ_{ij} экспоненциально сильно увеличивается / слабо уменьшается в зависимости от знака разности фаз, и наоборот, если синаптический вес близок к максимальному, он слабо увеличивается / сильно уменьшается. Конкуренция между всеми синапсами нейрона в сети и их саморегуляция учитывается в уравнении для фаз (модели Курамoto), а преобладание подавления синаптических связей над их усилением можно учесть с помощью условия $\tau_d > \tau_p$. Кроме того, с помощью малого параметра ε в модели учитывается, что синаптические веса изменяются медленно по сравнению с быстрой динамикой фаз.

Было установлено, что в случае сети из большого числа осцилляторов модель Курамoto с синаптической пластичностью (4) всегда имеет синхронное состояние при параметре α , превышающем некоторое критическое значение α_c (рис. 1). Это синхронное состояние характеризуется иерархической структурой связей, когда осциллятор с наибольшей собственной частотой навязывает свою частоту всем остальным осцилляторам. При этом при уменьшении α от α_s ($\alpha_s > \alpha_c$) переход к десинхронизации происходит через кластерные состояния. Пример такого перехода для сети, состоящей из $N = 5$ осцилляторов представлен на рис. 1, а. Сначала осциллятор с наименьшей собственной частотой отсоединяется от синхронной группы (образуется кластерное состояние 4 : 1), затем это делает осциллятор со следующей собственной частотой (кластерное состояние 3 : 1 : 1 на рис. 1, а), и так далее до полностью асинхронного состояния. Аналогичные процессы наблюдаются и в сетях, состоящих из большого числа элементов (см. рис. 1, б). Одним из свойств системы (4) является наличие области мультистабильности, когда различные кластерные состояния существуют одновременно (см. рис. 1). Это справедливо только для асимметричного правила синаптической пластичности $\tau_d > \tau_p$, при этом диапазон существования мультистабильности по параметру α становится шире с увеличением разности $(\tau_d - \tau_p)$. Причины такого поведения системы были изучены с точки зрения нелинейной динамики в случае двух осцилляторов, когда система (4) является трёхмерной, если перейти к разности фаз. Для симметричного правила синаптической пластичности ($\tau_p = \tau_d$) в синхронном состоянии, то есть при достаточно больших α ,

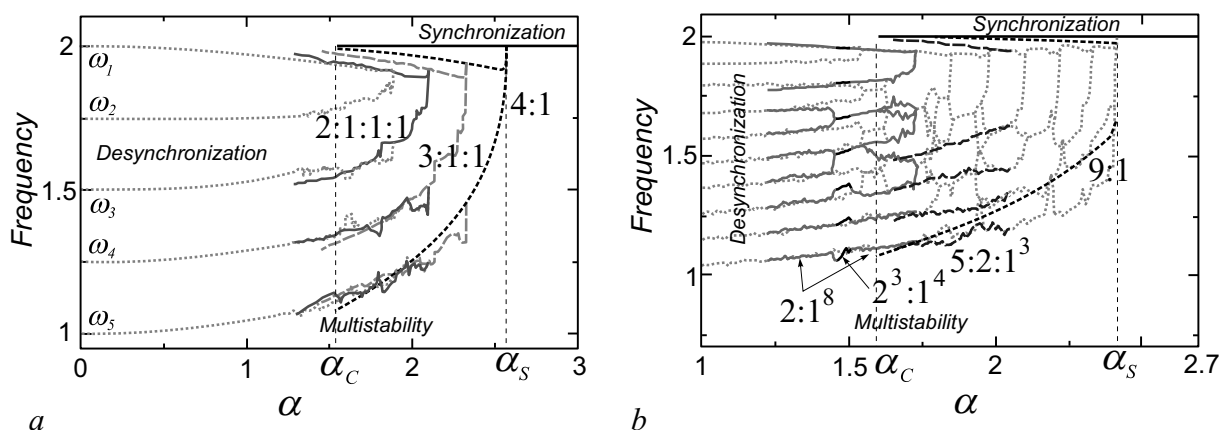


Рис. 1. Диаграммы изменения частот осцилляторов сети (4) в зависимости от α для различных N : $N = 5$ (а), $N = 10$ (б). Значения параметров: $\tau_d = 0.3$, $\tau_p = 0.15$, $\varepsilon = 0.5$, $\omega_i = 2 - (i - 1)/(N - 1)$, $i = 1, \dots, N$. Модифицировано из [11]

Fig. 1. Frequency diagrams for the network (4) with different N : $N = 5$ (a), $N = 10$ (b). Parameter values: $\tau_d = 0.3$, $\tau_p = 0.15$, $\varepsilon = 0.5$, $\omega_i = 2 - (i - 1)/(N - 1)$, $i = 1, \dots, N$. Modified from [11]

существуют только два состояния равновесия, одно из которых устойчиво, а второе является седловым. При α_c состояния равновесия исчезают через седло-узловую бифуркацию, и одновременно с этим происходит бифуркация петли сепаратрис седло-узла, из которой рождается устойчивый вращательный предельный цикл, соответствующий асинхронному состоянию. В случае асимметричного правила синаптической пластичности ($\tau_d > \tau_p$) седло-узловая бифуркация состояний равновесия и бифуркация петли не совпадают. При достаточно больших значениях α в фазовом пространстве системы снова существуют только устойчивый узел и седло. При α_s в результате седло-узловой бифуркации одновременно рождаются устойчивый и седловой предельный цикл, причем при α_h последний исчезает через бифуркацию петли сепаратрис седла. Затем при α_c происходит седло-узловая бифуркация состояний равновесия, и при $\alpha < \alpha_c$ все траектории системы приходят на устойчивый вращательный предельный цикл. Таким образом, в диапазоне $\alpha_c < \alpha < \alpha_s$ в системе одновременно существуют устойчивое состояние равновесия и устойчивый вращательный предельный цикл, а значит, в системе присутствует мультистабильность.

Появление иерархической структуры в модели нейронной сети с синаптической пластичностью было изучено также в работе [12]. Уравнение для фаз в рассматриваемой модели записывается в следующем виде:

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i + \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_{j:(j,i) \in E} \kappa_{ji} \sin(\phi_j - \phi_i) + \sigma \xi_i, \quad (5)$$

где κ_{ji} — синаптический вес, отражающий влияние нейрона j на нейрон i , $\langle k \rangle$ — средняя входная степень i -го нейрона, ξ_i — гауссовский белый шум интенсивности σ . Считается, что нейрон генерирует спайк, когда его фаза пересекает ноль в направлении увеличения фазы. При этом время постсинаптического спайка определяется как

$$t_i = t + \frac{2\pi - \phi_i(t)}{2\pi + \phi_i(t + \Delta t) - \phi_i(t)} \Delta t,$$

где подразумевается, что пересечение фазой нуля происходит в промежутке времени между t и $(t + \Delta t)$, Δt — шаг интегрирования по времени. Множество рёбер графа связей обозначается E , то есть $(j, i) \in E$, если нейрон j является пресинаптическим по отношению к нейрону i . Синаптические веса κ_{ji} обновляются после каждого постсинаптического спайка по правилу синаптической пластичности, записанному в следующей форме:

$$\Delta \kappa_{ji} = \begin{cases} A^+ \exp\left(-\frac{t_j - t_i}{\tau}\right), & (t_j - t_i) < 0, \\ -A^- \exp\left(\frac{t_j - t_i}{\tau}\right), & (t_j - t_i) > 0. \end{cases} \quad (6)$$

Было установлено, что в модели (5)–(6), как и в (4), существует синхронное состояние, характеризующееся иерархической структурой связей, и переход к десинхронизации происходит через кластерные состояния, когда внутри каждого кластера связи направлены от осциллятора с большей собственной частотой к осцилляторам с меньшей. Показано, что наличие синаптической пластичности существенным образом понижает порог синхронизации сети по параметру одинакового для всех нейронов начального синаптического веса. Кроме того, порог синхронизации оказывается ниже в случае, если в начальной конфигурации сети нет ведущего осциллятора, оказывающего влияние на все остальные элементы сети.

Более сложная модель, учитывающая влияние на синаптический вес κ_{ij} не только активности нейронов i и j , но и всех других нейронов, связанных с нейроном i , была рассмотрена

в работе [13]. А именно, рассматривался случай сохранения суммарного веса входных связей каждого нейрона. Модель нейронной сети с гетеросинаптической пластичностью записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_i}{dt} &= \omega_i - \frac{1}{N} \sum_{i \neq j=1}^N \kappa_{ij} \sin(\phi_i - \phi_j), \quad i = 1, \dots, N, \\ \tau \frac{d\kappa_{ij}}{dt} &= f(\kappa_{ij}, \phi_i, \phi_j) - \kappa_{ij} \frac{\sum_{i \neq l=1}^N f(\kappa_{il}, \phi_i, \phi_l)}{\sum_{i \neq l=1}^N \kappa_{il}}, \quad \text{где} \\ f(\kappa_{ij}, \phi_i, \phi_j) &= \begin{cases} (\alpha - \kappa_{ij}) \exp\{(\phi_i - \phi_j)/\tau_p\}, & (\phi_i - \phi_j) \in [-\pi, -\psi), \\ \beta_0 + \beta_1(\phi_i - \phi_j), & (\phi_i - \phi_j) \in [-\psi, \psi], \\ -\kappa_{ij} \exp\{-(\phi_i - \phi_j)/\tau_d\}, & (\phi_i - \phi_j) \in (\psi, \pi]. \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

Второе слагаемое в уравнении для эволюции κ_{ij} выражает сохранение суммарного веса входных синапсов i -го нейрона. Функция пластичности непрерывна благодаря введению интервала $(\phi_i - \phi_j) \in [-\psi, \psi]$, который выбирается достаточно узким: $\psi \ll \tau_{p,d}$, при этом коэффициенты линейной функции равны $\beta_0 = \frac{1}{2} \exp\{-\psi/\tau_p\}(\alpha - \kappa_{ij}) - \frac{1}{2} \kappa_{ij} \exp\{-\psi/\tau_d\}$, $\beta_1 = \frac{1}{2\psi}[(\kappa_{ij} - \alpha) \times \exp\{-\psi/\tau_p\} - \kappa_{ij} \exp\{-\psi/\tau_d\}]$, а суммарный входной вес обозначается как $\hat{K} = \sum_{i \neq j=1}^N \kappa_{ij}$.

В такой сети появление иерархической структуры невозможно: самый быстрый осциллятор в рассматриваемой модели всегда подвергается воздействию других элементов сети, поскольку сумма входных синапсов каждого нейрона постоянна. Это приводит к качественным изменениям в динамике сети. В частности, в ней возникают несколько синхронных состояний двух разных типов. Диаграмма, иллюстрирующая переходы между различными синхронными состояниями при изменении \hat{K} приведена на рис. 2, а. Первый тип синхронного состояния, обозначенный *PL2*, характеризуется распределением фаз в некотором узком интервале (рис. 2, б), при этом разные синхронные состояния этого типа различаются разными зависимостями установившейся частоты от суммы входных синаптических весов. Среди них есть состояния, частоты которых

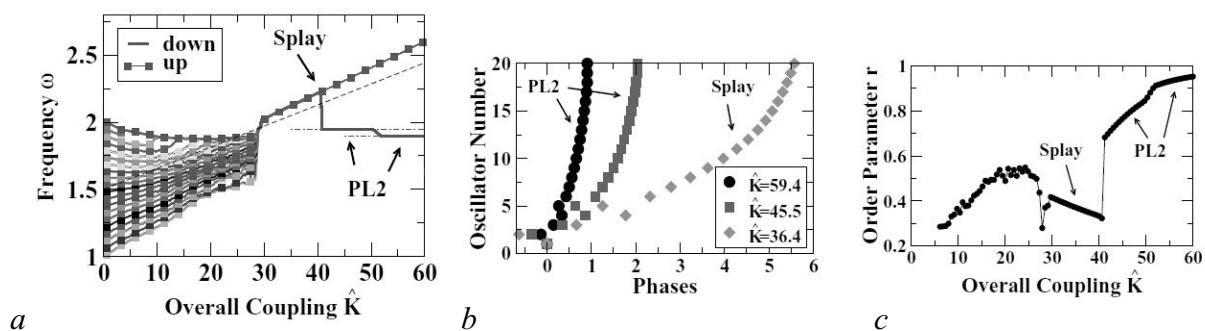


Рис. 2. Основные типы синхронных состояний в сети (7) для $N = 20$ и переходы между ними. а – Диаграмма изменения частот осцилляторов в зависимости от \hat{K} . Состояния *PL2* на диаграмме отвечают синхронизации на частоте близкой к собственным частотам второго и третьего осцилляторов соответственно. б – Распределения фаз осцилляторов в синхронных состояниях *PL2* и splay. в – Параметр порядка в зависимости от \hat{K} . Значения параметров: $\tau = 20$, $\tau_d = 0.3$, $\tau_p = 0.15$, $\alpha = 100$, $\psi = 0$. Модифицировано из [13]

Fig. 2. The main types of synchronous states in the network (7) with $N = 20$ and transitions between them. а – Frequency diagram as function \hat{K} . The *PL2* states in the diagram correspond to synchronization at a frequency close to the natural frequencies of the second and third oscillators respectively. б – Phase distributions of oscillators in *PL2* states and splay state. в – Order parameter as function \hat{K} . Parameters $\tau = 20$, $\tau_d = 0.3$, $\tau_p = 0.15$, $\alpha = 100$, $\psi = 0$. Modified from [13]

слабо зависят от \hat{K} (в случае узкого интервала $[-\psi, \psi]$), и состояния, частоты которых близки к одной из собственных частот осцилляторов сети, однако она не является ни наибольшей, ни наименьшей, в отличие от случая стандартной синаптической пластичности. Второй тип синхронных состояний, так называемое *splay*-состояние, характеризуется равномерным распределением фаз по всей окружности (см. рис. 2, *b*) и широким интервалом изменения общей частоты, значение которой зависит от конкретной последовательности генерации спайков элементами сети. При этом с увеличением \hat{K} общая частота линейно растёт (см. рис. 2, *a*), а параметр порядка уменьшается (рис. 2, *c*). Оба типа синхронных состояний характеризуются топологией сети, близкой к кольцевой, что является следствием сохранения суммы входных синаптических весов каждого нейрона.

1.2. Синхронизация и кластерообразование в системах с пластичностью Хебба.

В работах [14, 15] рассмотрены сети фазовых осцилляторов, динамика связей в которых определяется другим видом функции пластичности. Динамика таких сетей описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \kappa_{ij} \sin(\phi_i - \phi_j), \quad (8)$$

$$\frac{d\kappa_{ij}}{dt} = \varepsilon(\alpha \cos(\phi_i - \phi_j) + \kappa_{ij}).$$

Модель связи в рассматриваемой адаптивной сети (8) содержит функцию пластичности, реализующую так называемое обобщённое правило обучения Хебба. В этом случае динамика коэффициентов связей для пары осцилляторов определяется разностью фаз между ними таким образом, что связь возрастает быстрее для осцилляторов с близкими значениями фаз и ослабевает быстрее для осцилляторов, находящихся в противофазе. Параметр α масштабирует допустимый диапазон изменения связей и, фактически, определяет стационарное значение связи между синфазно синхронизованными осцилляторами. Параметр ε характеризует временной масштаб изменения связей или, как часто говорят в отношении данной модели, скорость обучения сети.

Анализ динамики сети (8) основывался на рассмотрении асимптотических состояний для коэффициентов связей, которые либо принимают стационарное значение $\kappa_{ij}^* = \alpha \cos(\phi_i - \phi_j)$, когда осцилляторы i и j синхронизованы, либо совершают колебания около нулевого среднего значения в случае несинхронизованных осцилляторов. Подставляя κ_{ij}^* в уравнение для фаз системы (8), получаем

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i - \frac{\alpha}{2N} \sum_{j=1}^N \sin[2(\phi_i - \phi_j)]. \quad (9)$$

Уравнение (9) эквивалентно оригинальному уравнению Курамото (1) для удвоенных переменных фаз $2\phi_i$ и собственных частот $2\omega_i$. В работе [5] было показано, что параметр порядка, определяемый как

$$R_1 = \frac{1}{N} \left| \sum_{j=1}^N e^{i\phi_j(t)} \right| \quad (10)$$

и характеризующий степень синхронизации сети (1), принимает ненулевое значение при $\kappa > \kappa_c$. В случае нормального распределения собственных частот осцилляторов сети была получена оценка критического значения связи, выше которого в сети наблюдается синхронизация

$$\kappa_c = \frac{2}{\pi g(0)} = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \sigma,$$

где $g(\omega)$ – функция распределения собственных частот осцилляторов сети, а σ – среднее квадратичное отклонение распределения. Исходя из этого, можно получить критическое значение параметра $\alpha_c = 2\kappa_c$, выше которого в системе (9) наблюдается переход к режиму синхронизации. Показано, что в режиме синхронизации существует два устойчивых состояния для разностей фаз $\phi_i - \phi_j = 0$ и $\phi_i - \phi_j = \pi$. Для системы (9), по аналогии с (10), можно ввести новый параметр порядка

$$R_2 = \frac{1}{N} \left| \sum_{j=1}^N e^{2i\phi_j(t)} \right|, \quad (11)$$

который в исходной системе (8) характеризует степень когерентности сети, когда синхронизованные осцилляторы образуют два кластера, находящиеся в противофазе друг по отношению к другу. Вид зависимости параметра R_2 на рис. 3, *b* свидетельствует о формировании в сети (8) противофазных кластеров при превышении параметром α критического значения α_c . В работе [14] показано, что при $\alpha > \alpha_c$ наличие медленной динамики связей (параметр ε мал) приводит к мультистабильности: система (8) обладает семейством устойчивых решений, соответствующих синхронизированным кластерам разного размера и с различными соотношениями

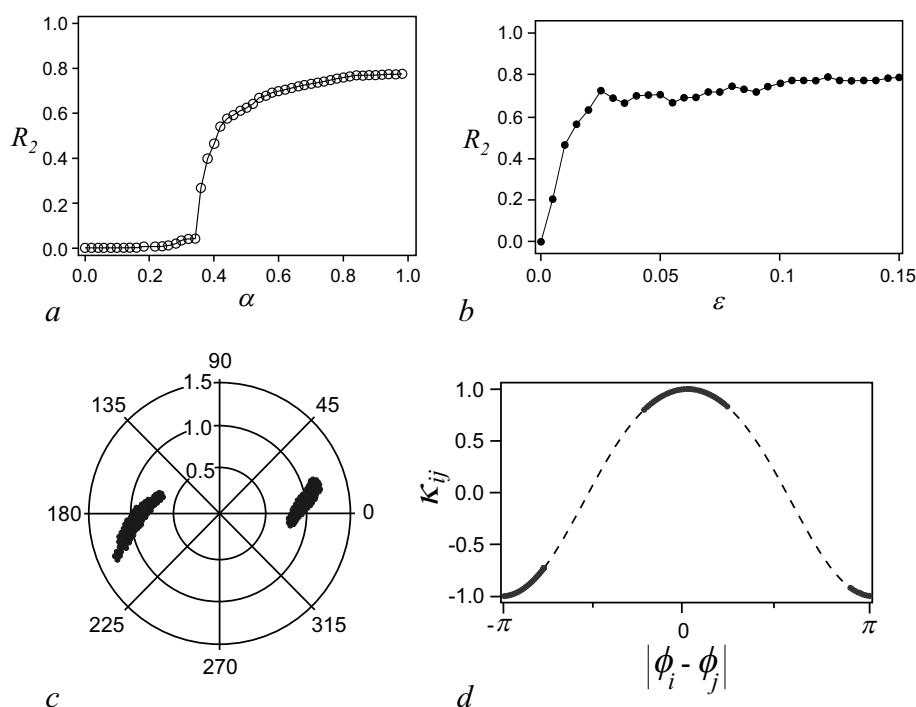


Рис. 3. Зависимости параметра порядка R_2 , характеризующего формирование двухкластерного состояния от параметра α при $\varepsilon > \varepsilon_c$ (*a*), ε при $\alpha > \alpha_c$ и $\kappa_{ij}(0) = 0$ (*b*). Пример двухкластерного состояния в сети (8) для $N = 250$ при $\alpha > \alpha_c$, $\varepsilon > \varepsilon_c$: распределение фаз осцилляторов (*c*), распределение связей κ_{ij} (*d*). Пунктирная линия определяет значения коэффициентов связей в стационарном состоянии $\kappa_{ij}^* = \alpha \cos(\phi_i - \phi_j)$. Собственные частоты осцилляторов ω_i подчиняются распределению Гаусса с нулевым средним значением и стандартным отклонением $\sigma = 0.1$. Модифицировано из [15]

Fig. 3. Two-cluster synchronization R_2 as function of parameter: α for $\varepsilon > \varepsilon_c$ (*a*), ε for $\alpha > \alpha_c$ and $\kappa_{ij}(0) = 0$ (*b*). Example of two-cluster state in network (8) with $N = 250$ for $\alpha > \alpha_c$, $\varepsilon > \varepsilon_c$: Polar plot of the distribution of oscillators (*c*). Distribution of couplings κ_{ij} (*d*). Dashed line determines values of coupling in stationary state $\kappa_{ij}^* = \alpha \cos(\phi_i - \phi_j)$. Intrinsic frequencies ω_i were drawn from a Gaussian distribution with zero mean value and standard deviation $\sigma = 0.1$. Modified from [15]

фаз между осцилляторами. Увеличение параметра ε (скорости обучения сети) приводит к росту параметра R_2 , который принимает максимальное значение при $\varepsilon > \varepsilon_c$ (рис. 3, *b*). Эта ситуация отвечает максимальному размеру когерентного кластера, включающего в себя все осцилляторы сети (рис. 3, *c*, *d*). Также продемонстрировано, что конкретный кластер может быть сформирован благодаря включению внешнего воздействия с заданной частотой к группе осцилляторов. После установления такое синхронизированное состояние устойчиво к шуму и небольшим изменениям собственных частот осцилляторов. Аналогичные результаты были получены в работе [15], где проведено исследование динамики сети (8) в случае как медленного, так и быстрого обучения. Как и в [14], установлено, что существует критическое значение скорости обучения ε_c , выше которого в сети появляются два синхронных кластера, осцилляторы которых находятся в противофазе относительно друг друга. В то же время было показано, что для малых $\varepsilon < \varepsilon_c$ формируется лишь один синхронный кластер, отвечающий режиму глобальной синхронизации сети ($R_1 = 1$). Такая особенность поведения системы при малых ε объясняется выбором начальных условий для коэффициентов связей $\kappa_{ij}(0) > \kappa_c$, которые преимущественно использовались при проведении исследований в [15].

В рамках модели (8) также было изучено взаимное влияние адаптации связей и наличия временных задержек передачи взаимодействия в случаях одномерной и двумерной глобально связанных решёток осцилляторов с периодическими граничными условиями, где временные задержки вычисляются на основе расстояния между соответствующими узлами решётки. Результаты данного исследования были опубликованы в работе [16]. Показано, что при наличии двух рассматриваемых механизмов взаимодействий сохраняются особенности решений, описанных в предшествующих работах [14, 15], а также появляются новые, существование которых невозможно в сетях только с временными задержками взаимодействия или только в случае их адаптивности. В случае одномерной решётки обнаружены дополнительные пространственные моды двухкластерного синхронного поведения, наблюдаемые выше некоторого критического значения параметра ε . Получены аналитические выражения, связывающие частоту соответствующих мод в режиме синхронизации и параметра временной задержки (скорости распространения взаимодействия). В двумерных решётках обнаружено появление сложных когерентных пространственно-временных структур, характеризуемых единой частотой для всех осцилляторов. Структура связей в этих случаях подстраивается таким образом, чтобы уменьшить расстройку фаз между осцилляторами.

1.3. Глобальная частотная синхронизация в системах с модифицированной пластичностью анти-Хебба. В серии работ [17–19] рассматривается закон адаптации связей противопоставляемый модели, описывающей правило обучения Хебба [14, 15] и приводящей к появлению мультистабильности. Динамика таких адаптивных сетей описывается системой уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_i}{dt} &= \omega_i - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \kappa_{ij} \sin(\phi_i - \phi_j), \\ \frac{d\kappa_{ij}}{dt} &= \varepsilon(\alpha |\sin(\beta(\phi_i - \phi_j))| + \kappa_{ij}). \end{aligned} \quad (12)$$

Функция адаптации $\Lambda(\phi_i, \phi_j) = \alpha |\sin(\beta(\phi_i - \phi_j))|$ в модели связи подразумевает, что коэффициенты связи нарастают быстрее для пар осцилляторов, имеющих большую расстройку фаз. Ещё одной особенностью данной модели связи, отличающей её от рассмотренной в разделе 1.1, является возможный диапазон изменения коэффициентов связей κ_{ij} , которые принимают только положительные значения в интервале $[0, \alpha]$.

Введение такого типа адаптивных связей рассматривается как эффективный механизм для достижения глобальной синхронизации в сети фазовых осцилляторов с различными собственными частотами. В качестве характеристик эффективности используются время установления

синхронного режима и отвечающее данному режиму среднее значение связей. В [17] продемонстрирована возможность появления режима глобальной частотной синхронизации в системе (12) на примере глобально связанной сети и кольцевой сети осцилляторов, взаимодействующих только с ближайшими соседями. Оценки величин стационарных значений силы связей в синхронном режиме, полученные для адаптивных сетей, оказались ниже по сравнению с аналогичными характеристиками для сетей без адаптации связей. Способность сетей (12) обеспечить синхронизацию улучшается, поскольку интенсивность связей между осцилляторами адаптивно снижается, принимая максимальные значения лишь на время процесса установления синхронизации. Изучено влияние параметров функции пластичности α и β , а также параметра ε , характеризующего скорость изменения связей на характеристики эффективности процесса синхронизации. Сравнительный анализ различных схем адаптации показал, что наилучшие показатели эффективности синхронизации достигаются при $\beta = 0.5$, а также в случае линейной зависимости $\Lambda(\phi_i, \phi_j) = \alpha|\beta(\phi_i - \phi_j)|$. Данные условия определяют монотонный характер функции пластичности. Увеличение параметра α приводит к уменьшению разброса фаз осцилляторов в синхронном режиме, а также к увеличению скорости синхронизации. Последнее можно получить также за счёт увеличения параметра ε . Позднее в работе [18] было показано, что при соответствующей настройке параметров в системе (12) может наблюдаться новый тип устойчивого поведения, получившего название «колебания порядка». Данное состояние характеризуется периодическим изменением параметра порядка от нуля до значений, близких к единице, отвечающим колебаниям состояния сети между почти синхронным и асинхронным поведением.

Изучение эффективности механизма адаптации связей для достижения режимов глобальной синхронизации в сетях со сложной топологией соединений было продолжено в работе [19]. В рамках данного исследования был проведен сравнительный анализ характеристик пяти различных схем организации связей (адаптивных и не адаптивных) на примере нескольких основных типов топологий соединений, включающих в себя сети типа малого мира, масштабно-инвариантные, случайные и модульные сети. Используемая функция пластичности адаптивного типа связей $\Lambda(\phi_i, \phi_j) = \alpha|\sin(\beta(\phi_i - \phi_j))|/k_i^\gamma$ была модифицирована с учётом неоднородного распределения степеней узлов k_i в сетях со сложной топологией соединений. Было показано, что используемая модель адаптивной связи обеспечивает лучшие показатели характеристик эффективности синхронизации рассматриваемых сложных сетей по сравнению с различными схемами статических взаимодействий.

1.4. Когерентные состояния в системе со статическим ограничением связей. В работах [20, 21] для описания динамики коэффициентов связей κ_{ij} была предложена обобщённая модель следующего вида:

$$\frac{d\kappa_{ij}}{dt} = -\varepsilon\Lambda(\phi_i - \phi_j), \quad |\kappa_{ij}| \leq 1. \quad (13)$$

Дополнительное условие $|\kappa_{ij}| \leq 1$ в (13) предотвращает неограниченный рост коэффициентов силы связи. В этом случае диапазон значений, которые могут принимать переменные κ_{ij} , ограничен интервалом $[-1, 1]$. Функция пластичности $\Lambda(\phi)$ в системе (13) задаётся в виде $\Lambda(\phi) = \sin(\phi + \beta)$, где параметр β удовлетворяет условию $0 < \beta < 2\pi$ и контролирует характер изменения силы связи в зависимости от разности фаз взаимодействующих осцилляторов. Преимуществом данной модели является наличие возможности непрерывного изменения функции пластичности посредством параметра β , что позволяет провести систематический анализ коллективной динамики сети, не ограничиваясь рассмотрением какого-либо одного закона адаптации связей. В качестве примера на рис. 4 приведены несколько характерных зависимостей функции пластичности, реализуемых в модели (13) при различных значениях параметра β . При $\beta = -\pi/2$ функция пластичности

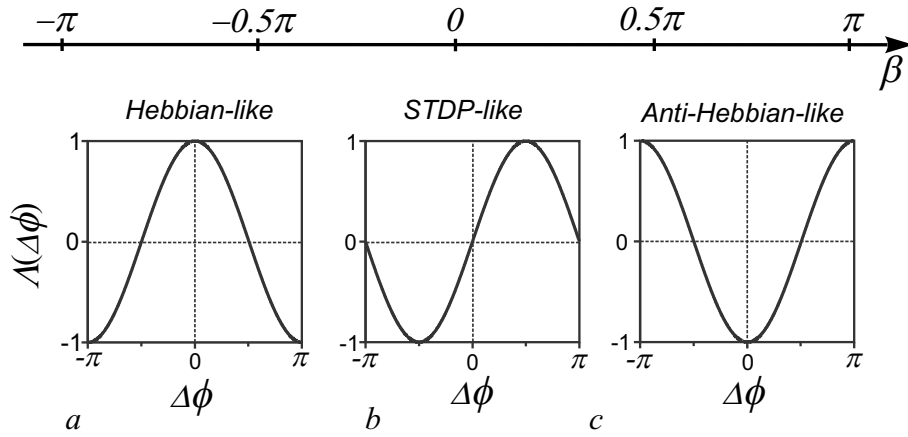


Рис. 4. Вид функции пластичности $\Lambda(\Delta\phi)$ и соответствующее ей правило адаптации связей в зависимости от параметра β : $\beta = -\pi/2$ – правило Хебба (a), $\beta = 0$, свойство пластичности синапсов, STDP (b), $\beta = \pi/2$ – обратное правило Хебба (c)

Fig. 4. Type of plasticity function $\Lambda(\Delta\phi)$ and the corresponding rule for coupling adaptation depending on the parameter β : $\beta = -\pi/2$ – Hebbian (a), $\beta = 0$ – spike time dependent plasticity, STDP (b), $\beta = \pi/2$ – anti-Hebbian (c)

принимает вид $\Lambda(\phi) = \cos(\phi)$. В этом случае (рис. 4, a) в соответствии с уравнением (13) сила связи κ_{ij} возрастает для осцилляторов с близкими значениями фаз, и наоборот, уменьшается для осцилляторов с существенно различающимися фазами ($|\phi_i - \phi_j| > \pi/2$). Такой характер изменения связей аналогичен правилу Хебба. Вид функции пластичности при $\beta = 0$ (рис. 4, b) обеспечивает усиление связи, если осциллятор j опережает по фазе i -ый осциллятор, то есть $\phi_i - \phi_j < 0$, и уменьшение силы связи в обратном случае. Такая закономерность в поведении связей качественно соответствует ситуации, наблюдаемой в моделях, описывающих свойство пластичности синапсов. Если $\beta = \pi/2$, функция пластичности принимает вид $\Lambda(\phi) = -\cos(\phi)$ (рис. 4, c), при котором наблюдается взаимосвязь переменных, обратная правилу Хебба.

В работе [20] проанализированы динамические режимы как в системе из двух идентичных осцилляторов, так и в большой сети с адаптивными связями (13) для всего возможного диапазона значений параметра β , не ограничиваясь рассмотрением лишь описанных выше типичных законов адаптации связей. Задача исследования динамики двух адаптивно связанных осцилляторов может быть сведена к рассмотрению системы уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned}\frac{d\Delta\phi}{dt} &= -\kappa_{12} \sin(\Delta\phi + \alpha) + \kappa_{21} \sin(-\Delta\phi + \alpha), \\ \frac{d\kappa_{12}}{dt} &= -\varepsilon \sin(\Delta\phi + \beta), \quad |\kappa_{12}| \leq 1, \\ \frac{d\kappa_{21}}{dt} &= -\varepsilon \sin(-\Delta\phi + \beta), \quad |\kappa_{21}| \leq 1,\end{aligned}\tag{14}$$

где $\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2$. В зависимости от значений параметра β , в системе реализуется один из трёх типов асимптотических состояний, которые были классифицированы как симметричные, асимметричные и хаотические. Первые два получили свои названия в соответствии с характером распределения значений коэффициентов связей в соответствующем стационарном состоянии. Стационарным состояниям отвечают предельные значения связей, то есть $\kappa_{ij} = \pm 1$, и для симметричного состояния связи между осцилляторами идентичны ($\kappa_{12}^*, \kappa_{21}^* = (\pm 1, \pm 1)$), а для асимметричного состояния имеют противоположные значения ($\kappa_{12}^*, \kappa_{21}^* = (\pm 1, \mp 1)$). При этом симметричное состояние отвечает синфазной синхронизации ($\Delta\phi^* = 0$) для положительных

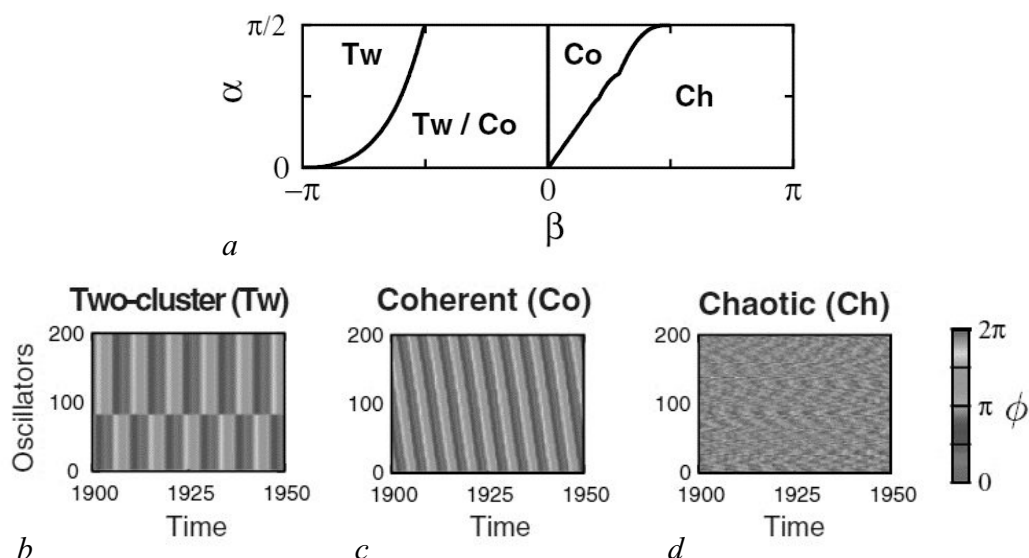


Рис. 5. Диаграмма, иллюстрирующая области существования асимптотических состояний в сети (2), (13) для $N = 200$ и $\varepsilon = 0.005$ (a). Эволюция фаз осцилляторов $\phi_i(t)$, отвечающая основным типам асимптотических состояний сети: двухкластерное состояние (b), когерентное состояние с фиксированным соотношением фаз между осцилляторами (c), хаотическое асинхронное поведение (d). Индексы i осцилляторов переопределены в порядке возрастания мгновенных значений фаз ϕ_i осцилляторов в предшествующий момент времени $t = 1000$. Модифицировано из [22]

Fig. 5. Phase diagram of the asymptotic states in network (2), (13) for $N = 200$ and $\varepsilon = 0.005$ (a). The evolution of phases $\phi_i(t)$ corresponding to the main types of asymptotic network states: two-cluster state (b), coherent state with a fixed phase relation between oscillators (c), chaotic asynchronous behavior (d). The index i of oscillators is arranged in order of increasing phase ϕ_i at a previous time $t = 1000$. Modified from [22]

значений связей и противофазной ($\Delta\phi^* = \pi$) в случае отрицательных значений связей. Асимметричному состоянию соответствует режим синхронизации осцилляторов с разностью фаз $\Delta\phi^* = \pm\pi/2$. Данные результаты были использованы для интерпретации особенностей динамического поведения в сети, состоящей из большого числа осцилляторов (рис. 5, a). Установлено соответствие между основными режимами сети и таковыми в системе двух осцилляторов (14). Сеть, состоящая из большого числа осцилляторов, также демонстрирует три типа асимптотических состояний: двухкластерное состояние (рис. 5, b), когерентное состояние с фиксированным соотношением фаз между осцилляторами (рис. 5, c) и хаотическое асинхронное поведение (рис. 5, d). В двухкластерном состоянии сеть разбивается на две группы, внутри которых осцилляторы синхронны, а осцилляторы, принадлежащие к различным группам, находятся в противофазе друг относительно друга. В режиме с фиксированным соотношением фаз частоты всех осцилляторов одинаковы, а относительные фазовые сдвиги между различными осцилляторами сети принимают некоторые значения, неизменные во времени.

Более детальное исследование вопросов устойчивости данных режимов было проведено в работе [22]. В частности, было показано, что описанные типы режимов наблюдаются в сети при введении расстройки собственных частот осцилляторов, модификации функции пластичности связей, а также в случае наличия масштабно-инвариантной топологии соединений. Таким образом, продемонстрирована возможность в рамках достаточно простой модели связи (13) выяснить механизмы формирования структур в адаптивных сетях. Однако дополнительное условие, наложенное на рост коэффициентов связей, привело к ограничению набора возможных состояний, реализуемых в сети (2), (13). Один из способов формирования более сложных мультикластер-

ных состояний в рамках предложенной модели состоит в использовании специальных функций пластичности $\Lambda(\phi)$, содержащих члены разложения Фурье более высоких порядков [22].

1.5. Динамика системы из двух фазовых осцилляторов с динамически ограниченными связями. В работах [23–27] проведено исследование системы

$$\begin{aligned}\frac{d\Delta\phi}{dt} &= \Delta\omega - \kappa_{12} \sin(\Delta\phi + \alpha) + \kappa_{21} \sin(-\Delta\phi + \alpha), \\ \frac{d\kappa_{12}}{dt} &= -\varepsilon(\sin(\Delta\phi + \beta) + \kappa_{12}), \\ \frac{d\kappa_{21}}{dt} &= -\varepsilon(\sin(-\Delta\phi + \beta) + \kappa_{21}),\end{aligned}\tag{15}$$

где $\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2$, $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$. Заметим, что в системе (15) переменные связей κ_{12} , κ_{21} ограничены за счёт динамики системы, а не в результате формального ограничения, как это имеет место в системе (14).

1.5.1. Регулярная и хаотическая динамика в случае $\Delta\omega = 0$. В работе [23] установлено, что в зависимости от значений параметров система (15) при $\Delta\omega = 0$ демонстрирует широкий набор динамических режимов: синхронный, когда частоты осцилляторов равны, а разность фаз имеет постоянное значение; квазисинхронный, в котором средняя разность частот осцилляторов равна нулю, а разность фаз колеблется без набега 2π около некоторого среднего значения; асинхронный режим, когда разность фаз непрерывно нарастает, а средняя разность частот отлична от нуля. Обнаружено, что асинхронные режимы могут быть как регулярными, так и хаотическими. В фазовом пространстве образом асинхронного регулярного режима является вращательный предельный цикл, а хаотического – вращательный хаотический аттрактор. Показано, что типичный сценарий перехода от синхронного режима к асинхронному хаотическому происходит следующим образом. При $\beta < \beta_H \approx 1.510797$ ($\alpha = 0.5$, $\varepsilon = 0.01$) единственными аттракторами системы являются асимптотически устойчивые состояния равновесия O_1 и O_3 и все траектории стремятся к ним при $t \rightarrow +\infty$. Вторая пара состояний равновесия O_2 и O_4 являются седлами с одномерным неустойчивым и двумерным устойчивым многообразиями. Схематическое представление структуры фазового пространства в этом случае приведено на рис. 6, а. При $\beta = \beta_H$ в фазовом пространстве системы (15) существуют два гетероклинических контура (рис. 6, б). Первый контур C_1 формируют гетероклинические траектории Γ_1 и Γ_2 , образованные соответственно сепаратрисами $W_1^u(O_4)$ и $W_1^u(O_2)$. Одновременно с контуром C_1 в фазовом пространстве существует также гетероклинический контур C_2 , образованный сепаратрисами $W_2^u(O_2)$ и $W_2^u(O_4)$ (см. рис. 6, б). Обнаружено, что при разрушении гетероклинических контуров с увеличением параметра β в фазовом пространстве системы (15) появляются два колебательных седловых предельных цикла L_1^u и L_2^u , охватывающие соответственно состояния равновесия O_1 и O_3 (рис. 6, в), одновременно с которыми возникает хаотический репеллер вращательного типа. При $\beta = \beta_A \approx 1.575796$ происходит бифуркация Андронова–Хопфа, при которой происходит потеря устойчивости состояний равновесия O_1 и O_3 , сопровождаемая рождением в фазовом пространстве двух устойчивых колебательных циклов L_1^s и L_2^s . Дальнейшее увеличение параметра β приводит к исчезновению циклов L_1^u и L_2^u через касательную (седло-узловую) бифуркацию с соответствующими циклами L_1^s и L_2^s при $\beta = \beta_F \approx 1.5859$. Переход через бифуркационную кривую $\beta = \beta_F$ приводит к формированию в фазовом пространстве хаотического аттрактора вращательного типа (рис. 6, д, е).

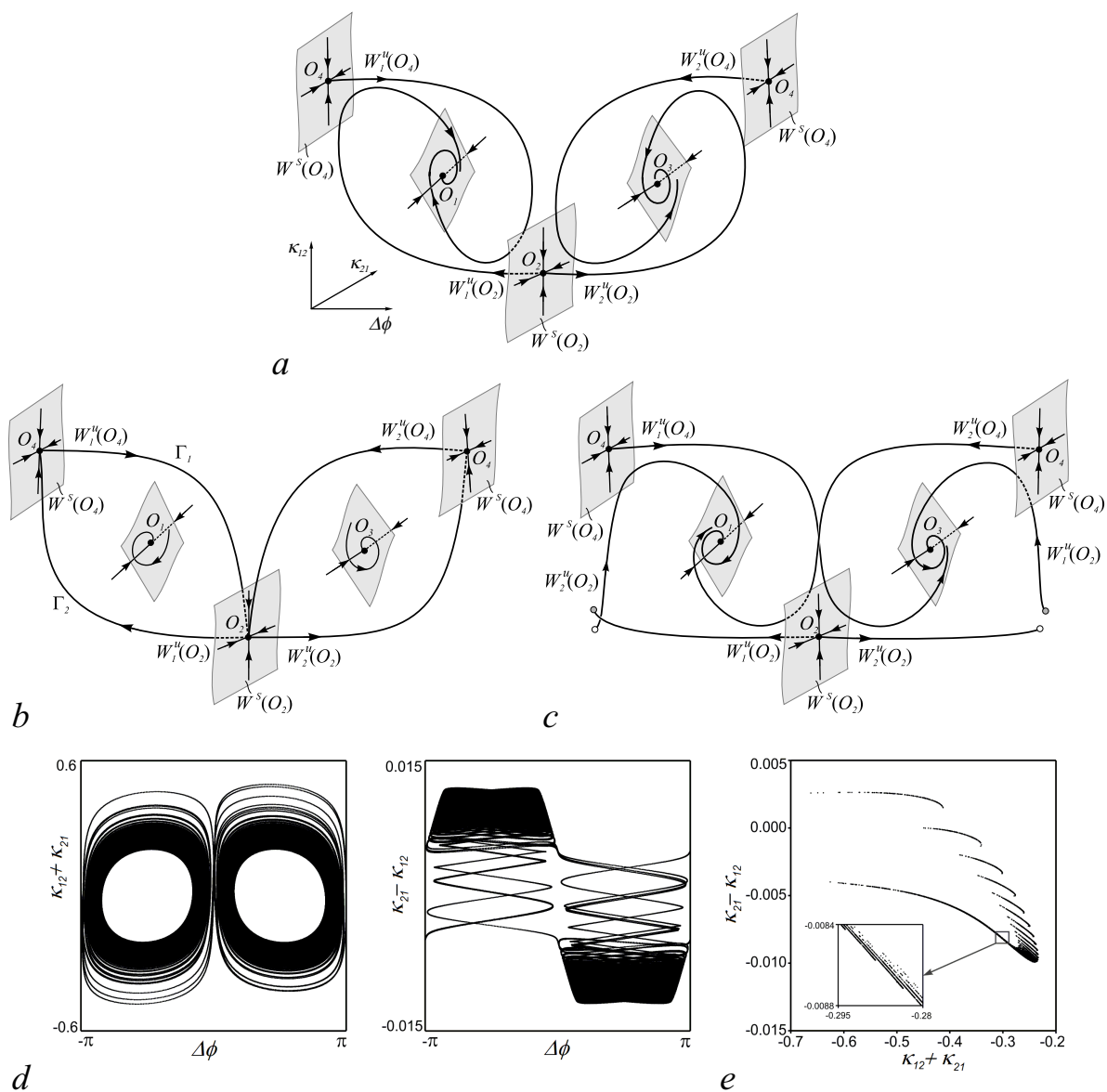


Рис. 6. Схематическое представление структуры фазового пространства, иллюстрирующее поведение неустойчивых сепаратрис $W_{1,2}^u(O_4)$ и $W_{1,2}^u(O_2)$ и их взаимное расположение относительно двумерных устойчивых многообразий $W^s(O_2)$ и $W^s(O_4)$ в системе (15) для различных значений β : 1.57 (a), 1.570797 (b), 1.575 (c). Хаотический аттрактор, формируемый в системе уравнений (15) при $\beta = 1.5836$: фазовые проекции (d) и вид аттрактора в сечении Пуанкаре плоскостью $\Delta\phi = -\pi/2$ (e). Значения параметров: $\varepsilon = 0.01$, $\alpha = 0.5$. Модифицировано из [23]

Fig. 6. Schematic representation of the phase-space structure, which illustrate the behavior of the unstable separatrices $W_{1,2}^u(O_4)$ and $W_{1,2}^u(O_2)$ and their mutual location with respect to the two-dimensional stable manifolds $W^s(O_2)$ and $W^s(O_4)$ in the system (15) for different β : 1.57 (a), 1.570797 (b), 1.575 (c). Chaotic attractor formed in system (15) for $\beta = 1.5836$: the phase projections (d) and the attractor view in the Poincaré section by the plane $\Delta\phi = -\pi/2$ (e). The parameter values: $\varepsilon = 0.01$ and $\alpha = 0.5$. Modified from [23]

1.5.2. Третий тип хаотической динамики. Традиционно детерминированный хаос было принято делить на диссипативный и консервативный. Сравнительно недавно в работах [28, 29] была выдвинута концепция нового, третьего типа хаотической динамики – так называемой смешанной динамики, которая характеризуется принципиальной неразделимостью диссипативного и консервативного поведения. Математическим образом такого хаоса является новый тип аттрактора, получивший название обратимого ядра. Обратимое ядро не притягивает никаких траекторий, но удерживает в своей окрестности все положительные и отрицательные полутраектории.

В статье [25] было установлено, что смешанная динамика реализуется в системе (15) при $\Delta\omega \neq 0$ и определённом выборе других параметров. Для удобства изложения результатов исследования смешанной динамики представим систему (15) в следующем виде

$$\begin{aligned}\frac{d\Delta\phi}{dt} &= \Delta\omega - y \cos \alpha \sin \Delta\phi + z \sin \alpha \cos \Delta\phi, \\ \frac{dy}{dt} &= -\varepsilon(y + 2 \sin \beta \cos \Delta\phi), \\ \frac{dz}{dt} &= -\varepsilon(z - 2 \cos \beta \sin \Delta\phi),\end{aligned}\tag{16}$$

где $y = \kappa_{12} + \kappa_{21}$, $z = \kappa_{21} - \kappa_{12}$. Было показано, что при наличии малой расстройки собственных частот осцилляторов $\Delta\omega$ хаотический аттрактор и хаотический репеллер системы (16) занимают приблизительно одинаковую область в фазовом пространстве и пересекаются (рис. 7, а), что свидетельствует о наличии в системе смешанной динамики. Численно было установлено, что при этом инвариантные многообразия седловых траекторий хаотического аттрактора и хаотического репеллера трансверсально пересекаются, образуя замкнутое инвариантное множество из траекторий, принадлежащих как аттрактору, так и репеллеру – обратимое ядро (рис. 7, б). Кроме того, в [25] система (16) была рассмотрена с точки зрения геометрической теории сингулярных возмущений. Было показано, что, несмотря на принадлежность системы к классу быстро-медленных, её хаотические аттракторы и хаотические репеллеры не описываются одномерным отображением Пуанкаре, поскольку все её траектории, за исключением траекторий, принадлежащих устойчивым многообразиям состояний равновесия, сходят с критического двумерного многообразия.

Свойства обратимого ядра системы (16) были изучены в работе [26]. Показано, что в обратимом ядре консервативные и диссипативные элементы динамики сосуществуют и неразделимы. Продемонстрировано, что обратимое ядро существует в целой области параметров, а его фрактальная размерность меньше фрактальных размерностей хаотического аттрактора

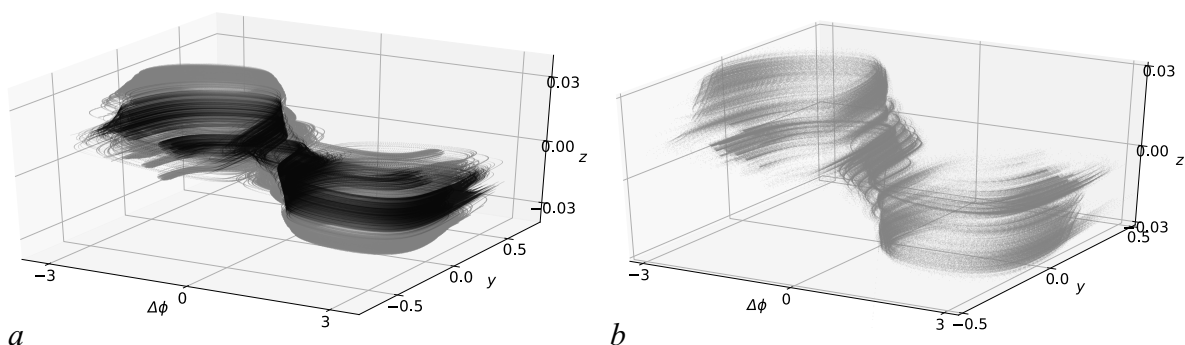


Рис. 7. а – Хаотический аттрактор (серый) и хаотический репеллер (чёрный) в фазовом пространстве системы (16). б – Обратимое ядро в фазовом пространстве системы (16). Параметры: $\alpha = 0.24$, $\beta = 1.6$, $\varepsilon = 0.01$, $\Delta\omega = 0.015$. Модифицировано из [26]

Fig. 7. а – Chaotic attractor (gray) and chaotic repeller (black) in the phase space of system (16). б – The reversible core in the phase space of system (16). Parameters $\alpha = 0.24$, $\beta = 1.6$, $\varepsilon = 0.01$, $\Delta\omega = 0.015$. Modified from [26]

и хаотического репеллера. Было установлено, что хаотические аттрактор и репеллер расположены в малой окрестности гладкой двумерной поверхности, задаваемой уравнением вида $z_{ap}(\Delta\phi, y) = A_z \cos \beta \sin \Delta\phi \sin(\omega_z y)/(\omega_z y)$, где для $\alpha = 0.24$, $\beta = 1.6$, $\varepsilon = 0.01$, а параметры аппроксимирующей функции: $\omega_z = 10.25$, $A = 3.06$. В этом случае возможно перейти к изучению динамики двумерной системы на аппроксимирующей поверхности, если подставить $z_{ap}(\Delta\phi, y)$ вместо z в первое уравнение системы (16) и исключить третье уравнение:

$$\begin{aligned}\frac{d\Delta\phi}{dt} &= \Delta\omega - y \cos \alpha \sin \Delta\phi + A_z \cos \beta \sin \Delta\phi \frac{\sin \omega_z y}{\omega_z y} \sin \alpha \cos \theta, \\ \frac{dy}{dt} &= -\varepsilon(y + 2 \sin \beta \cos \Delta\phi).\end{aligned}\quad (17)$$

При параметрах, соответствующих смешанной динамике, система (17) имеет четыре состояния равновесия, координаты которых практически совпадают с координатами состояний равновесия системы (16): два неустойчивых фокуса и два седла с неустойчивыми сепаратрисами, приблизительно параллельными оси $\Delta\phi$, и устойчивыми сепаратрисами, приблизительно параллельными оси y . При $\Delta\omega = 0$ в системе (17) существуют два устойчивых колебательных предельных цикла вокруг неустойчивых фокусов, их бассейны притяжения разделены инвариантными прямыми $\Delta\phi = 0$, $\Delta\phi = \pi$, содержащими устойчивые сепаратрисы сёдел. При $\Delta\omega \approx 10^{-15}$ одна из устойчивых сепаратрис каждого седла совпадает с одной из неустойчивых сепаратрис, и формируются два гетероклинических контура, при разрушении которых образуется неустойчивый вращательный предельный цикл. При $\Delta\omega = 0.0087$ вблизи него через седло-узловую бифуркацию рождаются устойчивый и неустойчивый вращательные предельные циклы, и затем оба неустойчивых вращательных предельных цикла исчезают при $\Delta\omega = 0.0155$ через две вращательные петли сепаратрис сёдел. Затем формируются две колебательные петли, из которых рождаются два неустойчивых колебательных предельных цикла, исчезающие при $\Delta\omega = 0.0201$ через седло-узловую бифуркацию вместе с двумя устойчивыми колебательными предельными циклами. Начиная с этого значения, единственным аттрактором системы (17) остаётся устойчивый вращательный предельный цикл.

Динамика двумерной системы коррелирует с динамикой исходной трёхмерной системы: при малых $\Delta\omega$ переменная $\Delta\phi$ трёхмерной системы в прямом времени преимущественно колеблется, а в обратном – вращается. При возникновении в системе (17) устойчивого вращательного предельного цикла переменная $\Delta\phi$ трёхмерной системы начинает не только колебаться, но также и совершать вращательные движения в прямом времени, а при возникновении в (17) двух неустойчивых колебательных предельных циклов переменная $\Delta\phi$ трёхмерной системы начинает совершать также и колебательные движения в обратном времени. Сближение колебательных предельных циклов двумерной системы перед седло-узловой бифуркацией сопровождается сближением хаотического аттрактора и хаотического репеллера в фазовом пространстве системы (16), и при бифуркационном значении параметра $\Delta\omega$ в трёхмерной системе также одновременно исчезают хаотические аттрактор и репеллер. Всё это позволяет сделать вывод о том, что седловые траектории системы (16) совершают хаотические переключения между аттракторами / репеллерами системы на аппроксимирующей поверхности (17). В силу того, что аттракторы и репеллеры двумерной системы расположены близко друг к другу, седловые траектории в прямом и обратном времени также близки, и формируются точки их пересечения. Кроме того, рассмотрение динамики системы (17) позволяет сделать вывод о том, что хаотический аттрактор и хаотический репеллер системы (16) исчезают сливаясь друг с другом, демонстрируя в некотором смысле аналог седло-узловой бифуркации циклов.

В работе [27] рассматривались проблемы смешанной динамики в системе (16) при воздействии на неё внешней гармонической силы. Было установлено, что в этом случае смешанная динамика возникает даже при $\Delta\omega = 0$, то есть, когда без внешнего воздействия в системе (16) она отсутствует. Было рассмотрено также влияние внешней силы на свойства обратимого ядра,

сформировавшегося благодаря ненулевой расстройке собственных частот осцилляторов. Установлено, что при увеличении амплитуды внешней силы от нуля фрактальная размерность обратимого ядра резко падает и остаётся в дальнейшем меньше, чем в автономном случае. Уменьшение фрактальной размерности сопровождается появлением в структуре обратимого ядра областей с высокой плотностью точек, напоминающих вид периодического решения, возникающего в системе (16) при исчезновении хаотического аттрактора, а также совпадением средней частоты колебаний разности фаз с гармоникой внешней силы. Такое поведение можно трактовать как явление вынужденной синхронизации обратимого ядра внешней силой.

1.6. Иерархическое формирование мультичастотных кластерных и химерных состояний в больших сетях с адаптивными связями. Динамические состояния, формируемые в больших сетях идентичных фазовых осцилляторов с рассмотренным выше способом описания адаптивных связей были изучены в работах [24, 30–33]. Динамика таких адаптивных сетей задаётся системой уравнений

$$\begin{aligned}\frac{d\phi_i}{dt} &= \omega - \frac{1}{N} \sum_{j=1, j \neq i}^N \kappa_{ij} \sin(\phi_i - \phi_j + \alpha), \\ \frac{d\kappa_{ij}}{dt} &= -\varepsilon(\sin(\phi_i - \phi_j + \beta) + \kappa_{ij}).\end{aligned}\quad (18)$$

В работах [24, 30] было показано, что используемая модификация модели связи позволяет наряду с однокластерными режимами, наблюдаемыми в случае модели связи (13), получить новый класс мультичастотных кластерных режимов. Далее для краткости будем называть такие режимы мультикластерными, подразумевая, что речь идёт о частотных кластерах, то есть формировании в сети групп синхронизованных осцилляторов, характеризующихся различными значениями частот. Распределение фаз осцилляторов внутри каждой группы (частотного кластера) отвечает одному из двух следующих основных типов синхронного поведения: когерентное состояние с фиксированным соотношением фаз между осцилляторами (рис. 8, *a*), формирование двух противофазных кластеров (рис. 8, *b*). В работах [32, 33, 35] данные типы фазовых распределений

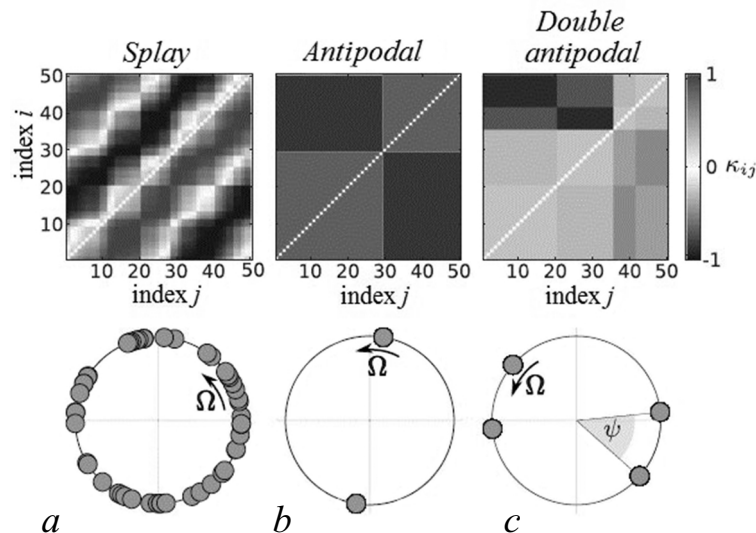


Рис. 8. Основные типы фазовых распределений для однокластерных состояний в системе (18): когерентное состояние с фиксированным соотношением фаз между осцилляторами (*a*), противофазные кластеры (*b*), две пары противофазных кластеров (*c*). Модифицировано из [33]

Fig. 8. Basic types of one-cluster states for system (18): splay state (*a*), antipodal state (*b*), double antipodal state (*c*). Modified from [33]

имеют обозначения – *splay* и *antipodal*, соответственно. Заметим также, что в данных работах указывается ещё один тип распределений фаз для одиночных кластеров – *double antipodal*, когда существуют две пары противофазных кластеров, смещённые на некоторую фазу ψ друг относительно друга (рис. 8, *с*). Однако этот последний тип поведения является неустойчивым и не реализуется в рамках сети (18), но может быть стабилизирован в двухслойной мультиплексной сети, как будет показано далее в разделе 2. В сети (18) могут формироваться мультикластерные состояния, характеризуемые как одним из двух основных типов синхронного поведения внутри групп, так и комбинацией этих типов. Ещё один тип поведения, обнаруженный в модели (18), характеризуется одновременным существованием пространственных областей с когерентным и некогерентным поведением и известен как химерные состояния [36]. При этом когерентная часть химерных состояний также может представлять собой мультикластерные режимы, обладающие описанными выше свойствами. Возможность формирования таких режимов объясняется более разнообразной структурой соединений, возникающих в сети в результате совместной эволюции состояний элементов и межэлементных связей.

Для диагностики формируемых в адаптивных сетях (18) сложных синхронных режимов, включая мультикластерные и химерные состояния, использован подход, основанный на совместном анализе ряда характеристик. Одной из таких характеристик являются усреднённые по времени параметры порядка

$$\langle R_k \rangle = \frac{1}{\Delta T} \int_T^{T+\Delta T} R_k dt, \quad (19)$$

где

$$R_k = \frac{1}{N} \left| \sum_{j=1}^N e^{-ik\phi_j} \right|, \quad k = 1, 2.$$

Расчет этих характеристик проводился на большом временном интервале $\Delta T = 10^4$ после окончания переходного процесса в течение времени T . Параметр R_1 характеризует степень глобальной синхронизации сети и может принимать значения в интервале $[0, 1]$. Второй параметр порядка R_2 также изменяется в интервале $[0, 1]$ и указывает на образование двух групп синхронизированных осцилляторов, находящихся в противофазе по отношению друг к другу.

В случае, когда параметры $0 < \langle R_k \rangle < 1$ ($k = 1, 2$), для получения более полной информации о свойствах формируемых режимов вводится ряд новых характеристик. Для определения данных характеристик вычисляется усреднённая по времени степень взаимной синхронизации для каждой пары i и j осцилляторов сети

$$R_{ij} = \left| \lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta T} \int_T^{T+\Delta T} e^{i(\phi_i(t) - \phi_j(t))} dt \right|. \quad (20)$$

Значение каждого элемента в получившейся матрице \mathbf{R} ограничено интервалом $[0, 1]$, где $R_{ij} = 1$, когда осцилляторы i и j синхронизированы, то есть разность фаз $\phi_i(t) - \phi_j(t) = \text{const}$. После измерения степени взаимной синхронизации между осцилляторами строится новая матрица $\tilde{\mathbf{R}}$, элементы которой принимают значение $\tilde{R}_{ij} = 1$, когда осцилляторы i и j синхронизированы, или $\tilde{R}_{ij} = 0$ в противном случае. На основе элементов получившейся таким образом матрицы $\tilde{\mathbf{R}}$ вычисляются новые параметры R_{link} и P_C . Первый из них определяет долю синхронизированных пар осцилляторов сети, между которыми существует соединение, то есть характеризует меру синхронизации элементов сети с учётом топологии соединений

$$R_{\text{link}} = \frac{1}{N_L} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \tilde{R}_{ij}, \quad N_L = \sum_{i,j=1}^N \frac{a_{ij}}{2}, \quad (21)$$

Таблица. Классификация динамических состояний сети (18)

Table. Classification of dynamic network states (18)

Состояние сети	$\langle R_1 \rangle$	$\langle R_2 \rangle$	R_{link}	P_C
Глобальная синхронизация	1	1	1	1
Один кластер (<i>splay state</i>)	~ 0	~ 0	1	1
Один кластер (<i>antipodal state</i>)	~ 0	1	1	1
Мультикластерные состояния (<i>splay state</i>)	~ 0	~ 0	(0, 1)	1
Мультикластерные состояния (<i>antipodal state</i>)	~ 0	(0, 1)	(0, 1)	1
Химерные состояния	~ 0	~ 0	(0, 1)	(0, 1)
Асинхронное поведение	~ 0	~ 0	0	0

где N_L – общее число соединений в сети, a_{ij} – матрица связности, определяющая топологию соединений сети. Для того чтобы различить состояния, когда в сети существуют несколько групп элементов с когерентным поведением, от химерных состояний, вводится параметр

$$P_C = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \max_j \{ \tilde{R}_{ij} \}, \quad (22)$$

который характеризует долю элементов сети, принадлежащих к некоторому синхронному множеству элементов вне зависимости от её топологии. Вычисление P_C фактически сводится к определению количества столбцов (или строки) матрицы $\tilde{\mathbf{R}}$, элементы которых содержат ненулевые значения. Согласно определению, выполнение условия $0 < P_C < 1$ указывает на формирование химерного состояния в сети. Совместный анализ значений характеристик (20), (21) и (22) позволяет идентифицировать динамические состояния адаптивной сети, классификация которых приведена в Таблице.

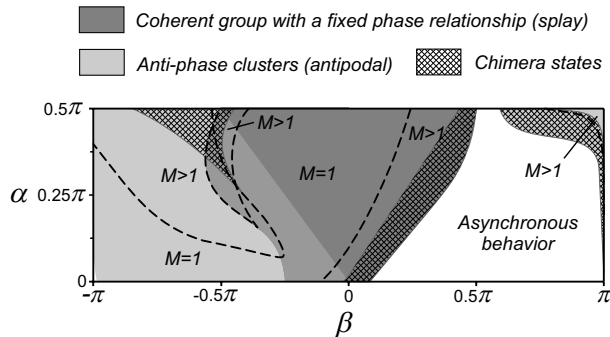


Рис. 9. Диаграмма, иллюстрирующая распределение динамических состояний системы (18) на плоскости параметров (β, α) . Области с различным типом синхронного поведения возникающих кластеров обозначены цветом. Пунктирная линия разделяет области существования состояний, характеризующихся различным числом кластеров M . Штриховкой выделены области существования химерных состояний. Значения параметров: $\varepsilon = 0.01$. Модифицировано из [31]

Fig. 9. Diagram of dynamical states of system (18) in the (β, α) parameter plane. Regions with different properties of synchronous behavior of emerging clusters are indicated by color. Dotted lines separate regions with different numbers M of clusters. Chimera states are cross hatched. Parameter values: $\varepsilon = 0.01$. Modified from [31]

В случае формирования в сети химерных состояний или нескольких когерентных групп с различными характеристиками для определения свойств синхронного поведения проводился дополнительный анализ частотных характеристик сети, включая вычисление средних частот осцилляторов

$$\langle \Omega_i \rangle = \lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta T} \int_T^{T+\Delta T} \dot{\phi}_i dt$$

и величин отклонения мгновенной частоты осцилляторов от их среднего значения

$$\sigma_i = \sqrt{\langle (\dot{\phi}_i - \langle \Omega_i \rangle)^2 \rangle},$$

где $\langle \cdot \rangle$ обозначает усреднение по времени. На рис. 9 представлена диаграмма, иллюстрирующая зависимость типа решений, сценариев формирования и свойств синхронного поведения мультикластерных состояний адаптивной сети (18) в зависимости от параметров α и β .

Эта диаграмма была получена на основе усреднения серии двухпараметрических зависимостей характеристик (20), (21) и (22), вычисленных для различных наборов начальных условий.

В работе [31] описаны сценарии самоорганизации, приводящие к формированию в адаптивных сетях с глобальной начальной структурой соединений сложных синхронных паттернов. Независимо от конкретных характеристик конечных состояний сети механизмы их формирования имеют общую особенность, а именно последовательное иерархическое формирование новых «плотно» связанных групп осцилляторов, сопровождающееся соответствующим появлением в каждой группе синхронной динамики. Эти группы возникают на разных временных масштабах, а их размер уменьшается на каждом последующем этапе эволюции сети. Обнаружено, что в зависимости от свойств функции пластичности связей можно выделить два основных сценария иерархической организации синхронного поведения, в результате которых формируются принципиально различные финальные состояния сети.

В первом случае сеть разбивается на конечное число синхронных групп, элементы которых имеют различные частотные характеристики. Пример такого процесса приведен на рис. 10. В сети

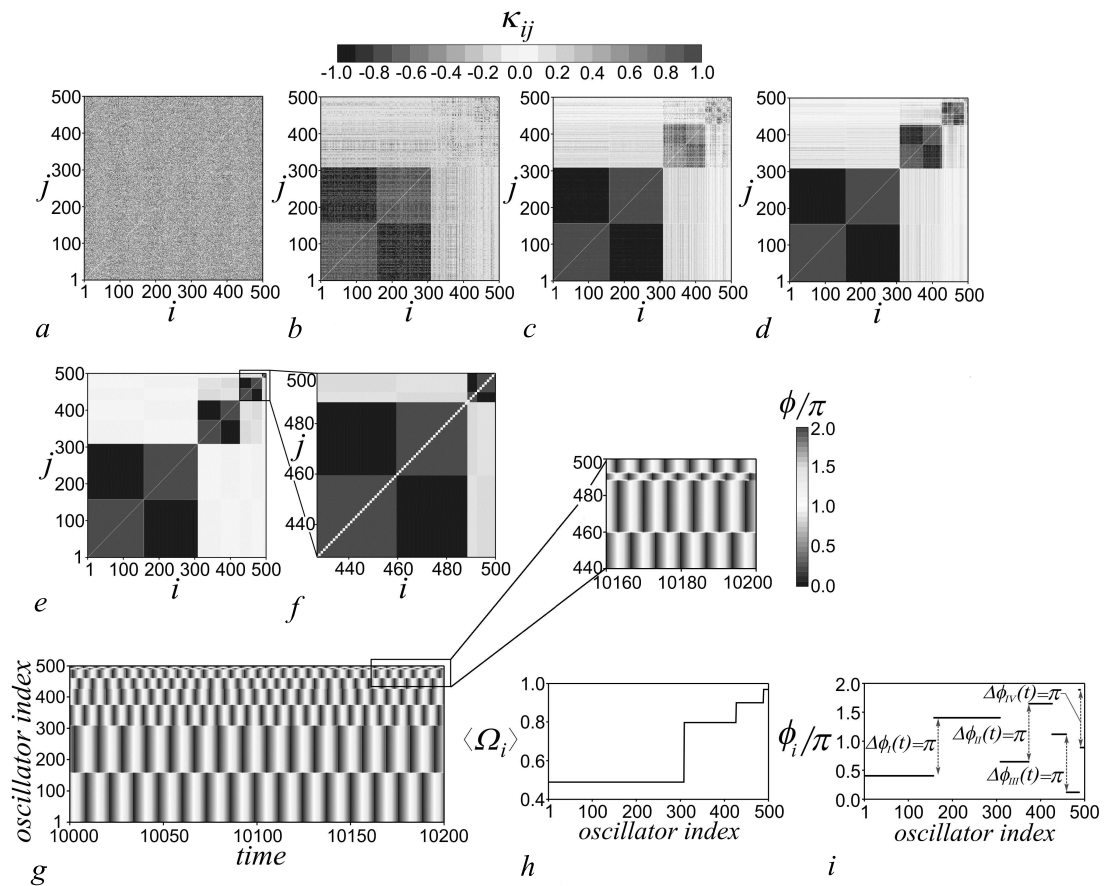


Рис. 10. Иерархическое формирование мультикластерного состояния в системе (18). *a-f* – вид матрицы связей κ_{ij} на различных стадиях формирования синхронных паттернов: $t=0$ (*a*), 200 (*b*), 350 (*c*), 500 (*d*), $t=100004$ (*e* and *f*); *g* – эволюция фаз осцилляторов $\phi_i(t)$ в финальном состоянии; *h* – распределение средних частот осцилляторов; *i* – мгновенное распределение фаз осцилляторов при $t = 10010$. Значения параметров: $\varepsilon = 0.01$, $\alpha = 0.3\pi$, $\beta = -0.53\pi$, $N = 500$. Модифицировано из [31]

Fig. 10. Hierarchical formation of multicluster state in the system (18). *a-f* – Coupling matrix κ_{ij} at different stages of emergence of synchronization patterns: $t = 0$ (*a*), 200 (*b*), 350 (*c*), 500 (*d*), 100004 (*e* and *f*); *g* – dynamics of phases $\phi_i(t)$ in the final state; *h* – average frequencies of oscillators; *i* – phase snapshot of the oscillators at $t = 10010$. Parameter values: $\varepsilon = 0.01$, $\alpha = 0.3\pi$, $\beta = -0.53\pi$, $N = 500$. Modified from [31]

со случайными начальными условиями (рис. 10, *a*) появляется группа элементов, которые быстро синхронизируются (в данном случае группа представляет собой два противофазных кластера). Первоначально возникающая группа характеризуется сильными межэлементными связями внутри группы (рис. 10, *b*) на фоне относительно слабого взаимодействия с остальными элементами сети. Далее в оставшейся некогерентной части сети формируется вторая синхронная группа (рис. 10, *c*), которая также характеризуется сильным взаимодействием между элементами внутри группы. В то же время этот процесс сопровождается подавлением связей между элементами групп, образовавшихся на разных этапах эволюции сети. Подобные процессы продолжают в некогерентной части сети до тех пор, пока сеть не достигнет конечного мультикластерного состояния (рис. 10, *e-i*). Согласно второму сценарию, процесс образования новых синхронных групп может прекратиться на некотором этапе эволюции сети (рис. 11). В результате система демонстрирует химерное состояние, в котором часть осцилляторов сети образует одну или несколько синхронных групп, в то время как остальные осцилляторы остаются не синхронизованными (рис. 11, *e-g*). Формирование химерных состояний сопровождается аналогичными структурными изменениями (рис. 11, *b-d*): взаимодействия между элементами различных групп подавляются, оставаясь относительно сильным в рамках отдельных групп.

Процесс подавления связей между синхронными группами можно проиллюстрировать на примере мультикластерного режима, характеризуемого когерентными состояниями с фиксированными соотношениями фаз внутри различных частотных кластеров (групп). Так как для данного мультикластерного режима частоты осцилляторов фиксированы, из второго уравнения

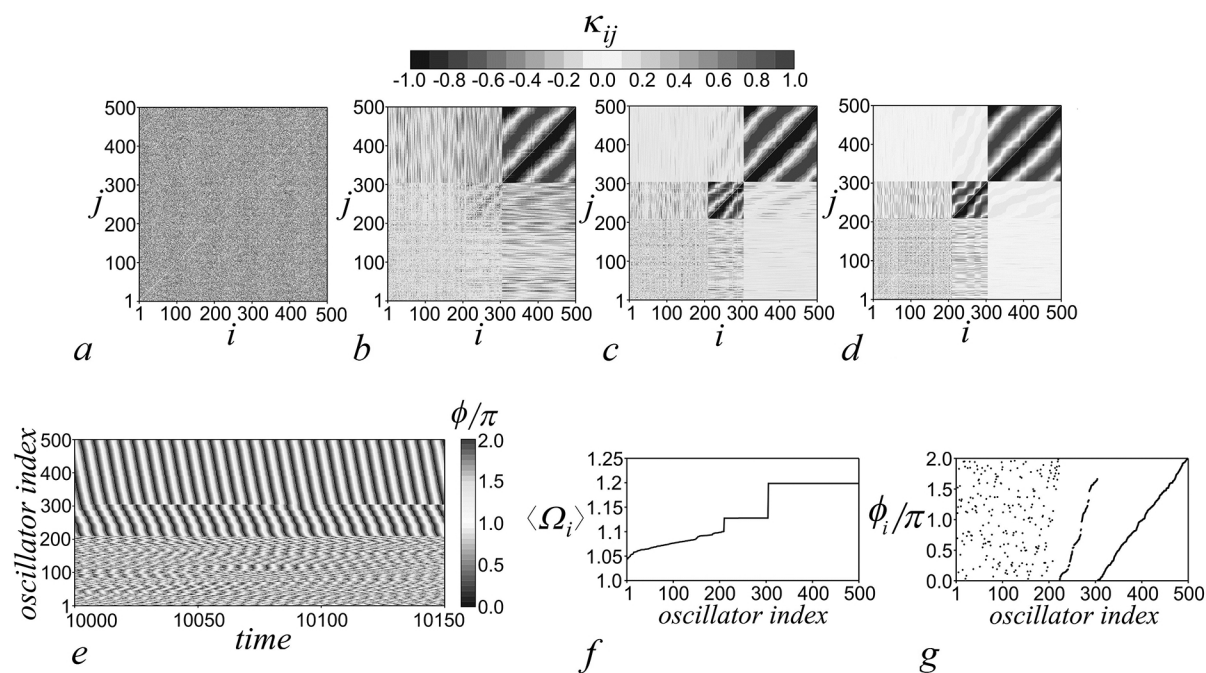


Рис. 11. Иерархическое формирование химерного состояния в системе (18). *a-d* – вид матрицы связей κ_{ij} на различных стадиях формирования химерного состояния: $t = 0$ (*a*), 350 (*b*), 1500 (*c*), 10000 (*d*); *e* – эволюция фаз осцилляторов $\phi_i(t)$ в финальном состоянии; *f* – распределение средних частот осцилляторов; *g* – мгновенное распределение фаз осцилляторов при $t = 10050$. Значения параметров: $\varepsilon = 0.01$, $\alpha = 0.3\pi$, $\beta = -0.53\pi$, $N = 500$. Модифицировано из [31]

Fig. 11. Hierarchical formation of a chimera state in the system (18). *a-d* – Coupling matrix κ_{ij} at different stages of emergence of a chimera state: $t = 0$ (*a*), 350 (*b*), 1500 (*c*), 10000 (*d*); *e* – dynamics of phases $\phi_i(t)$ in the final state; *f* – average frequencies of oscillators; *g* – phase snapshot of the oscillators at $t = 10050$, indicating traveling waves within the two coherent clusters. Parameter values: $\varepsilon = 0.01$, $\alpha = 0.3\pi$, $\beta = 0.3\pi$, $N = 500$. Modified from [31]

системы (18) вытекает следующий закон изменения во времени коэффициентов связи между двумя осцилляторами i и j , принадлежащими разным синхронным группам:

$$\kappa_{ij}(t) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta\Omega_{ij}^2}} \sin(\Delta\Omega_{ij}t - \chi_{ij} + \xi), \quad (23)$$

где $\xi = \phi_i(0) - \phi_j(0) + \beta$, $\cos \chi_{ij} = \varepsilon / \sqrt{\varepsilon^2 + \Delta\Omega_{ij}^2}$, а $\Delta\Omega_{ij} = \Omega_i - \Omega_j$ – разность частот осцилляторов. Согласно полученному закону эволюции связей (23), сила взаимодействия между элементами различных синхронных групп уменьшается с увеличением разности значений их частот. Появление синхронных групп с размерами, упорядоченными в соответствии с определённой иерархией, обеспечивает существенное различие частот осцилляторов разных групп (см. ниже рис. 11, f) и, соответственно, подавление взаимодействия между группами. Эта зависимость объясняет процесс формирования сетевых состояний, обеспечивающих сосуществование нескольких групп синхронизированных элементов, слабо взаимодействующих между собой за счёт относительно большой разности частот между осцилляторами возникающих групп. Данная зависимость была также подтверждена численно [31], в том числе и для более общего случая, когда частоты осцилляторов различных групп изменяются во времени.

В работе [32] предложено аналитическое описание однокластерных и мультикластерных решений, обнаруженных ранее в системе (18), а также представлены результаты исследования их устойчивости. В частности, продемонстрировано хорошее соответствие аналитических и численных результатов исследования областей существования однокластерных режимов в системе (18). Исследование влияния на динамику адаптивной сети параметра ε , определяющего временной масштаб изменения связей, представлено в работе [33]. На примере двух частотных кластеров показано, что параметр ε также имеет важное значение для формирования в адаптивной сети (18) мультикластерных состояний. В рассматриваемом примере аналитически получено критическое значение $\varepsilon_c = \varepsilon(\alpha, \beta)$, выше которого мультикластерные решения перестают существовать.

1.7. Влияние начальной архитектуры межэлементных связей на формирование сложных синхронных состояний. Обсуждаемые в обзоре до настоящего момента эффекты коллективного поведения, связанные с наличием адаптивных связей, преимущественно рассматривались в рамках сетей с глобальной топологией соединений, когда каждый осциллятор сети взаимодействует со всеми остальными осцилляторами. При этом, как показали работы [30, 31, 33], одним из важных следствий адаптивности связей является изменение структурных свойств сети, сопровождающееся возникновением модульной иерархической структуры. В результате такой эволюции сети часть связей принимает значения, близкие к нулю, то есть соединения между отдельными осцилляторами «исчезают». В этой связи возникает вопрос о том, как влияет на процессы формирования синхронного поведения и структурообразования начальная (базовая) топология соединений в сетях с адаптивными связями. Изучению данного вопроса были посвящены работы [34, 35]. При описании динамики сети в этих случаях начальная топология соединений учитывалась благодаря введению в уравнение для фаз осцилляторов матрицы связности $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$, построенной по соответствующим законам. Динамическая система, описывающая поведение адаптивных сетей, принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_i}{dt} &= \omega - \frac{1}{N_i} \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij} \kappa_{ij} \sin(\phi_i - \phi_j + \alpha), \\ \frac{d\kappa_{ij}}{dt} &= -\varepsilon(\sin(\phi_i - \phi_j + \beta) + \kappa_{ij}). \end{aligned} \quad (24)$$

В системе (24) элементы матрицы связности $a_{ij} = a_{ji} = 1$, когда между осцилляторами i и j имеется соединение, и $a_{ij} = a_{ji} = 0$ в противном случае. Величина N_i характеризует степень

i -го узла сети и определяется как число соединений осциллятора i с остальными осцилляторами сети $N_i = \sum_j a_{ij}$. В работе [34] изучена динамика сети (24), начальная топология которой формировалась случайным образом и характеризовалась различной плотностью соединений (средней степенью узла сети). Сравнительный анализ диаграмм динамических состояний для сетей со случайной и глобальной топологиями в [34] позволил установить изменения, возникающие при варьировании начальной структуры сети. В частности, уменьшение плотности соединений приводит к тому, что вне зависимости от характеристик функции пластичности в системе начинает преобладать второй сценарий, согласно которому процесс иерархической организации сложных синхронных состояний останавливается на определенном этапе формирования новых групп, в результате чего в системе образуются химерные состояния. В отличие от глобальной сети, множества элементов, образующих когерентные группы, формируются постепенно в течение достаточно длительного времени и могут существенно перестраиваться в процессе эволюции сети. При этом данный процесс имеет ряд особенностей в случае сетей с низкой плотностью межэлементных соединений. В этом случае преимущественно формируются состояния, в которых наряду с когерентными и некогерентными группами существуют подмножества, различные элементы которых могут быть синхронизированы друг с другом на достаточно длительные периоды времени. Структура таких подмножеств элементов, между которыми существует взаимная синхронизация, медленно изменяется во времени.

Другой тип начальной топологии рассматривается в работе [35], где анализируют динамику кольцевой сети фазовых осцилляторов с нелокальными адаптивными связями. Матрица связности, определяющая топологию кольца с нелокальными связями, задается следующим образом:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{для } 0 < (i - j) \bmod N \leq P, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (25)$$

Условие (25) означает, что любые два осциллятора связаны, если их индексы i и j различаются не более чем на величину P , обозначающую радиус связи. Показано, что в сети (24) при условии (25) наблюдаются однокластерные и мультикластерные состояния, аналогичные тем, о которых сообщалось при обзоре работ [30–33] в разделе 1.6 для сетей с глобальной начальной топологией связей. Однако есть важные отличия у таких состояний, вызванные наличием кольцевой структуры связей. В частности, оказалось, что группы осцилляторов с одинаковыми средними частотами могут быть не связаны между собой. Поэтому, чтобы учесть особенности, обусловленные сложной начальной топологией, было введено новое определение частотного кластера как подмножества связанных между собой частотно синхронизованных осцилляторов. Другой эффект, связанный с кольцевой начальной топологией сети, касается иерархического упорядочения размеров кластеров. Для возникновения мультикластерных состояний в глобально связанных сетях необходима достаточно большая разница в размерах возникающих кластеров. В случае кольцевой структуры такая иерархия размеров кластеров больше не является критической. В частности, найдены мультикластерные состояния с одним большим и множеством меньших, близких по размеру кластеров. Простое объяснение появления кластеров схожего размера основано на том факте, что такие кластеры могут быть в рамках начальной топологии не связаны между собой и, следовательно, не синхронизированы. Напротив, в сетях с глобальной базовой структурой похожие кластеры, как правило, синхронизируются и объединяются в один более крупный кластер. Ещё одной особенностью поведения адаптивной сети (24) с кольцевой структурой являются так называемые уединенные состояния. Они являются частными случаями мультикластерных состояний с большой группой синхронизованных по частоте осцилляторов (фоновый кластер) и отдельными уединенными осцилляторами с частотой, отличной от частоты фонового кластера, то есть кластерами, состоящими только из одного элемента.

1.8. Синхронные паттерны в сетях с конкурирующими взаимодействиями. Другая модель адаптивной сети, в рамках которой также возможно формирование сложных синхронных паттернов с модульной структурой, описана в работах [37, 38]. Система представляет собой сеть из N фазовых осцилляторов, в которой каждый осциллятор i взаимодействует с K произвольно выбранными осцилляторами, образуя множество \mathcal{N}_i . Динамика осцилляторов задаётся уравнением

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i - \lambda \sum_{j \in \mathcal{N}_i} w_{ij} \sin(\phi_i - \phi_j), \quad (26)$$

где ω_i – случайно выбранные из интервала $[-\pi, \pi]$ собственные частоты осцилляторов, λ – сила связи, а w_{ij} – неотрицательный весовой коэффициент (вес) связи, характеризующий воздействие j -го осциллятора на i -й. В начальный момент времени фазы осцилляторов случайно распределены в интервале $[-\pi, \pi]$, а все веса принимаются равными $1/K$. Эволюция весов w_{ij} определяется следующим образом [37]

$$\frac{dw_{ij}}{dt} = p_{ij} - \left(\sum_{j \in \mathcal{N}_i} p_{ij} \right) w_{ij}, \quad (27)$$

где p_{ij} характеризует локальную корреляцию фаз между i -м и j -м осцилляторами в течение характерного времени памяти T и определяется как

$$p_{ij} = \frac{1}{T} \left| \int_{-\infty}^t e^{-(t-t')/T} e^{i[\phi_i(t') - \phi_j(t')]} dt' \right|. \quad (28)$$

Сумма весов всех входящих связей для каждого узла поддерживается постоянной, то есть в каждый момент времени справедливо условие нормализации $\sum_{j \in \mathcal{N}_i} w_{ij} = 1$.

В работе [38] рассмотрена модификация модели связи (27) следующего вида

$$\frac{dw_{ij}}{dt} = w_{ij}(t) \left[s_i p_{ij}^T(t) - \sum_{l=1}^N w_{il}(t) p_{il}^T(t) \right], \quad (29)$$

где s_i характеризует общую силу входных связей i -го узла, $s_i = \sum_{j=1}^N w_{ij}$, а $p_{ij}^T(t)$ характеризует степень локальной синхронизации между осцилляторами i -м и j -м, усреднённую на интервале времени T

$$p_{ij}^T(t) = \frac{1}{T} \left| \int_{t-T}^t e^{i[\phi_i(t') - \phi_j(t')]} dt' \right|. \quad (30)$$

Величина T в моделях (27) и (29) определяет характерное время памяти системы, используемое каждым осциллятором в процессе перестроения взаимодействий, и является наряду с λ одним из основных контрольных параметров рассматриваемых адаптивных сетей. Заметим, что в отличие от рассматриваемых здесь адаптационных механизмов, зависящих от памяти системы, в работах [39, 40] рассмотрены модели связей, использующих мгновенную степень фазовой корреляции p_{ij} между осцилляторами.

В основу моделей адаптивных связей (27) и (29) заложены два конкурирующих механизма: правило обучения Хебба (усиление связей между синхронными узлами сети) и гомеостаз (доступные ресурсы для поддержания узлом связей с другими узлами сети ограничены). Конкурирующие механизмы описываются соответственно первым и вторым слагаемым в правой части

уравнений (27) и (29). Когда первое слагаемое больше, чем второе, преобладает первый механизм, ассоциированный с правилом Хебба и обеспечивающий усиление связи. В противном случае, второй адаптивный механизм, обеспечивающий поддержание динамического равновесия, будет приводить к снижению силы связи.

Влияние адаптивной связи на процессы синхронизации в сетях (26), (27) и (26), (29) проанализировано на основе параметров порядка, характеризующих степень глобальной и локальной синхронизации взаимодействующих осцилляторов. Для оценки меры глобальной синхронизации сети вычисляется усреднённый параметр порядка

$$r = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t N} \int_{t_s}^{t_s + \Delta t} \left| \sum_{i=1}^N e^{i\phi_i(t')} dt' \right|, \quad (31)$$

где t_s – время, через которое система приходит к асимптотическому состоянию, Δt – достаточно большой интервал времени наблюдения. Параметр, характеризующий меру локальной синхронизации для осцилляторов, между которыми имеются соединения, определяется как

$$r_{\text{link}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} w_{ij} r_{ij}, \quad (32)$$

где

$$r_{ij} = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \left| \int_{t_s}^{t_s + \Delta t} e^{i[\phi_i(t') - \phi_j(t')]} dt' \right|$$

обозначает усреднённую меру синхронизации между i -м и j -м осцилляторами сети. Анализ зависимостей характеристик r и r_{link} от параметров λ и T позволил обнаружить ряд интересных результатов (рис. 12, *a, b*), раскрывающих особенности формирования синхронного поведения и связанных с этим процессом структурных изменений в рамках рассматриваемых моделей адаптивной сети. Для больших значений T характеристики r и r_{link} зависят только от параметра λ , достигая величин, близких к единице, после превышения некоторого критического значения λ_c . До достижения данного значения с ростом λ характеристика r_{link} растёт гораздо быстрее, чем r , что свидетельствует о появлении модульной структуры, когда сеть разбивается на несколько связанных между собой модулей с более высокой плотностью соединений. Для более глубокого понимания свойств модульной структуры сети используется дополнительная характеристика связности модулей MC (рис. 12, *c*) определяемая как

$$MC = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^M \sum_{i,j \in \mathcal{C}_\mu} w_{ij},$$

где \mathcal{C}_μ – подмножество элементов сети, образующих μ -й модуль, M – количество модулей, на которые разделена сеть. MC характеризует долю всех связей сети, которая используется для соединения узлов, принадлежащих одному модулю, и может принимать значения в интервале $[0, 1]$. Случай $MC = 1$ отвечает ситуации, когда сеть разбита на несвязанные между собой компоненты (модули).

Показано, что с ростом λ наблюдается постепенное разбиение сети на несколько связанных между собой модулей (рис. 12, *e*), которые увеличиваются по размеру. Эволюция структуры сети при увеличении λ отражается также на распределении весов, которое имеет выраженный степенной характер для малых значений λ (рис. 12, *d*). Увеличение связи λ приводит к распаду сети на несколько независимых модулей, а также разрушению степенного распределения весов, в котором появляется ярко выраженный максимум. При $\lambda > \lambda_c$ характеристики r и r_{link} достигают максимальных значений и все осцилляторы объединяются в один синхронный модуль (рис. 12, *f*).

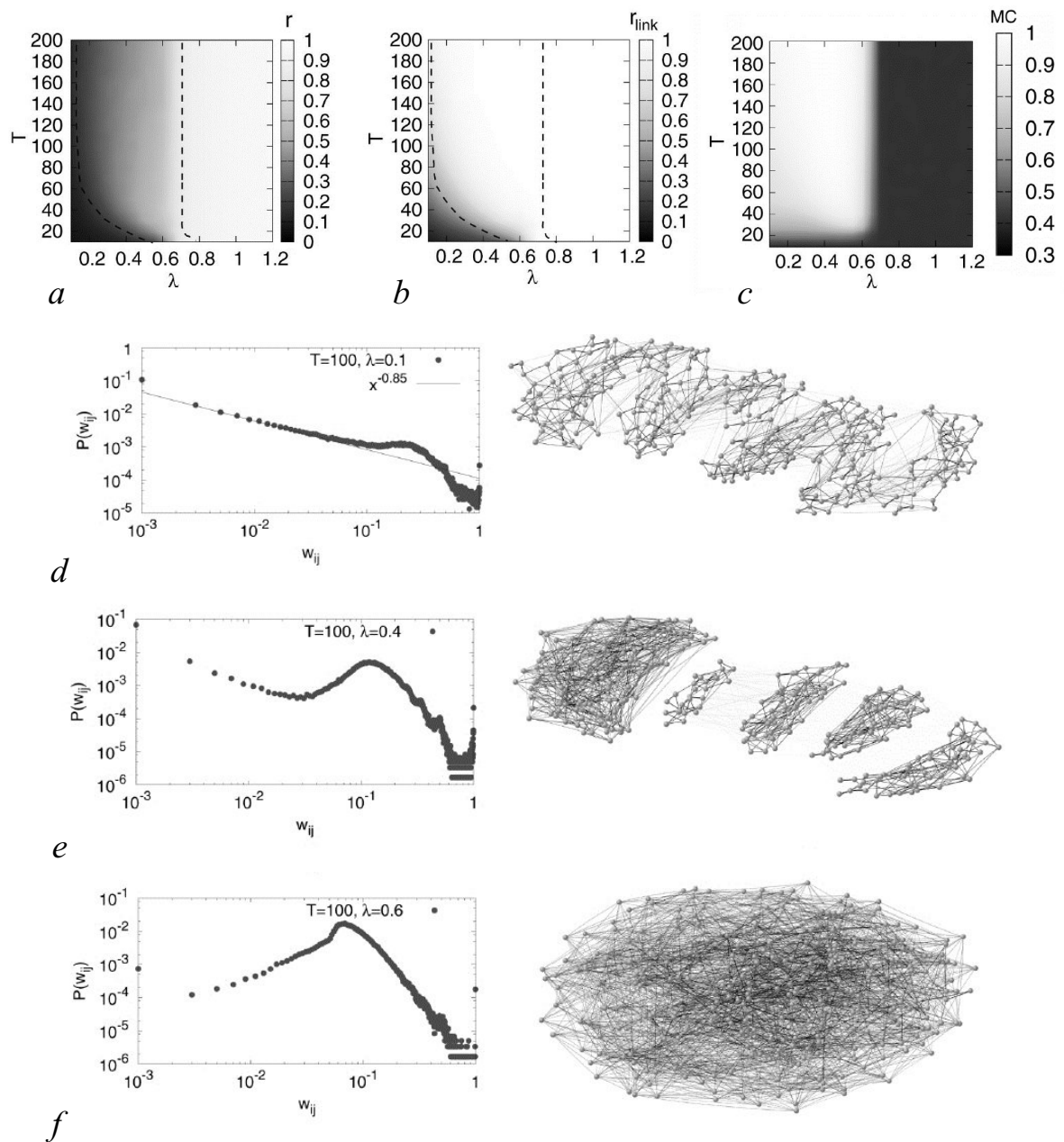


Рис. 12. Зависимости усреднённых значений параметров глобальной r (a) и локальной r_{link} (b) синхронизации, а также характеристики связности модулей MC (c) в сети (26), (29) для $N = 300$ от параметров λ и T . Структура сети и соответствующие распределения весовых коэффициентов в системе (26), (29) при фиксированном значении $T = 100$ для различных значений λ : 0.1 (d), 0.4 (e), 0.6 (f). Модифицировано из [38]

Fig. 12. The average value of global r (a) and local r_{link} (b) synchronization parameters, and the value of the modular cohesion MC (c) as a function of λ and T . Network structure and corresponding distributions of weight coefficients in the system (26), (29) for a fixed parameter $T = 100$ and different values of λ : 0.1 (d), 0.4 (e), 0.6 (f). The network size $N = 300$. Modified from [38]

1.9. Блуждающие химерные состояния в адаптивной сети с импульсными взаимодействиями. В [41] рассмотрена модель сети импульсно связанных фазовых осцилляторов с адаптивными связями. Данная сеть была построена на основе модели (18), где наряду с адаптивными механизмами связей вводится импульсный характер взаимодействий между элементами. Динамика сети описывается системой уравнений

$$\begin{aligned}\frac{d\phi_i}{dt} &= \omega + \frac{1}{N} \sum_{j=1, j \neq i}^N \kappa_{ij} \Gamma(\phi_i) \sum_{t_j} \delta(t - t_j), \\ \frac{d\kappa_{ij}}{dt} &= \varepsilon \left(\kappa_{ij} + \Pi(\phi_i) \sum_{t_j} \delta(t - t_j) \right).\end{aligned}\quad (33)$$

Здесь $\phi_i \in [0, 2\pi]$ – фаза i -го осциллятора, κ_{ij} – сила связи от j -го осциллятора к i -му, $\Gamma(\phi)$ – кривая фазового отклика, а функция $\Pi(\phi_i)$ определяет правило адаптации связей. В отсутствие связей каждый осциллятор имеет одинаковую собственную частоту $\omega = 1$, и его фаза равномерно растет, а когда достигает значения 2π , фаза сбрасывается до нуля, и осциллятор излучает импульс. Отличительной особенностью модели (33) является импульсный характер взаимодействий между осцилляторами. Осциллятор i сети получает воздействие со стороны j -го осциллятора сети, с которым существует соединение, лишь в моменты времени t_j , когда j -й осциллятор генерирует импульс. Каждый импульс вызывает мгновенный сдвиг фазы i -го осциллятора $\Delta \phi_i = \kappa_{ij} \Gamma(\phi_i)$. Кривая фазового отклика выбрана в виде $\Gamma(\phi) = \sin(\phi + \alpha)$, где α – параметр фазового сдвига. Каждый импульс, генерируемый осциллятором j , также приводит к мгновенному изменению его связи со всеми другими осцилляторами на величину $\Delta \kappa_{ij} = \Pi(\phi_i)$. Зависимость величины изменения силы связи от текущего значения фазы соответствующего осциллятора определяет функция пластичности $\Pi(\phi) = \sin(\phi + \beta)$, где β – параметр, контролирующий вид функции пластичности. В интервале между двумя последовательными импульсными воздействиями значение фазы осциллятора равномерно нарастает, а величины соответствующих коэффициентов связи экспоненциально стремятся к нулю.

Показано, что наличие адаптивности связей и импульсного характера взаимодействий между элементами в модели (33) приводит как к формированию мультикластерных и химерных состояний, подобных наблюдаемым ранее в системе (18), так и к появлению нового типа динамического поведения – метастабильных химероподобных состояний, в которых часть элементов сети демонстрирует когерентное поведение в форме нескольких фазовых кластеров, состав и размер которых изменяется с течением времени. Пример пространственно-временной диаграммы, иллюстрирующей эволюцию когерентных и некогерентных областей в случае такого поведения сети приведен на рис. 13, а. Светлые области обозначают множество элементов, демонстрирующих синхронное поведение, а черным цветом выделены области с некогерентным поведением элементов сети. Построение данной диаграммы было проведено на основе сравнительного анализа матриц коэффициентов взаимной синхронизации (20), вычисляемых для всех пар осцилляторов сети на различных временных интервалах. Осцилляторы сети демонстрируют спонтанные переключения между когерентной и некогерентной областями, тем самым осуществляя переходы между метастабильными состояниями сети. В данный процесс вовлечены все осцилляторы сети, но времена переключения для различных осцилляторов отличаются. Перестраиваясь, фазовые кластеры, которые образуют так называемое когерентное «ядро» химерного состояния, спонтанно изменяют свое положение, или «блуждают» по сети, поэтому данный режим получил название «блуждающая химера».

Изучены основные характеристики блуждающих химер, определяющие изменение размера M и состава их когерентного ядра. Анализ процесса эволюции когерентного ядра показал наличие ярко выраженных колебаний его размера около некоторого среднего значения (рис. 13, б).

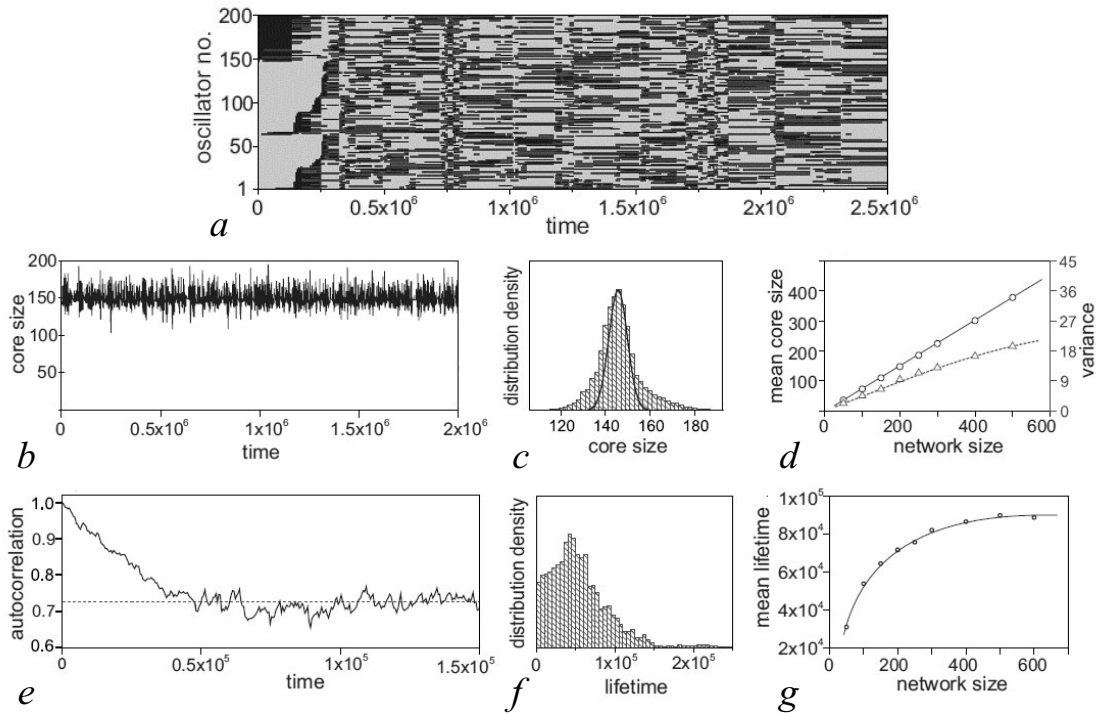


Рис. 13. «Блуждающая химера» в сети (33). *a* – Эволюция когерентной и некогерентной областей блуждающей химеры для $N = 200$. *b* – Временная зависимость размера когерентного ядра для $N = 200$. *c* – Распределение размера когерентного ядра блуждающей химеры. Линия на графике отвечает случаю нормального распределения. *d* – Среднее значение (сплошная линия) и дисперсия (пунктирная линия) когерентного ядра в зависимости от размера сети. *e* – Автокорреляционная функция для $N = 200$. *f* – Распределение времен жизни узлов в когерентной области для $N = 200$. *g* – Среднее время жизни в когерентной области в зависимости от размера сети. Значения параметров: $\varepsilon = 0.01$, $\alpha = 1.4$, $\beta = 4.94$. Модифицировано из [41]

Fig. 13. Itinerant chimera in the network (33). *a* – The evolution of the coherent and incoherent domains of itinerant chimera for $N = 200$. *b* – The chimera core size versus time for $N = 200$. *c* – Distribution of the core size for $N = 200$. Black solid line corresponds to the binomial distribution. *d* – The mean (solid line) and the variance (dashed line) of the core size versus the network size. *e* – Autocorrelation function of the core composition versus time for $N = 200$. *f* – Distribution of the nodes lifetimes in the core for $N = 200$. *g* – The mean lifetime versus the network size. The parameter values: $\varepsilon = 0.01$, $\alpha = 1.4$, $\beta = 4.94$. Modified from [41]

Эти колебания связаны с тем, что выход одного осциллятора из когерентной области не обязательно подразумевает его непосредственную замену другим. Проведен сравнительный анализ распределения размера ядра блуждающей химеры с нормальным распределением, соответствующим ситуации, когда переходы осцилляторов между когерентной и некогерентной областями являются статистически независимыми. Полученное распределение намного шире и имеет более тяжёлые «хвосты» по сравнению с нормальным (рис. 13, *c*), что объясняется возможностью совместного перехода относительно больших групп осцилляторов. Чтобы проиллюстрировать случайный характер переключения осцилляторов между когерентной и некогерентной областями, введена автокорреляционная функция, определяемая как

$$A(\tau) = \frac{1}{\langle M \rangle} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{i=1}^N u_i(t) u_i(t + \tau) dt, \quad (34)$$

где переменная $u_i(t)$ характеризует состояние i -го осциллятора сети в момент времени t и принимает значение $u_i(t) = 1$, если i -й осциллятор принадлежит к когерентной части сети, и $u_i(t) = 0$ в противном случае. Произведена оценки скорости перестроения (блуждания) ядра на

основании вида автокорреляционной функции (рис. 13, e), время спадания которой характеризует интервал, когда полностью исчезает «память» сети о начальной структуре ядра. Время спадания автокорреляционной функции практически совпадает со средним значением времени жизни осцилляторов сети в когерентном состоянии (см. рис. 13, f).

Изучено влияние на свойства блуждающих химер количества элементов, образующих сеть. В частности, установлено, что средний размер ядра растет линейно с увеличением размера сети, то есть в среднем сохраняется постоянным соотношение размеров областей с когерентным и некогерентным поведением осцилляторов сети. В то же время дисперсия размера ядра растет нелинейно, по-прежнему принимая большие значения по сравнению с прогнозируемым нормальным распределением. График на рис. 13, g иллюстрирует, что среднее время жизни ядра растет с увеличением размера сети, однако этот рост относительно медленный и имеет тенденцию к насыщению. В отличие от классических химер, наблюдаемых в сетях с фиксированными коэффициентами межэлементных связей, время жизни ядра которых экспоненциально возрастает с ростом числа элементов, в данном случае конечная скорость перестроения ядра сохраняется даже для больших сетей. Таким образом, установлено, что наблюдаемый процесс перестроения когерентного ядра не является эффектом конечного размера сети, а представляет собой характерную особенность коллективной динамики импульсно связанных осцилляторов с адаптивными связями.

2. Динамические процессы в адаптивных осцилляторных мультиплексных сетях

В предыдущей части обзора мы рассмотрели основные модели динамических связей и сетей взаимодействующих фазовых осцилляторов, построенных на их основе, а также проанализировали основные эффекты в динамике сетей, обусловленные наличием свойства адаптивности связей. При этом следует отметить, что большинство реальных сетевых систем обладают сложной структурой, включая многослойную и модульную организацию соединений, когда большие популяции элементов взаимодействуют между собой посредством связей различных типов. Типичным примером таких многослойных систем являются взаимосвязанные нейронные сети различных областей мозга, взаимодействующие посредством синаптических соединений различного типа, которые в том числе могут обладать адаптивными свойствами. Далее мы обсудим результаты недавних работ, посвящённых изучению взаимного влияния механизмов адаптации связей и многослойной организации сетей на процессы их коллективного поведения. Сразу отметим одну общую особенность данных работ, заключающуюся в рассмотрении частного случая – мультиплексной организации межслойных взаимодействий сети, когда каждый слой содержит один и тот же набор узлов, и межслойные соединения существуют только между соответствующими парами узлов соседних слоёв (рис. 14, a).

Пример такой мультиплексной сети, состоящей из $L = 2$ слоёв рассмотрен в работе [42]. Каждый слой представляет собой сеть из N идентичных адаптивно связанных фазовых осцилляторов, особенности коллективного поведения которой были проанализированы в разделе 1.6 (см. модель (18)). Динамика мультиплексной сети в случае произвольного числа слоёв L может быть описана системой уравнений

$$\begin{aligned}\frac{d\phi_i^{(l)}}{dt} &= \omega - \frac{1}{N} \sum_{j=1, j \neq i}^N \kappa_{ij}^{(l)} \sin \left(\phi_i^{(l)} - \phi_j^{(l)} + \alpha^{(ll)} \right) - \sum_{v=1, v \neq l}^L \sigma^{(lv)} \sin \left(\phi_i^{(l)} - \phi_j^{(v)} + \alpha^{(lv)} \right), \\ \frac{d\kappa_{ij}^{(l)}}{dt} &= -\varepsilon \left(\sin \left(\phi_i^{(l)} - \phi_j^{(l)} + \beta^{(l)} \right) + \kappa_{ij}^{(l)} \right).\end{aligned}\tag{35}$$

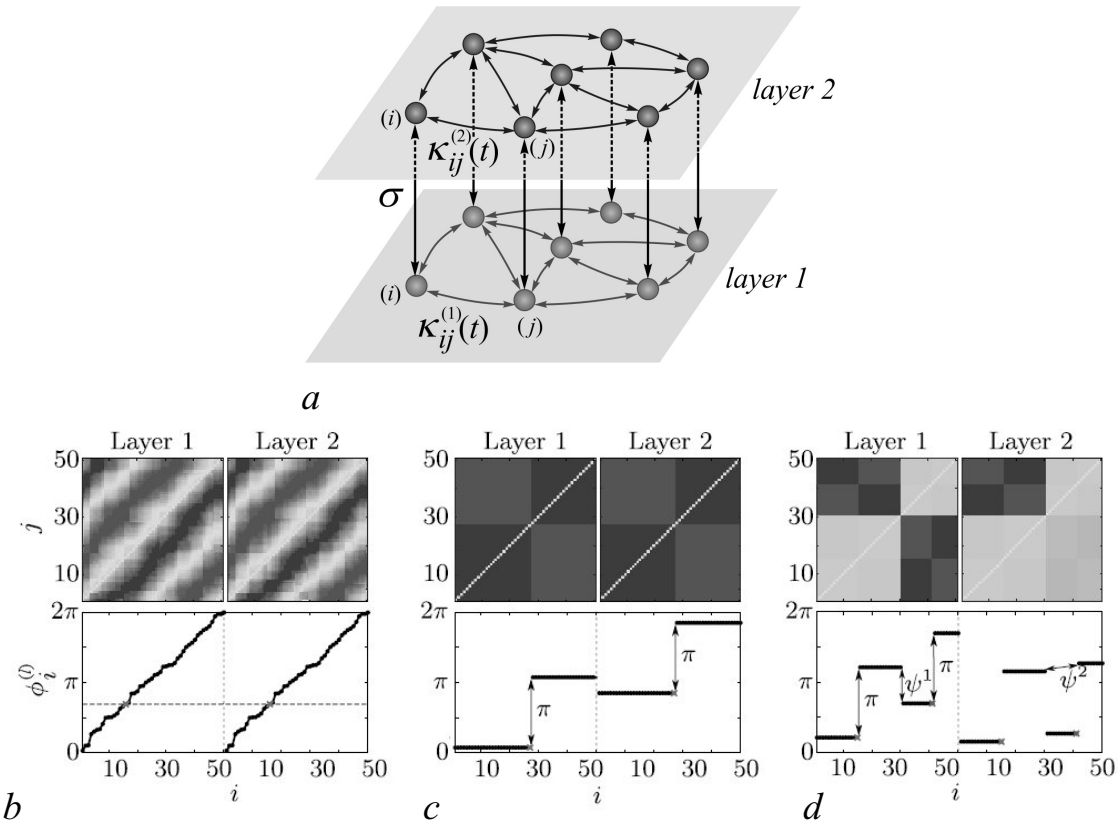


Рис. 14. *a* – Схематическое представление организации взаимодействий в двухслойной мультиплексной сети. *b–d* Различные типы однокластерных состояний формируемые в слоях мультиплексной сети (35) при $N = 50$, $L = 2$: *b* – когерентное состояние с фиксированным соотношением фаз между осцилляторами ($\alpha^{(11)/(22)} = \alpha^{(12)/(21)} = 0.3\pi$, $\beta^{(1)/(2)} = -0.1\pi$, $\sigma^{(12)/(21)} = 0.07$); *c* – противофазные кластеры ($\alpha^{(11)/(22)} = 0.2\pi$, $\beta^{(1)/(2)} = -0.95\pi$, $\alpha^{(12)} = 0.3\pi$, $\alpha^{(21)} = 0.75\pi$, $\sigma^{(12)/(21)} = 0.62$); *d* – две пары противофазных кластеров ($\alpha^{(11)} = 0.3\pi$, $\alpha^{(22)} = 0.2\pi$, $\beta^{(1)} = -0.1\pi$, $\beta^{(2)} = -0.95\pi$, $\alpha^{(12)/(21)} = 0.05\pi$, $\sigma^{(12)/(21)} = 0.28$). Другие параметры: $\varepsilon = 0.01$. Модифицировано из [42]

Fig. 14. *a* – Schematic organization of the interaction structure in a two-layer multiplex network. *b–d* – Different types of one-cluster states formed in the layers of a multiplex network (35) with $N = 50$, $L = 2$: *b* – splay type ($\alpha^{(11)/(22)} = \alpha^{(12)/(21)} = 0.3\pi$, $\beta^{(1)/(2)} = -0.1\pi$, $\sigma^{(12)/(21)} = 0.07$); *c* – antipodal type ($\alpha^{(11)/(22)} = 0.2\pi$, $\beta^{(1)/(2)} = -0.95\pi$, $\alpha^{(12)} = 0.3\pi$, $\alpha^{(21)} = 0.75\pi$, $\sigma^{(12)/(21)} = 0.62$); *d* – double antipodal type ($\alpha^{(11)} = 0.3\pi$, $\alpha^{(22)} = 0.2\pi$, $\beta^{(1)} = -0.1\pi$, $\beta^{(2)} = -0.95\pi$, $\alpha^{(12)/(21)} = 0.05\pi$, $\sigma^{(12)/(21)} = 0.28$). The other parameters: $\varepsilon = 0.01$. Modified from [42]

Изолированная динамика отдельного слоя мультиплексной сети (35) описывается динамической системой, эквивалентной (18), а следовательно, и соответствующие переменные имеют тот же смысл. Верхний индекс l обозначает номер слоя ($l = 1, \dots, L$), к которому принадлежит элемент, описываемый соответствующей переменной. Взаимодействие между слоями определяется последним слагаемым в первом уравнении системы (35). В отличие от адаптивных внутрислойных соединений $\kappa_{ij}^{(l)}$, связи между слоями являются фиксированными и их величина задаётся параметром $\sigma^{(lv)}$.

В разделе 1.6 было показано, что изолированная сеть в рамках отдельного слоя обладает огромным разнообразием динамических состояний, таких как мультикластерные частотные режимы и химероподобные состояния, которые были изучены численно и аналитически [30–32]. Мультикластерные состояния, в свою очередь, состоят из нескольких одиночных кластеров, которые определяют существование и стабильность таких состояний [33]. Одиночные кластеры представляют собой группы осцилляторов с одинаковой частотой, но различной фазовой динамикой (распределением фаз). В разделе 1.6 было отмечено, что выделяют три основных типа

фазовых распределений однокластерных состояний (см. рис. 8), однако в рамках адаптивной сети изолированного слоя реализуются только два из них – противофазные кластеры и когерентное состояние с фиксированным соотношением фаз между осцилляторами. Основное внимание в работе [42] было уделено обобщению знаний о формировании однокластерных состояний на случай мультиплексной двухслойной сети.

Обнаружено, что двухслойная мультиплексная сеть может демонстрировать поведение, при котором в слоях системы могут возникать однокластерные состояния, характеризуемые всеми тремя типами фазовых распределений (рис. 14, *b–d*). Таким образом, одним из эффектов мультиплексного взаимодействия является появление возможности формирования в слоях состояний, которые являются неустойчивыми или даже не существуют в одном изолированном слое. Ещё одним важным результатом работы [42] является предложенный метод анализа устойчивости однокластерных состояний двухслойной (дуплексной) системы, который позволяет свести данную задачу к анализу сети одного слоя (моноплексной). Предложенный метод анализа устойчивости посредством декомпозиции двухслойной мультиплексной сети может быть обобщен на случай многослойной системы, содержащей более чем два слоя.

Изучение системы (35) было продолжено в работе [43], где основное внимание было акцентировано на изучении влияния механизмов адаптации и мультиплексирования на процессы синхронизации химерных состояний в двухслойной сети. При этом наличие адаптивных внутрислойных связей позволило сгенерировать в изолированных слоях системы и соответственно рассмотреть взаимодействие химерных состояний, различающихся как числом и размером когерентных групп, так и частотными характеристиками когерентных и некогерентных множеств. Примеры таких химерных состояний представлены на рис. 15, *a–c*.

Обнаружено, что однонаправленное взаимодействие между слоями ($\sigma^{(21)} = 0$) всегда обеспечивает вынужденную синхронизацию химерных состояний. Как и в классическом случае вынужденной синхронизации регулярных сигналов, частоты осцилляторов ведомого слоя ($l = 1$) подтягиваются к частотам соответствующих осцилляторов ведущего слоя ($l = 1$). Процесс вынужденной синхронизации сопровождается трансформацией структуры взаимодействий внутри ведомого слоя, свойства которого становятся похожими на таковые для ведущего слоя системы. В этом случае сила межслойной связи $\sigma^{(12)}$, обеспечивающая синхронизацию, и значения фазовых сдвигов между осцилляторами слоев в основном зависят от того, насколько разными были частотные характеристики химерных состояний в слоях. В отличие от двухслойной сети со статическими связями [44] синхронизация, близкая к идентичной, возможна даже в случае взаимодействия химер с существенно разными структурными свойствами (количеством и размерами когерентных кластеров), образующимися из-за относительно большой расстройки параметров между слоями.

Также изучаются эффекты, возникающие при взаимном влиянии друг на друга слоёв адаптивно связанных осцилляторов $\sigma^{(12)} = \sigma^{(21)} = \sigma$. Данные процессы проанализированы для случаев, когда в начальный момент времени в различных слоях системы реализуются химерные состояния, характеризуемые различными размерами когерентных подмножеств элементов, числом образующих их синхронных кластеров, а также соотношениями частотных характеристик когерентной и некогерентной частей химерных состояний. Показано, что при взаимодействии химерных состояний с близкими свойствами, синхронизация динамики слоёв наблюдается даже в случае относительно слабой силы связи σ между слоями (рис. 15, *d*). При этом в каждом слое устанавливается химерное состояние, отличное от начальных состояний в сетях в отсутствие взаимодействия. При взаимном воздействии друг на друга слоёв, в которых реализуются состояния с существенно различающимися свойствами, обнаружены несколько новых сценариев поведения системы, отличающихся от наблюдаемых в двухслойной мультиплексной сети с фиксированными связями [45]. В зависимости от силы межслойного взаимодействия, поведение элементов различных слоёв может быть асинхронным, частично или полностью синхронизованным (рис. 15, *e*). Асинхронная динамика слоёв наблюдается в области слабых связей между слоями системы.

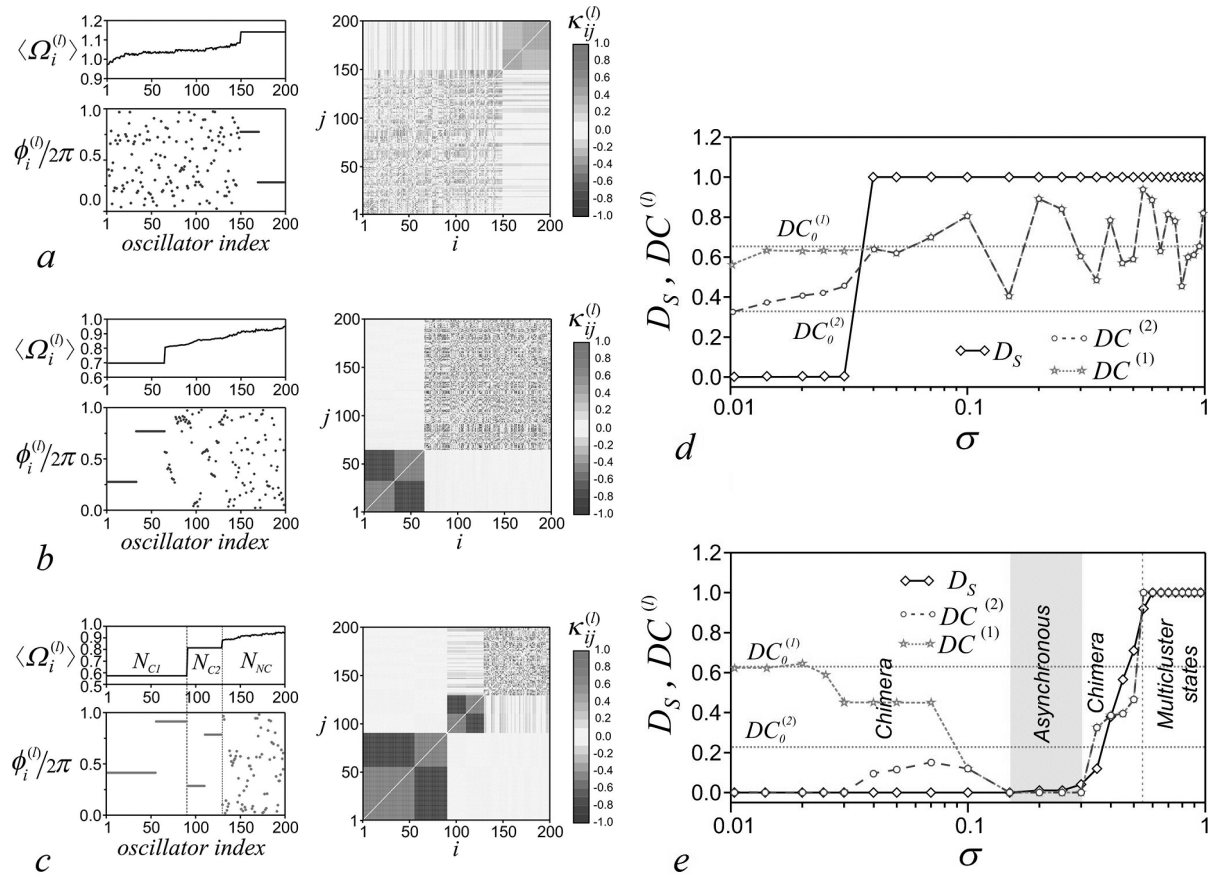


Рис. 15. *a-c* – Примеры химерных состояний, формируемых в изолированных слоях системы (35) при $N = 200$, $L = 2$ для различных $\beta^{(l)}$: 2.5 (*a*), 4.56 (*b*), 4.64 (*c*). Распределения средних значений частот и мгновенных значений фаз (слева) и матриц связей (справа), иллюстрирующие начальные состояния в слоях сети. *d-e* – Зависимости доли синхронизированных пар осцилляторов различных слоёв D_S от величины межслойных связей $\sigma^{(12)} = \sigma^{(21)} = \sigma$ для различных начальных условий. Химерные состояния на рис. 15, *b* и 15, *c* выбраны в качестве начальных условий для фрагмента *d* и химерные состояния на рис. 15, *a* и 15, *c* – для фрагмента *e*. Пунктирные линии указывают размер когерентной части химерных состояний в слое l системы в начальный момент времени $DC_0^{(l)}$ и при взаимодействии слоёв $DC^{(l)}$. Параметры: $\omega = 1$, $\varepsilon = 0.01$, $\alpha^{(11)/(22)} = 1.3$, $\alpha^{(12)/(21)} = 0$. Модифицировано из [43]

Fig. 15. *a-c* – The examples of chimera states formed in isolated layers of the system (35) with $N = 200$, $L = 2$ for different $\beta^{(l)}$: 2.5 (*a*), 4.56 (*b*), 4.64 (*c*). The distributions of average frequencies and instantaneous phases of oscillators (left graphs) and coupling matrix (right graphs) illustrate the properties of the initial states in the corresponding layers. *d-e* – Change in the fraction of synchronized pairs of oscillators of different layers D_S with increasing coupling strength $\sigma^{(12)} = \sigma^{(21)} = \sigma$ for different initial condition. The chimera states shown in Fig. 15, *b* and 15, *c* are chosen as the initial conditions for the fragment *d* and chimeras shown in Fig. 15, *a* and 15, *c* – for the fragment *e*. Dashed lines indicate the size of the coherent part of chimera states in the layer l at the initial time $DC_0^{(l)}$ and during the layers interaction $DC^{(l)}$. Parameters: $\omega = 1$, $\varepsilon = 0.01$, $\alpha^{(11)/(22)} = 1.3$, $\alpha^{(12)/(21)} = 0$. Modified from [43]

В этом случае наличие межслойного взаимодействия может привести к разрушению химерного состояния в одном или нескольких слоях системы, либо формированию в слоях системы химерных состояний с различающимися свойствами. В случае частичной межслойной синхронизации в каждой из подсетей формируются химерные состояния, характеризующиеся одинаковыми размерами когерентных частей и множествами элементов, их образующих. Установлено, что в зависимости от величины связи σ изменяется корреляция когерентных наборов начальных состояний химеры и состояний, образующихся в результате взаимодействия. Возникновение полной синхронизации динамики слоёв сопровождается формированием в каждом слое мультикластерных состояний.

В работе [46] проанализированы процессы синхронизации в мультиплексной сети, состоящей из $M = 10$ взаимодействующих слоёв. Каждый слой представляет собой сеть, состоящую из $N = 100$ адаптивно связанных фазовых осцилляторов, взаимодействие между которыми описывается с помощью модели связи, рассмотренной в разделе 1.5. Динамика фазовых осцилляторов в слое l описывается уравнением

$$\frac{d\phi_i^l}{dt} = \omega_i - \sigma_1 \sum_{j \neq i} w_{ij} \sin(\phi_i^l - \phi_j^l) - \sigma_2 \sum_{j \neq l} \sin(\phi_i^l - \phi_i^j), \quad (36)$$

где ω_i – случайно выбранные из интервала $[-\pi, \pi]$ собственные частоты осцилляторов (частоты ω_i одинаковые для всех M слоёв сети), параметры σ_1 и σ_2 характеризуют силу связей внутри слоев и между слоями, соответственно. Эволюция весовых коэффициентов связей w_{ij}^l между осцилляторами в слое l задаётся уравнением

$$\frac{dw_{ij}^l}{dt} = p_{ij}^l - \left(\sum_{k \neq i} p_{ik}^l \right) w_{ij}^l, \quad (37)$$

где локальная корреляция фаз $p_{ij}^l(t)$ между i -м и j -м осцилляторами, вычисляемая на интервале $T = 100$ в слое l определяется в соответствии с выражением (30). В каждом слое l сумма весов всех входящих связей для каждого узла i поддерживается постоянной, то есть в каждый момент времени справедливо условие $\sum_{j \neq i} w_{ij}^l = 1$.

В рамках модели (36), (37) исследовано влияние данного типа адаптивного взаимодействия на процессы синхронизации и установлена зависимость синхронных свойств системы от параметров σ_1 и σ_2 . Решение данного вопроса было проведено на основе анализа ряда введённых количественных параметров, характеризующих меру глобальной синхронизации всей сети r , степень синхронизации внутри отдельного слоя r^l и усреднённую по всем слоям меру синхронизации сети r_{layers} . Показано, что в случае достаточно сильных внутри- и межслойных связей система полностью синхронизируется. В таком состоянии распределения весовых коэффициентов во всех слоях сети становятся идентичными и система фактически представляет собой единую монослойную сеть. Более интересные динамические эффекты наблюдаются в области промежуточных значений связей σ_1 и σ_2 . В данной области параметров r_{layers} в несколько раз превышает r , что свидетельствует о преобладании процесса формирования синхронизованных кластеров в отдельных слоях системы, которые могут отличаться от слоя к слою. Схожие эффекты образования кластеров, как уже сообщалось в разделе 1.5, наблюдались при изменении силы связи σ_1 в случае однослойных сетей [37, 38]. Также была изучена роль взаимодействия между слоями в процессе реорганизации внутрислойных структур. Показано, что при низких значениях силы межслойных связей σ_2 структуры в различных слоях эволюционируют независимо, демонстрируя при этом подобные распределения весовых коэффициентов. Увеличение связи σ_2 приводит к уменьшению разницы между топологиями слоёв, в конечном счете формируя идентичные структуры внутри каждого слоя.

В отличие от упомянутых выше работ, в [47] рассматривается обратная ситуация в отношении распределения типов связей внутри и между слоями мультиплексной системы. В этом случае связи между осцилляторами внутри слоёв λ являются фиксированными, а межслойное взаимодействие осуществляется посредством адаптивных связей $k_{ii}(t)$, реализующих правило обучения Хебба (соответствующая модель динамической связи обсуждалась в разделе 1.1). В рамках двухслойной сети проанализирован сценарий перехода к режиму синхронизации при изменении силы связи λ . Установлено, что рассматриваемый механизм адаптации межслойных связей вызывает переход к синхронизации первого рода, сопровождающийся гистерезисом. В случае,

когда сила связи λ ниже некоторого критического значения λ_c , оба слоя находятся в асинхронном состоянии, а наличие адаптации обеспечивает разделение множества межслойных связей на две почти равные группы подавляющего ($\kappa_{ii}(t) \simeq -\alpha$) и возбуждающего ($\kappa_{ii}(t) \simeq \alpha$) типов (смысл параметра α можно увидеть, обратившись к описанию модели связи в разделе 1.1). Наличие такой совокупности двух типов связей обеспечивает существование популяций противофазно синхронизированных осцилляторов в различных слоях системы, что, в свою очередь, сдерживает формирование одного большого кластера до тех пор, пока не будет достигнут критический порог для $\lambda = \lambda_c$. В синхронном состоянии обоих слоёв ($\lambda > \lambda_c$) адаптация обеспечивает формирование глобальной популяции подавляющих межслойных связей, и соответственно синхронной противофазной динамики слоёв. При этом рассматриваемая адаптивная межслойная связь не только вызывает переход к синхронизации первого рода, но также обеспечивает контроль над характеристиками петли гистерезиса с помощью параметров модели связи, обеспечивающей правило обучения Хебба.

Заключение

В обзоре представлены основные модели адаптивных сетей, построенные в рамках парадигматической модели Курамото. Рассмотренные сети включают известные модели динамических связей, реализующих различные законы адаптации межэлементных взаимодействий в зависимости от состояний элементов, в данном случае их относительной разности фаз. В частности, представлены модели связей, описывающих свойства синаптической пластичности, правило обучения Хебба, модель, построенную на двух конкурирующих между собой механизмах – правила обучения Хебба и гомеостаза. Отдельная часть обзора посвящена обсуждению результатов изучения адаптивных сетей в случае обобщенной модели динамической связи, ставшей предметом активного исследования в последние несколько лет. Особенностью данной модели связи является возможность за счет вариации контрольного параметра перестраивать закон адаптации связей. Несмотря на различия рассматриваемых моделей сетей, они демонстрируют ряд общих свойств, связанных с наличием адаптивности соединений. Одним из таких эффектов является возможность формирования множества кластерных состояний, что в свою очередь определяет мультистабильность поведения адаптивных сетей. Процессы формирования кластеров сопровождаются перестроением топологии взаимодействий, приводящим к образованию иерархических и модульных структур с характерным распределением степеней узлов. Кроме того, адаптивность связей может рассматриваться как эффективный механизм, обеспечивающий достижение глобальной синхронизации в неоднородной сети. Во второй части обзора рассмотрены результаты недавних работ, посвящённых изучению взаимного влияния на коллективную динамику механизмов адаптации связей и многослойной организации сетей. На примере ряда сетей с мультиплексной организацией межслойных взаимодействий было продемонстрировано как сохранение свойств типичных для моноплексной (однослойной сети), так и возможность генерации новых кластерных состояний, которые не реализуются в рамках изолированного слоя. Таким образом, представленные в обзоре результаты демонстрируют, что реализация адаптивных сетей в рамках упрощенной модели фазового описания позволяет сформировать понимание природы возникновения сложных паттернов синхронной активности и нетривиальных структурных образований, наблюдаемых во многих реальных сетевых системах.

Список литературы

1. *Winfree A. T.* Biological rhythms and the behavior of populations of coupled oscillators // *J. Theor. Biol.* 1967. Vol. 16, no. 1. P. 15–42. DOI: 10.1016/0022-5193(67)90051-3.
2. *Kuramoto Y.* Self-entrainment of a population of coupled non-linear oscillators // In: Araki H.

- International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics. Vol. 39 of Lecture Notes in Physics. Springer, Berlin, Heidelberg, 1975. P. 420–422. DOI: 10.1007/BFb0013365.
3. Kuramoto Y. Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence. Springer, Berlin, Heidelberg, 1984. 158 p. DOI: 10.1007/978-3-642-69689-3.
 4. Sakaguchi H., Kuramoto Y. A soluble active rotator model showing phase transitions via mutual entertainment // Prog. Theor. Phys. 1986. Vol. 76, no. 3. P. 576–581. DOI: 10.1143/PTP.76.576.
 5. Strogatz S. H. From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators // Physica D. 2000. Vol. 143, no. 1–4. P. 1–20. DOI: 10.1016/S0167-2789(00)00094-4.
 6. Acebrón J. A., Bonilla L. L., Pérez Vicente C. J., Ritort F., Spigler R. The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena // Rev. Mod. Phys. 2005. Vol. 77, no. 1. P. 137–185. DOI: 10.1103/RevModPhys.77.137.
 7. Pikovsky A., Rosenblum M. Dynamics of globally coupled oscillators: Progress and perspectives // Chaos. 2015. Vol. 25, no. 9. P. 097616. DOI: 10.1063/1.4922971.
 8. Rodrigues F. A., Peron T. K. D. M., Ji P., Kurths J. The Kuramoto model in complex networks // Phys. Rep. 2016. Vol. 610. P. 1–98. DOI: 10.1016/j.physrep.2015.10.008.
 9. Масленников О. В., Некоркин В. И. Адаптивные динамические сети // УФН. 2017. Т. 187, № 7. С. 745–756. DOI: 10.3367/UFNr.2016.10.037902.
 10. Gross T., Blasius B. Adaptive coevolutionary networks: a review // J. R. Soc. Interface. 2008. Vol. 5, no. 20. P. 259–271. DOI: 10.1098/rsif.2007.1229.
 11. Maistrenko Y. L., Lysyansky B., Hauptmann C., Burylko O., Tass P. A. Multistability in the Kuramoto model with synaptic plasticity // Phys. Rev. E. 2007. Vol. 75, no. 6. P. 066207. DOI: 10.1103/PhysRevE.75.066207.
 12. Takahashi Y. K., Kori H., Masuda N. Self-organization of feed-forward structure and entrainment in excitatory neural networks with spike-timing-dependent plasticity // Phys. Rev. E. 2009. Vol. 79, no. 5. P. 051904. DOI: 10.1103/PhysRevE.79.051904.
 13. Picallo C. B., Riecke H. Adaptive oscillator networks with conserved overall coupling: Sequential firing and near-synchronized states // Phys. Rev. E. 2011. Vol. 83, no. 3. P. 036206. DOI: 10.1103/PhysRevE.83.036206.
 14. Seliger P., Young S. C., Tsimring L. S. Plasticity and learning in a network of coupled phase oscillators // Phys. Rev. E. 2002. Vol. 65, no. 4. P. 041906. DOI: 10.1103/PhysRevE.65.041906.
 15. Niyogi R. K., English L. Q. Learning-rate-dependent clustering and self-development in a network of coupled phase oscillators // Phys. Rev. E. 2009. Vol. 80, no. 6. P. 066213. DOI: 10.1103/PhysRevE.80.066213.
 16. Timms L., English L. Q. Synchronization in phase-coupled Kuramoto oscillator networks with axonal delay and synaptic plasticity // Phys. Rev. E. 2014. Vol. 89, no. 3. P. 032906. DOI: 10.1103/PhysRevE.89.032906.
 17. Ren Q., Zhao J. Adaptive coupling and enhanced synchronization in coupled phase oscillators // Phys. Rev. E. 2007. Vol. 76, no. 1. P. 016207. DOI: 10.1103/PhysRevE.76.016207.
 18. Hou J.-L., Zhao J. The order-oscillation induced by negative feedback in the adaptive scheme // Phys. Lett. A. 2010. Vol. 374, no. 7. P. 929–932. DOI: 10.1016/j.physleta.2009.12.016.
 19. Ren Q., He M., Yu X., Long Q., Zhao J. The adaptive coupling scheme and the heterogeneity in intrinsic frequency and degree distributions of the complex networks // Phys. Lett. A. 2014. Vol. 378, no. 3. P. 139–146. DOI: 10.1016/j.physleta.2013.10.031.
 20. Aoki T., Aoyagi T. Co-evolution of phases and connection strengths in a network of phase oscillators // Phys. Rev. Lett. 2009. Vol. 102, no. 3. P. 034101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.102.034101.
 21. Tanaka T., Aoki T., Aoyagi T. Dynamics in co-evolving networks of active elements // Forma. 2009. Vol. 24. P. 17–22.

22. *Aoki T., Aoyagi T.* Self-organized network of phase oscillators coupled by activity-dependent interactions // *Phys. Rev. E.* 2011. Vol. 84, no. 6. P. 066109. DOI: 10.1103/PhysRevE.84.066109.
23. *Касаткин Д. В., Некоркин В. И.* Динамика фазовых осцилляторов с пластичными связями // *Известия вузов. Радиофизика.* 2015. Т. 58, № 11. С. 981–997. DOI: 10.1007/s11141-016-9662-1.
24. *Касаткин Д. В., Некоркин В. И.* Динамика сети взаимодействующих фазовых осцилляторов с динамическими связями // *Известия вузов. ПНД.* 2015. Т. 23, № 4. С. 58–70. DOI: 10.18500/0869-6632-2015-23-4-58-70.
25. *Emelianova A. A., Nekorkin V. I.* On the intersection of a chaotic attractor and a chaotic repeller in the system of two adaptively coupled phase oscillators // *Chaos.* 2019. Vol. 29, no. 11. P. 111102. DOI: 10.1063/1.5130994.
26. *Emelianova A. A., Nekorkin V. I.* The third type of chaos in a system of two adaptively coupled phase oscillators // *Chaos.* 2020. Vol. 30, no. 5. P. 051105. DOI: 10.1063/5.0009525.
27. *Emelianova A. A., Nekorkin V. I.* Emergence and synchronization of a reversible core in a system of forced adaptively coupled Kuramoto oscillators // *Chaos.* 2021. Vol. 31, no. 3. P. 033102. DOI: 10.1063/5.0038833.
28. *Гонченко С. В., Тураев Д. В.* О трех типах динамики и понятии аттрактора // *Труды математического института им. В. А. Стеклова.* 2017. Т. 297. С. 133–157. DOI: 10.1134/S0371968517020078.
29. *Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П.* Об областях Ньюхауса двумерных диффеоморфизмов, близких к диффеоморфизму с негрубым гетероклиническим контуром // *Труды математического института им. В. А. Стеклова.* 1997. Т. 216. С. 76–125.
30. *Nekorkin V. I., Kasatkin D. V.* Dynamics of a network of phase oscillators with plastic couplings // *AIP Conf. Proc.* 2016. Vol. 1738, no. 1. P. 210010. DOI: 10.1063/1.4951993.
31. *Kasatkin D. V., Yanchuk S., Schöll E., Nekorkin V. I.* Self-organized emergence of multilayer structure and chimera states in dynamical networks with adaptive couplings // *Phys. Rev. E.* 2017. Vol. 96, no. 6. P. 062211. DOI: 10.1103/PhysRevE.96.062211.
32. *Berner R., Schöll E., Yanchuk S.* Multiclusters in networks of adaptively coupled phase oscillators // *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 2019. Vol. 18, no. 4. P. 2227–2266. DOI: 10.1137/18M1210150.
33. *Berner R., Fialkowski J., Kasatkin D., Nekorkin V., Yanchuk S., Schöll E.* Hierarchical frequency clusters in adaptive networks of phase oscillators // *Chaos.* 2019. Vol. 29, no. 10. P. 103134. DOI: 10.1063/1.5097835.
34. *Kasatkin D. V., Nekorkin V. I.* The effect of topology on organization of synchronous behavior in dynamical networks with adaptive couplings // *Eur. Phys. J. Spec. Top.* 2018. Vol. 227, no. 10–11. P. 1051–1061. DOI: 10.1140/epjst/e2018-800077-7.
35. *Berner R., Polanska A., Schöll E., Yanchuk S.* Solitary states in adaptive nonlocal oscillator networks // *Eur. Phys. J. Spec. Top.* 2020. Vol. 229, no. 12–13. P. 2183–2203. DOI: 10.1140/epjst/e2020-900253-0.
36. *Panaggio M. J., Abrams D. M.* Chimera states: coexistence of coherence and incoherence in networks of coupled oscillators // *Nonlinearity.* 2015. Vol. 28, no. 3. P. R67. DOI: 10.1088/0951-7715/28/3/R67.
37. *Gutiérrez R., Amann A., Assenza S., Gómez-Gardeñes J., Latora V., Boccaletti S.* Emerging meso- and macroscales from synchronization of adaptive networks // *Phys. Rev. Lett.* 2011. Vol. 107, no. 23. P. 234103. DOI: 10.1103/PhysRevLett.107.234103.
38. *Assenza S., Gutiérrez R., Gómez-Gardeñes J., Latora V., Boccaletti S.* Emergence of structural patterns out of synchronization in networks with competitive interactions // *Sci. Rep.* 2011. Vol. 1, no. 1. P. 99. DOI: 10.1038/srep00099.
39. *Avalos-Gaytán V., Almendral J. A., Papo D., Schaeffer S. E., Boccaletti S.* Assortative and modular networks are shaped by adaptive synchronization processes // *Phys. Rev. E.* 2012. Vol. 86, no. 1. P. 015101(R). DOI: 10.1103/PhysRevE.86.015101.
40. *Avalos-Gaytán V., Almendral J. A., Leyva I., Battiston F., Nicosia V., Latora V., Boccaletti S.*

- Emergent explosive synchronization in adaptive complex networks // *Phys. Rev. E*. 2018. Vol. 97, no. 4. P. 042301. DOI: 10.1103/PhysRevE.97.042301.
41. Kasatkin D. V., Klinshov V. V., Nekorkin V. I. Itinerant chimeras in an adaptive network of pulse-coupled oscillators // *Phys. Rev. E*. 2019. Vol. 99, no. 2. P. 022203. DOI: 10.1103/PhysRevE.99.022203.
 42. Berner R., Sawicki J., Schöll E. Birth and stabilization of phase clusters by multiplexing of adaptive networks // *Phys. Rev. Lett.* 2020. Vol. 124, no. 8. P. 088301. DOI: 10.1103/PhysRevLett.124.088301.
 43. Kasatkin D. V., Nekorkin V. I. Synchronization of chimera states in a multiplex system of phase oscillators with adaptive couplings // *Chaos*. 2018. Vol. 28, no. 9. P. 093115. DOI: 10.1063/1.5031681.
 44. Andrzejak R. G., Ruzzeno G., Malvestio I. Generalized synchronization between chimera states // *Chaos*. 2017. Vol. 27, no. 5. P. 053114. DOI: 10.1063/1.4983841.
 45. Maksimenko V. A., Makarov V. V., Bera B. K., Ghosh D., Dana S. K., Goremyko M. V., Frolov N. S., Koronovskii A. A., Hramov A. E. Excitation and suppression of chimera states by multiplexing // *Phys. Rev. E*. 2016. Vol. 94, no. 5. P. 052205. DOI: 10.1103/PhysRevE.94.052205.
 46. Makarov V. V., Koronovskii A. A., Maksimenko V. A., Hramov A. E., Moskalenko O. I., Buldú J. M., Boccaletti S. Emergence of a multilayer structure in adaptive networks of phase oscillators // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2016. Vol. 84. P. 23–30. DOI: 10.1016/j.chaos.2015.12.022.
 47. Kachhvah A. D., Dai X., Boccaletti S., Jalan S. Interlayer Hebbian plasticity induces first-order transition in multiplex networks // *New J. Phys.* 2020. Vol. 22. P. 122001. DOI: 10.1088/1367-2630/abcf6b.

References

1. Winfree AT. Biological rhythms and the behavior of populations of coupled oscillators. *J. Theor. Biol.* 1967;16(1):15–42. DOI: 10.1016/0022-5193(67)90051-3.
2. Kuramoto Y. Self-entrainment of a population of coupled non-linear oscillators. In: Araki H. *International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics*. Vol. 39 of *Lecture Notes in Physics*. Springer, Berlin, Heidelberg; 1975. P. 420–422. DOI: 10.1007/BFb0013365.
3. Kuramoto Y. *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*. Springer, Berlin, Heidelberg; 1984. 158 p. DOI: 10.1007/978-3-642-69689-3.
4. Sakaguchi H, Kuramoto Y. A soluble active rotator model showing phase transitions via mutual entertainment. *Prog. Theor. Phys.* 1986;76(3):576–581. DOI: 10.1143/PTP.76.576.
5. Strogatz SH. From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators. *Physica D*. 2000;143(1–4):1–20. DOI: 10.1016/S0167-2789(00)00094-4.
6. Acebrón JA, Bonilla LL, Pérez Vicente CJ, Ritort F, Spigler R. The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena. *Rev. Mod. Phys.* 2005;77(1):137–185. DOI: 10.1103/RevModPhys.77.137.
7. Pikovsky A, Rosenblum M. Dynamics of globally coupled oscillators: Progress and perspectives. *Chaos*. 2015;25(9):097616. DOI: 10.1063/1.4922971.
8. Rodrigues FA, Peron TKDM, Ji P, Kurths J. The Kuramoto model in complex networks. *Phys. Rep.* 2016;610:1–98. DOI: 10.1016/j.physrep.2015.10.008.
9. Maslennikov OV, Nekorkin VI. Adaptive dynamical networks. *Phys. Usp.* 2017;60(7):694–704. DOI: 10.3367/UfNe.2016.10.037902.
10. Gross T, Blasius B. Adaptive coevolutionary networks: a review. *J. R. Soc. Interface*. 2008;5(20):259–271. DOI: 10.1098/rsif.2007.1229.
11. Maistrenko YL, Lysyansky B, Hauptmann C, Burylko O, Tass PA. Multistability in the Kuramoto model with synaptic plasticity. *Phys. Rev. E*. 2007;75(6):066207. DOI: 10.1103/PhysRevE.75.066207.
12. Takahashi YK, Kori H, Masuda N. Self-organization of feed-forward structure and entrainment in

- excitatory neural networks with spike-timing-dependent plasticity. *Phys. Rev. E.* 2009;79(5):051904. DOI: 10.1103/PhysRevE.79.051904.
13. Picallo CB, Riecke H. Adaptive oscillator networks with conserved overall coupling: Sequential firing and near-synchronized states. *Phys. Rev. E.* 2011;83(3):036206. DOI: 10.1103/PhysRevE.83.036206.
 14. Seliger P, Young SC, Tsimring LS. Plasticity and learning in a network of coupled phase oscillators. *Phys. Rev. E.* 2002;65(4):041906. DOI: 10.1103/PhysRevE.65.041906.
 15. Niyogi RK, English LQ. Learning-rate-dependent clustering and self-development in a network of coupled phase oscillators. *Phys. Rev. E.* 2009;80(6):066213. DOI: 10.1103/PhysRevE.80.066213.
 16. Timms L, English LQ. Synchronization in phase-coupled Kuramoto oscillator networks with axonal delay and synaptic plasticity. *Phys. Rev. E.* 2014;89(3):032906. DOI: 10.1103/PhysRevE.89.032906.
 17. Ren Q, Zhao J. Adaptive coupling and enhanced synchronization in coupled phase oscillators. *Phys. Rev. E.* 2007;76(1):016207. DOI: 10.1103/PhysRevE.76.016207.
 18. Hou JL, Zhao J. The order-oscillation induced by negative feedback in the adaptive scheme. *Phys. Lett. A.* 2010;374(7):929–932. DOI: 10.1016/j.physleta.2009.12.016.
 19. Ren Q, He M, Yu X, Long Q, Zhao J. The adaptive coupling scheme and the heterogeneity in intrinsic frequency and degree distributions of the complex networks. *Phys. Lett. A.* 2014;378(3):139–146. DOI: 10.1016/j.physleta.2013.10.031.
 20. Aoki T, Aoyagi T. Co-evolution of phases and connection strengths in a network of phase oscillators. *Phys. Rev. Lett.* 2009;102(3):034101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.102.034101.
 21. Tanaka T, Aoki T, Aoyagi T. Dynamics in co-evolving networks of active elements. *Forma.* 2009;24:17–22.
 22. Aoki T, Aoyagi T. Self-organized network of phase oscillators coupled by activity-dependent interactions. *Phys. Rev. E.* 2011;84(6):066109. DOI: 10.1103/PhysRevE.84.066109.
 23. Kasatkin DV, Nekorkin VI. Dynamics of the phase oscillators with plastic couplings. *Radiophys. Quantum El.* 2016;58(11):877–891. DOI: 10.1007/s11141-016-9662-1.
 24. Kasatkin DV, Nekorkin VI. Dynamics of a network of interacting phase oscillators with dynamic couplings. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2015;23(4):58–70 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2015-23-4-58-70.
 25. Emelianova AA, Nekorkin VI. On the intersection of a chaotic attractor and a chaotic repeller in the system of two adaptively coupled phase oscillators. *Chaos.* 2019;29(11):111102. DOI: 10.1063/1.5130994.
 26. Emelianova AA, Nekorkin VI. The third type of chaos in a system of two adaptively coupled phase oscillators. *Chaos.* 2020;30(5):051105. DOI: 10.1063/5.0009525.
 27. Emelianova AA, Nekorkin VI. Emergence and synchronization of a reversible core in a system of forced adaptively coupled Kuramoto oscillators. *Chaos.* 2021;31(3):033102. DOI: 10.1063/5.0038833.
 28. Gonchenko SV, Turaev DV. On three types of dynamics and the notion of attractor. *Proc. Steklov Inst. Math.* 2017;297(1):116–137. DOI: 10.1134/S0081543817040071.
 29. Gonchenko SV, Turaev DV, Shilnikov LP. On Newhouse domains of two-dimensional diffeomorphisms that are close to a diffeomorphism with a structurally unstable heteroclinic contour. *Proc. Steklov Inst. Math.* 1997;216:70–118.
 30. Nekorkin VI, Kasatkin DV. Dynamics of a network of phase oscillators with plastic couplings. *AIP Conf. Proc.* 2016;1738(1):210010. DOI: 10.1063/1.4951993.
 31. Kasatkin DV, Yanchuk S, Schöll E, Nekorkin VI. Self-organized emergence of multilayer structure and chimera states in dynamical networks with adaptive couplings. *Phys. Rev. E.* 2017;96(6):062211. DOI: 10.1103/PhysRevE.96.062211.
 32. Berner R, Schöll E, Yanchuk S. Multiclusters in networks of adaptively coupled phase oscillators. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 2019;18(4):2227–2266. DOI: 10.1137/18M1210150.

33. Berner R, Fialkowski J, Kasatkin D, Nekorkin V, Yanchuk S, Schöll E. Hierarchical frequency clusters in adaptive networks of phase oscillators. *Chaos*. 2019;29(10):103134. DOI: 10.1063/1.5097835.
34. Kasatkin DV, Nekorkin VI. The effect of topology on organization of synchronous behavior in dynamical networks with adaptive couplings. *Eur. Phys. J. Spec. Top.* 2018;227(10–11):1051–1061. DOI: 10.1140/epjst/e2018-800077-7.
35. Berner R, Polanska A, Schöll E, Yanchuk S. Solitary states in adaptive nonlocal oscillator networks. *Eur. Phys. J. Spec. Top.* 2020;229(12–13):2183–2203. DOI: 10.1140/epjst/e2020-900253-0.
36. Panaggio MJ, Abrams DM. Chimera states: coexistence of coherence and incoherence in networks of coupled oscillators. *Nonlinearity*. 2015;28(3):R67. DOI: 10.1088/0951-7715/28/3/R67.
37. Gutiérrez R, Amann A, Assenza S, Gómez-Gardeñes J, Latora V, Boccaletti S. Emerging meso- and macroscales from synchronization of adaptive networks. *Phys. Rev. Lett.* 2011;107(23):234103. DOI: 10.1103/PhysRevLett.107.234103.
38. Assenza S, Gutiérrez R, Gómez-Gardeñes J, Latora V, Boccaletti S. Emergence of structural patterns out of synchronization in networks with competitive interactions. *Sci. Rep.* 2011;1(1):99. DOI: 10.1038/srep00099.
39. Avalos-Gaytán V, Almendral JA, Papo D, Schaeffer SE, Boccaletti S. Assortative and modular networks are shaped by adaptive synchronization processes. *Phys. Rev. E*. 2012;86(1):015101(R). DOI: 10.1103/PhysRevE.86.015101.
40. Avalos-Gaytán V, Almendral JA, Leyva I, Battiston F, Nicosia V, Latora V, Boccaletti S. Emergent explosive synchronization in adaptive complex networks. *Phys. Rev. E*. 2018;97(4):042301. DOI: 10.1103/PhysRevE.97.042301.
41. Kasatkin DV, Klinshov VV, Nekorkin VI. Itinerant chimeras in an adaptive network of pulse-coupled oscillators. *Phys. Rev. E*. 2019;99(2):022203. DOI: 10.1103/PhysRevE.99.022203.
42. Berner R, Sawicki J, Schöll E. Birth and stabilization of phase clusters by multiplexing of adaptive networks. *Phys. Rev. Lett.* 2020;124(8):088301. DOI: 10.1103/PhysRevLett.124.088301.
43. Kasatkin DV, Nekorkin VI. Synchronization of chimera states in a multiplex system of phase oscillators with adaptive couplings. *Chaos*. 2018;28(9):093115. DOI: 10.1063/1.5031681.
44. Andrzejak RG, Ruzszen G, Malvestio I. Generalized synchronization between chimera states. *Chaos*. 2017;27(5):053114. DOI: 10.1063/1.4983841.
45. Maksimenko VA, Makarov VV, Bera BK, Ghosh D, Dana SK, Goremyko MV, Frolov NS, Koronovskii AA, Hramov AE. Excitation and suppression of chimera states by multiplexing. *Phys. Rev. E*. 2016;94(5):052205. DOI: 10.1103/PhysRevE.94.052205.
46. Makarov VV, Koronovskii AA, Maksimenko VA, Hramov AE, Moskalenko OI, Buldú JM, Boccaletti S. Emergence of a multilayer structure in adaptive networks of phase oscillators. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2016;84:23–30. DOI: 10.1016/j.chaos.2015.12.022.
47. Kachhvah AD, Dai X, Boccaletti S, Jalan S. Interlayer Hebbian plasticity induces first-order transition in multiplex networks. *New J. Phys.* 2020;22:122001. DOI: 10.1088/1367-2630/abcf6b.



Касаткин Дмитрий Владимирович – родился в 1978 году в Нижнем Новгороде. Окончил радиофизический факультет Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского (2001). С 2002 года работает в Институте прикладной физики РАН. Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук (2004, ННГУ). Область научных интересов – теория нелинейных колебаний и волн, теория синхронизации, динамический хаос, нейродинамика. Имеет более 50 научных публикаций по указанным направлениям.

Россия, 603950 Нижний Новгород, БОКС-120, ул. Ульянова, 46
 Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики РАН
 E-mail: kasatkin@appl.sci.nnov.ru
 ORCID: 0000-0002-8634-9136

Касаткин Д. В., Емельянова А. А., Некоркин В. И.
 Известия вузов. ПНД, 2021, т. 29, № 4



Емельянова Анастасия Александровна – родилась в 1997 году в Арзамасе. Окончила с отличием радиофизический факультет Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского (2020). С 2016 года активно занимается научно-исследовательской деятельностью в отделе нелинейной динамики ИПФ РАН. Аспирант Института прикладной физики РАН. Область научных интересов – теория нелинейных колебаний и волн, теория синхронизации, динамический хаос. Имеет 7 научных публикаций по указанным направлениям.

Россия, 603950 Нижний Новгород, БОКС-120, ул. Ульянова, 46
Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики РАН
E-mail: emelianova@ipfran.ru
ORCID: 0000-0002-3418-2602



Некоркин Владимир Исаакович – родился в 1948 году, окончил радиофизический факультет Горьковского государственного университета им. Н. И. Лобачевского (1971). Доктор физико-математических наук (1992), профессор кафедры теории колебаний и автоматического регулирования ННГУ, заведующий отделом нелинейной динамики Института прикладной физики РАН, лауреат премии им. А. А. Андропова (2012). Область научных интересов – динамика нелинейных систем, нейродинамика, теория синхронизации, пространственно-временной хаос, структурообразование и нелинейные волны. Имеет более 250 научных публикаций в отечественных и зарубежных изданиях, в том числе 4 книги и 2 патента.

Россия, 603950 Нижний Новгород, БОКС-120, ул. Ульянова, 46
Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики РАН
E-mail: vnekorkin@appl.sci-nnov.ru
ORCID: 0000-0002-8345-1557