



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2021. Т. 29, № 4
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2021;29(4)

Научная статья

УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-4-467-479

О возможности явления взрывной синхронизации в сетях малого мира

A. A. Короновский, M. K. Куровская, O. I. Москаленко 

Саратовский национальный исследовательский

государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Россия

E-mail: alexey.koronovskii@gmail.com, mariakurovskaya@gmail.com, o.i.moskalenko@gmail.com

Поступила в редакцию 22.04.2021, принята к публикации 12.06.2021, опубликована 30.07.2021

Аннотация. Цель настоящего исследования – изучение возможности существования в сетях нелинейных осцилляторов с топологией межэлементных связей «малый мир» явления взрывной хаотической синхронизации, наблюдающейся для сложных сетей нелинейных элементов со случайной или масштабно-инвариантной топологией связей между узлами сети. **Методы.** В данной работе, наряду с численным моделированием, используется аналитическое описание поведения сетей нелинейных элементов ниже порога возникновения полностью синхронного состояния сети. **Результаты.** Показано, что в сетях нелинейных осцилляторов с топологиями межэлементных связей типа «кольцо» и «малый мир» при увеличении параметра связи возможен резкий переход к полностью синхронной динамике всех осцилляторов сети точно так же, как это происходит при явлении взрывной синхронизации для случайных и масштабно-инвариантных сетей. С помощью теоретического рассмотрения выявлен механизм, приводящий к возникновению данного резкого перехода к синхронному состоянию в сетях с топологией связей «кольцо» и «малый мир», связанный с формированием двух независимых синхронных кластеров. **Заключение.** В работе рассмотрены механизмы, приводящие к резкому «взрывному» переходу к полностью синхронной динамике всех элементов в сетях нелинейных осцилляторов с топологиями связей «кольцо» и «малый мир», получены аналитические соотношения, описывающие данный переход и позволяющие объяснить наблюдаемое явление.

Ключевые слова: осцилляторы Курamoto, сети нелинейных элементов, малый мир, взрывная синхронизация.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке РНФ, проект № 19-12-00037.

Для цитирования: Короновский А. А., Куровская М. К., Москаленко О. И. О возможности явления взрывной синхронизации в сетях малого мира // Известия вузов. ПНД. 2021. Т. 29, № 4. С. 467–479.

DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-4-467-479

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

On the possibility of explosive synchronization in small world networks

A. A. Koronovskii, M. K. Kurovskaya, O. I. Moskalenko[✉]

Saratov State University, Russia

E-mail: alexey.koronovskii@gmail.com,

mariakurovskaya@gmail.com, [✉]o.i.moskalenko@gmail.com

Received 22.04.2021, accepted 12.06.2021, published 30.07.2021

Abstract. The purpose of this work is to study the possibility of the existence of explosive chaotic synchronization phenomenon in small world networks of nonlinear oscillators in the same way as it has been observed for complex networks of nonlinear elements with a random or scale-free topologies of links between network nodes. *Methods.* In this work, along with numerical modeling, an analytical approach has been used to describe the behavior of network nonlinear elements below the threshold of the occurrence of a completely synchronous state of all network oscillators. *Results.* It has been shown that in networks of nonlinear oscillators with topologies of links between nodes being the “ring” or “small world” type, with an increase in the coupling strength, an abrupt transition to the completely synchronous dynamics of all network oscillators is possible, just as it happens within the random and scale-free networks where the explosive synchronization phenomenon has been discovered and studied. With the help of theoretical consideration, a mechanism leading to the emergence of this abrupt transition to a synchronous state in ring and small-world networks has been revealed. This mechanism is associated with the formation of two independent synchronous clusters coexisting within network. *Conclusion.* The paper considers the mechanisms leading to a sharp “explosive” transition to completely synchronous dynamics of all elements in ring and small world networks of nonlinear oscillators, analytical relations are obtained that describe this transition and make it possible to explain the revealed phenomenon.

Keywords: Kuramoto oscillators, networks of nonlinear elements, small world, explosive synchronization.

Acknowledgements. This work was supported by Russian Science Foundation, project No. 19-12-00037.

For citation: Koronovskii AA, Kurovskaya MK, Moskalenko OI. On the possibility of explosive synchronization in small world networks. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2021;29(4):467–479. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-4-467-479

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Изучение синхронных режимов и механизмов их установления/разрушения в сложных сетях нелинейных элементов с различными видами топологий связей в настоящее время прочно заняло свое место в научных исследованиях [1–3]. Из множества известных на сегодняшний день различных типов синхронных режимов [4–12] в настоящей работе рассматривается режим фазовой синхронизации, подразумевающий под собой совпадение частот взаимодействующих осцилляторов и, соответственно, захват их мгновенных фаз [13]. В сложных сетях переход от асинхронной динамики элементов сети к полностью синхронному поведению в смысле фазовой хаотической синхронизации, как правило, происходит постепенно, когда по мере увеличения силы связи между отдельными элементами сети все большее и большее количество осцилляторов становятся синхронизированными [14–16]. В то же самое время, при определенных условиях в сетях со сложной топологией межэлементных связей возможно явление взрывной синхронизации (*explosive synchronization*), когда осцилляторы сети при увеличении параметра связи внезапно и резко («взрывным образом») синхронизуются друг с другом и переводят сеть в полностью синхронное состояние [17–19].

Взрывная синхронизация наблюдается для широкого круга сетей с различными топологиями межэлементных связей, таких как сети, где каждый элемент связан со всеми остальными [20], случайные [21] и масштабно-инвариантные [18, 22, 23] сети (в том числе и масштабно-инвариантные

сети с запаздывающими по времени связями [24]), а также сети с адаптивным типом связей [24]. В качестве узловых элементов сети могут выступать при этом модельные осцилляторы Курамото [25, 26] и их модификации [27], кусочно-линейные осцилляторы Ресслера [17] и др. Несмотря на то, что плавный переход от асинхронной динамики к полностью синхронному состоянию в сетях нелинейных элементов гораздо более типичен, а взрывная синхронизация наблюдается гораздо реже и при определённых (порой весьма специфичных и разных для различных топологий межэлементных связей) условиях, явление взрывной синхронизации рассматривается как универсальное для сетей нелинейных осцилляторов [28].

В то же самое время, широкий класс сетей (а именно класс сетей с топологией связей «малый мир») несколько выделяется из общего круга сложных сетей с точки зрения изучения явления взрывного перехода к полностью синхронному состоянию в таких сетях. До настоящего времени в научной литературе не сообщалось (по крайней мере, нам об этом не известно) о возможности взрывной синхронизации в сетях малого мира. Возникает естественный вопрос, может ли существовать взрывная синхронизация (или подобное ей явление) в сетях с топологией «малый мир», и если да, то при каких условиях.

В настоящей работе мы, следуя идеологии изучения явления взрывной синхронизации в регулярных и случайных сетях, рассмотрим переход от асинхронной динамики к полностью синхронному состоянию сети и покажем, что в сетях малого мира с увеличением параметра связи тоже возможны резкие «взрывные» переходы, переводящие сеть осцилляторов в полностью синхронное состояние, а также изучим (численно и аналитически) механизмы, обуславливающие такой тип поведения.

1. Сеть малого мира осцилляторов Курамото

В качестве сети с топологией межэлементных связей типа малого мира рассмотрим сеть осцилляторов Курамото [25, 26]. Поведение сети осцилляторов определяется оператором эволюции

$$\dot{\varphi}_j = \omega_j + \lambda \sum_{k=1}^N a_{jk} \sin(\varphi_k - \varphi_j), \quad (1)$$

где N – количество осцилляторов рассматриваемой сети (в данной статье $N = 10^3$ осцилляторов), φ_j и ω_j – мгновенные фаза и частота j -го осциллятора, параметр λ определяет силу связей осцилляторов в сети, a_{jk} – элементы матрицы $\mathbf{A} = \{a_{jk}\}$, которая и определяет топологию межэлементных связей. В том случае, если осцилляторы с номерами j и k связаны друг с другом, $a_{jk} = a_{kj} = 1$, и, наоборот, в случае отсутствия связи между этими элементами $a_{jk} = a_{kj} = 0$. Диагональные элементы матрицы \mathbf{A} полагаются тождественно равными нулю, $a_{jj} = 0$. Собственные частоты осцилляторов сети ω_j в общем случае отличаются друг от друга, и, соответственно, сеть может переходить в синхронное состояние только при превышении параметром связи некоторого критического значения λ_c . С помощью преобразования $\varphi_j \rightarrow \varphi_j + \Omega_0 t$ соотношение (1) может быть приведено к эквивалентной системе фазовых осцилляторов, в которой, однако, φ_j будет теперь представлять собой разность фаз между осциллятором сети с номером j и некоторым реперным осциллятором (не обязательно присутствующим в сети) с частотой колебаний Ω_0 . В том случае, если выполняется условие $\Omega_0 = \langle \omega_j \rangle$, полученная эквивалентная система осцилляторов Курамото будет характеризоваться набором собственных частот с нулевым средним значением.

Для того чтобы рассматриваемая сеть осцилляторов Курамото (1) являлась сетью малого мира, был использован метод Ваттса–Строгаца [29]. Согласно данному методу, построение топологии связей для сети малого мира начинается с регулярной сети типа «кольцо», в которой каждый из N элементов сети связан с $2K$ ближайшими соседними элементами. Затем каждая

связь регулярной сети с некоторой наперед заданной вероятностью p перезамыкается случайным образом. Подобный подход позволяет, варьируя вероятность p , тонко «регулировать» топологию сети, задавая желаемое промежуточное состояние между регулярной ($p = 0$) и случайной ($p = 1$) сетями, при этом, как показано в [29], существует (достаточно тонкий) интервал малых значений вероятности p , внутри которого рассматриваемая сеть обладает свойствами сети малого мира.

Поскольку режим взрывной синхронизации в сетях со случайной топологией связей наблюдается при эквидистантно заданных собственных частотах осцилляторов [25, 26, 30], расположенных в узлах сети, а метод Ваттса–Строгаца [29], как это уже отмечалось выше, позволяет плавно перестраивать топологию сети от регулярной к случайной при помощи варьирования вероятности p , представляется целесообразным рассмотреть установление полностью синхронного состояния сети малого мира с увеличением параметра связи λ также для случая эквидистантно заданных собственных частот

$$\omega_j = -\Omega + \frac{2\Omega}{N-1}(j-1), \quad (2)$$

где в рассматриваемом случае $\Omega = 0.5$, $j = 1, \dots, N$. Иными словами, распределение частот $g(\omega)$ является равномерным и симметричным со средним значением $\langle \omega \rangle = 0$

$$g(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2\Omega} & \text{если } |\omega| \leq \Omega, \\ 0 & \text{если } |\omega| > \Omega. \end{cases} \quad (3)$$

2. Взрывная синхронизация в сети малого мира осцилляторов Курамото

Для того, чтобы выявить явление взрывной синхронизации, необходимо изучить, как зависит количество осцилляторов сети, демонстрирующих синхронную динамику, от величины параметра связи λ . Размер максимального кластера синхронных осцилляторов N^s в изучаемой сети может быть определен с помощью соотношения

$$N^s = \max_j \sum_{k=1}^N H(R_{kj} - R), \quad (4)$$

где

$$R_{kj} = \left| \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} e^{i(\varphi_k - \varphi_j)} dt \right|, \quad (5)$$

$H(\cdot)$ – функция Хевисайда, R – некоторая наперед заданная пороговая величина. Данная характеристика оказывается схожей с соотношениями, использованными в работах [31–33] для изучения синхронизма в сети нелинейных осцилляторов. В настоящей работе использовалось пороговое значение $R = 0.95$. В том случае, если величина R_{kj} оказывается равной или превышает пороговое значение R , осцилляторы с номерами k и j считаются синхронными и функция Хевисайда $H(R_{kj} - R)$ принимает значение равное единице. И наоборот, в случаях, когда R_{kj} принимает значение ниже пороговой величины R , значение функции Хевисайда $H(R_{kj} - R)$ будет равно нулю. Важной является следующая особенность: чтобы корректно определить количество синхронных элементов (и, соответственно, размер синхронного кластера N^s) с помощью вышеприведенных соотношений (4)–(5), величины t_0 и T должны быть существенно большими, во-первых, чтобы были завершены все переходные процессы в сети, и, во-вторых, чтобы было обеспечено релевантное усреднение по времени.

На рисунке показано несколько зависимостей нормированного размера максимального кластера синхронных осцилляторов $f = N^s/N$ в сети малого мира (1) с частотами, заданными в соответствии с (2), от величины управляющего параметра λ . Все зависимости, представленные на рисунке, получены для сетей малого мира, состоящих из $N = 10^3$ осцилляторов Курамото, но с различным числом соседей K и полученных методом Ваттса–Строгаца [29] при разных значениях вероятности p .

Из рисунка отчётливо видно, что для рассматриваемых сетей малого мира с частотами осцилляторов, заданными в соответствии с соотношением (2), и различными параметрами построения сети K и p , увеличение параметра связи λ вызывает сначала постепенное увеличение числа синхронизованных осцилляторов в сети малого мира (и, как следствие, рост размера максимального синхронного кластера N^s этой сети), а затем при достижении определённого критического значения параметра связи λ_c происходит резкий взрывной рост числа осцилляторов в синхронном кластере, приводящий к тому, что вся сеть малого мира становится синхронной ($f = N^s/N = 1.0$), что, собственно говоря, и свойственно для явления взрывной синхронизации [17–21]. Максимальный кластер синхронных осцилляторов внезапно превращается в структуру, включающую в себя все осцилляторы рассматриваемой сети (N^s становится равным N). Описываемый внезапный резкий переход сети малого мира к полностью синхронному состоянию для различных значений параметров сети p и K происходит при различных значениях параметра связи λ_c , однако, глядя на рисунок можно выявить отдельные закономерности: для сетей с топологией межэлементных связей «малый мир» и одинаковым числом «соседей», определяемых значением параметра K , зависимости размера максимального кластера синхронных осцилляторов N^s от параметра связи λ до возникновения резкого перехода к полностью синхронному состоянию оказываются примерно

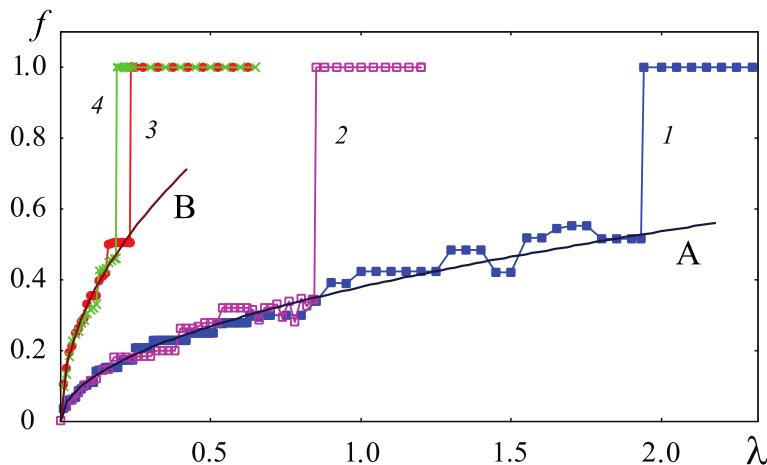


Рис. Зависимость нормированного размера $f = N^s/N$ максимального кластера синхронных осцилляторов в сети малого мира осцилляторов Курамото (1) от величины параметра связи λ . Зависимости 1 и 2 получены для сетей малого мира, характеризующихся значением параметра $K = 8$ (зависимость 1 – $K = 8$, $p = 0.01$, зависимость 2 – $K = 8$, $p = 0.05$), тогда как зависимости 3 и 4 характеризуют поведение сетей малого мира со значением параметра $K = 24$ (зависимость 3 – $K = 24$, $p = 0.01$, зависимость 4 – $K = 24$, $p = 0.05$). Сплошные линии показывают аппроксимации вида $A\sqrt{\lambda}$ (см. соотношение (6)) зависимостей $f(\lambda)$ до взрывного перехода (аппроксимация А ($K = 8$) – $A = 0.3795$, аппроксимация В ($K = 24$) – $A = 1.0955$)

Fig. The dependence of the normalized size of the maximal synchronous oscillator cluster, $f = N^s/N$, on the coupling strength λ for the small world network of Kuramoto oscillators (1). Curves 1 and 2 are shown for small-world network with $K = 8$ (curve 1 – $K = 8$, $p = 0.01$, curve 2 – $K = 8$, $p = 0.05$), whereas curves 3 and 4 characterize the behavior of small-world networks with $K = 24$ (curve 3 – $K = 24$, $p = 0.01$, curve 4 – $K = 24$, $p = 0.05$). Solid lines represent approximations $A\sqrt{\lambda}$ (see Eq. (6)) for $f(\lambda)$ below the explosive transition (approximation A ($K = 8$) – $A = 0.3795$, approximation B ($K = 24$) – $A = 1.0955$)

одинаковыми для различных значений вероятности p перезамыкания связей при построении топологии сети методом Ваттса–Строгаца [29] и хорошо аппроксимируются зависимостью вида

$$f = \frac{N^s}{N} = A\sqrt{\lambda}, \quad (6)$$

причём, чем больше величина параметра K , тем больше значение константы A в соотношении (6). В свою очередь, чем больше вероятность p , использованная при построении топологии сети методом Ваттса–Строгаца, тем раньше (при меньших значениях параметра связи λ) происходит взрывной переход к полностью синхронному состоянию сети малого мира.

Таким образом, в результате численного моделирования поведения сети осцилляторов Курамото с топологией межэлементных связей «малый мир» при различных значениях параметров K и p и собственных частотах осцилляторов ω_j , заданных аналогично ситуациям, при которых явление взрывной синхронизации наблюдается в сетях со случайной топологией связей, установлено, что явление взрывной синхронизации также имеет место в сетях малого мира. Для качественного и количественного объяснения явления взрывной синхронизации, наблюдаемого в сетях малого мира, построим теоретическую модель, детальное описание которой приведено в следующем разделе 3.

3. Теоретическое описание процессов, происходящих в сети малого мира осцилляторов Курамото

В силу того, что в основе сети с топологией межэлементных связей типа «малый мир», полученной по методу Ваттса–Строгаца, лежит регулярная сеть с топологией «кольцо», а свойства сети малого мира наблюдаются при относительно малых значениях вероятности p , что свидетельствует об относительно небольшом числе «перезамкнутых» связей по сравнению с общим количеством существующих связей сети, возможно ввести в рассмотрение пространственную координату x , направленную «вдоль» кольца, начало которой совпадает с элементом рассматриваемой сети, собственная частота которого ω_j равна нулю. Без потери общности будем считать, что во введённой в рассмотрение системе координат длина кольца будет составлять $2\mathcal{L}$ единиц, а собственные частоты ω_k элементов сети (2) будут зависеть от координаты x как

$$\omega(x) = \frac{\Omega x}{\mathcal{L}}, \quad x \in [-\mathcal{L}, +\mathcal{L}]. \quad (7)$$

В предположении большого числа осцилляторов $N \gg 1$, составляющих рассматриваемую сеть, принимая во внимание соотношение (7) и (пока) пренебрегая «длинными» связями, возникшими в результате перезамыкания кольцевых связей в силу метода Ваттса–Строгаца, исходный оператор эволюции (1) может быть записан в виде

$$\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} = \omega(x) - \lambda \Delta \frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial x}, \quad (8)$$

где величина

$$\Phi(x, t) = -\frac{1}{\Delta^2} \int_0^L \eta \sin \left(\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} \eta \right) d\eta \quad (9)$$

представляет собой зависящую от времени потенциальную функцию, $\Delta = 2\mathcal{L}/(N - 1)$ (с учётом (7) $\Delta = 2\Omega/(N - 1)$) – расстояние между соседними осцилляторами с номерами j и $(j - 1)$ в единицах координаты x , $L = \Delta K$ – характерный размер связи каждого осциллятора с другими

элементами сети. Очевидно, что «длинные» связи, возникающие в ходе применения метода Вантса–Строгана построения сети малого мира, будут несколько искажать получающиеся аналитические оценки, однако, с учётом того, что особенности сетей малого мира реализуются при малых значениях вероятностного параметра p [29], можно ожидать, что при малых значениях параметра интенсивности связей λ (до момента возникновения эффекта взрывной синхронизации) подобные искажения будут незначительны.

Можно считать, что внутри синхронного кластера все фазы входящих в кластер осцилляторов изменяются синхронно по закону $\varphi(t, x) = \varphi(x, 0) + \Omega_s t$ (все осцилляторы синхронного кластера совершают колебания с частотой Ω_s), и тогда потенциальная функция $\Phi(x, t)$ для осцилляторов кластера, как это следует из её определения (9), не будет зависеть от времени t и примет вид

$$\Phi_s(x) = -\frac{1}{\Delta^2} \int_0^L \eta \sin(\varphi'(x, 0)\eta) d\eta, \quad (10)$$

а соотношение (8) для этих осцилляторов с учётом (7) может быть записано в виде

$$\Phi'_s(x) = \frac{\Omega x}{\lambda \Delta \mathfrak{L}} - \frac{\Omega_s}{\lambda \Delta}. \quad (11)$$

Обыкновенное дифференциальное уравнение (11) имеет простое решение

$$\Phi_s(x) = \frac{\Omega}{2\lambda \Delta \mathfrak{L}} x^2 - \frac{\Omega_s}{\lambda \Delta} x + C, \quad (12)$$

однако константы Ω_s и C , входящие в решение (12), пока не известны.

Поскольку рассматриваемые сети осцилляторов Курамото состоят пусть из большого, но все-таки конечного числа осцилляторов N , для потенциальной функции (10), описывающей синхронный кластер осцилляторов, следует ввести в рассмотрение её дискретный аналог вида

$$\tilde{\Phi}_s(x_j) = -\sum_{k=1}^K k \sin(\varphi_j - \varphi_{j-k}), \quad (13)$$

где

$$x_j = -\mathfrak{L} + \frac{2\mathfrak{L}}{N-1}(j-1), \quad j = 1, \dots, N. \quad (14)$$

Нетрудно видеть, что в пределе числа элементов сети (и, соответственно, синхронного кластера), стремящегося к бесконечности, потенциальная функция $\Phi_s(x)$ и её дискретный аналог $\tilde{\Phi}_s(x_j)$ совпадают друг с другом:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \tilde{\Phi}_s(x_j) = \Phi_s(x). \quad (15)$$

Из соотношений (13) и (15) следует, что значения потенциальной функции могут принимать ограниченные значения и лежат в диапазоне

$$-S \leq \Phi_s(x) \leq S, \quad 0 < S \leq \frac{K(K+1)}{2}. \quad (16)$$

Основываясь на характере топологии межэлементных связей, внутренней симметрии рассматриваемой сети малого мира и результатах численного моделирования, можно ожидать, что на границах синхронного кластера потенциальная функция (12) будет принимать максимально и минимально возможные значения (16). При этом одна из границ синхронного кластера должна

находиться в точке расположения осцилляторов с максимально различающимися собственными частотами, то есть в $x = \pm \mathfrak{L}$, где $\omega(\pm \mathfrak{L}) = \pm \Omega$, соответственно, и тогда, очевидно,

$$\Phi_s(\pm \mathfrak{L}) = S. \quad (17)$$

Что же касается минимально возможного значения $-S$ потенциальной функции (12), оно должно достигаться в точке минимума $x^* = \Omega_s \mathfrak{L} / \Omega$ функции $\Phi_s(x)$, что в итоге приводит к

$$\Phi_s\left(\frac{\Omega_s \mathfrak{L}}{\Omega}\right) = -S. \quad (18)$$

С учётом граничных условий (17) и (18) для потенциальной функции $\Phi_s(x)$ можно определить значения констант

$$\Omega_{s\pm} = \pm \Omega \mp 2\sqrt{\frac{S\Delta\lambda\Omega}{\mathfrak{L}}} \quad (19)$$

и

$$C = S - 2\sqrt{\frac{S\Omega\mathfrak{L}}{\Delta\lambda}} + \frac{\Omega\mathfrak{L}}{2\Delta\lambda} \quad (20)$$

в соотношении (12)¹.

Существование двух возможных значений частот колебаний синхронного кластера (19) в области положительных (верхний знак в соотношениях (17) и (19)) и отрицательных (нижний знак в соотношениях (17) и (19)) значений координаты x говорит о том, что в рассматриваемой сети малого мира осцилляторов Курамото с увеличением параметра связи λ начинают формироваться два независимых друг от друга синхронных кластера, совершающих колебания на частотах Ω_{s+} и Ω_{s-} , соответственно, причём $\Omega_{s+} = -\Omega_{s-}$. Для каждого из синхронных кластеров будет существовать своя потенциальная функция $\Phi_{s\pm}(x)$, определяемая соотношениями (12), (19) и (20) и достигающая своего минимума в точке

$$x_{\pm}^* = \pm \mathfrak{L} \mp 2\sqrt{\frac{\mathfrak{L}S\Delta\lambda}{\Omega}}. \quad (21)$$

Исходя из симметрии рассматриваемой системы, можно ожидать, что размеры существующих синхронных кластеров будут одинаковыми, поэтому для оценки нормированного размера максимального кластера синхронных осцилляторов (см. рисунок) можно воспользоваться любым из них. Поскольку осцилляторы сети расположены вдоль координаты x эквидистантно, нормированный размер синхронного кластера будет иметь вид

$$f = \frac{\mathfrak{L} - x_{\pm}^*}{\mathfrak{L}} = 2\sqrt{\frac{S\Delta\lambda}{\Omega\mathfrak{L}}}. \quad (22)$$

Очевидно, что полученное в результате аналитических оценок выражение (22) для нормированного размера f максимального синхронного кластера в рассматриваемой сети осцилляторов Курамото оказывается идентичным соотношению (6), которое задаёт явный вид аппроксимирующих кривых А и В на рисунке. Оценивая величину S как $S = K(K + 1)/2$, можно получить явный вид для коэффициента A , входящего в соотношение (6)

$$A = \sqrt{\frac{2K(K + 1)\Delta}{\Omega\mathfrak{L}}}. \quad (23)$$

¹На самом деле, наряду с (19) и (20) существуют ещё решения вида $\Omega_s = \pm \Omega \pm 2\sqrt{\frac{S\Delta\lambda\Omega}{\mathfrak{L}}}$ и $C = S + 2\sqrt{\frac{S\Omega\mathfrak{L}}{\Delta\lambda}} + \frac{\Omega\mathfrak{L}}{2\Delta\lambda}$, но их следует отбросить, как приводящие к «нефизичным» результатам, поскольку для них, например, точка экстремума $x^* = \Omega_s \mathfrak{L} / \Omega$ потенциальной функции $\Phi_s(x)$ лежит вне рассматриваемого интервала $[-\mathfrak{L}, +\mathfrak{L}]$.

Нетрудно видеть, что для рассматриваемого набора управляющих параметров сети малого мира осцилляторов Курамото ($\Omega = 0.5$, $\mathfrak{L} = 0.5$, $\Delta = 10^{-3}$) для случая $K = 8$ (кривая А на рисунке) величина коэффициента (23) оказывается $A = 0.379473 \approx 0.3795$, тогда как для $K = 24$ (кривая В) коэффициент принимает значение $A = 1.09545 \approx 1.0955$, что и представлено на рисунке.

Заключение

Таким образом, из проведённого рассмотрения следует, что в сетях с топологией межэлементных связей «малый мир», точно так же, как в масштабно-инвариантных и случайных сетях, возможно (при определённых условиях) возникновение явления взрывной синхронизации, когда сеть осцилляторов с увеличением параметра связи внезапно и резко переходит в полностью синхронное состояние. При выбранных параметрах сети малого мира (сходных, впрочем, с теми, при которых взрывная синхронизация наблюдается в сетях со случайной топологией связей) с помощью аналитического рассмотрения показано, что взрывному переходу к полностью синхронному состоянию сети осцилляторов Курамото предшествует формирование двух равнозначных (можно сказать, симметричных) синхронных кластеров, совершающих колебания на разных частотах $\Omega_{s\pm}$, определяемых соотношением (19). По мере увеличения параметра λ , характеризующего силу связей между элементами сети малого мира, размер синхронных кластеров увеличивается, причём это увеличение подчиняется закону $\sqrt{\lambda}$ (см. рисунок и соотношение (22)), а частоты, на которых совершают колебания синхронные осцилляторы, входящие в эти кластеры, сближаются друг с другом (см. соотношение (19)), что, в конце концов, с дальнейшим увеличением параметра связи приводит к взрывному установлению синхронизма между всеми элементами сети.

Список литературы

1. *Pikovsky A. S., Rosenblum M. G., Kurths J. Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences.* Cambridge University Press, 2001. 411 p. DOI: 10.1017/CBO9780511755743.
2. *Boccaletti S., Latora V., Moreno V., Chavez M., Hwang D.-U. Complex networks: Structure and dynamics* // *Phys. Rep.* 2006. Vol. 424, no. 4–5. P. 175–308. DOI: 10.1016/j.physrep.2005.10.009.
3. Боккалетти С., Короновский А. А., Трубецков Д. И., Храмов А. Е., Храмова А. Е. Устойчивость синхронного состояния произвольной сети связанных элементов // Изв. вузов. Радиофизика. 2006. Т. 49, № 10. С. 917–924.
4. *Pecora L. M., Carroll T. L. Synchronization in chaotic systems* // *Phys. Rev. Lett.* 1990. Vol. 64, no. 8. P. 821–824. DOI: 10.1103/PhysRevLett.64.821.
5. *Pecora L. M., Carroll T. L. Driving systems with chaotic signals* // *Phys. Rev. A.* 1991. Vol. 44, no. 4. P. 2374–2383. DOI: 10.1103/PhysRevA.44.2374.
6. *Rulkov N. F., Sushchik M. M., Tsimring L. S., Abarbanel H. D. I. Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems* // *Phys. Rev. E.* 1995. Vol. 51, no. 2. P. 980–994. DOI: 10.1103/PhysRevE.51.980.
7. *Rosenblum M. G., Pikovsky A. S., Kurths J. Phase synchronization of chaotic oscillators* // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 76, no. 11. P. 1804–1807. DOI: 10.1103/PhysRevLett.76.1804.
8. *Osipov G. V., Pikovsky A. S., Rosenblum M. G., Kurths J. Phase synchronization effect in a lattice of nonidentical Rössler oscillators* // *Phys. Rev. E.* 1997. Vol. 55, no. 3. P. 2353–2361. DOI: 10.1103/PhysRevE.55.2353.
9. *Rosenblum M. G., Pikovsky A. S., Kurths J. From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators* // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 78, no. 22. P. 4193–4196. DOI: 10.1103/PhysRevLett.78.4193.
10. *Hramov A. E., Koronovskii A. A. An approach to chaotic synchronization* // *Chaos.* 2004. Vol. 14, no. 3. P. 603–610. DOI: 10.1063/1.1775991.

11. Короновский А. А., Москаленко О. И., Трубецков Д. И., Храмов А. Е. Обобщенная синхронизация и синхронизация, индуцированная шумом, – единый тип поведения связанных хаотических систем // Доклады Академии Наук. 2006. Т. 407, № 6. С. 761–765.
12. Короновский А. А., Храмов А. Е., Москаленко О. И., Попов П. В., Филатов Р. А., Стародубов А. В., Дмитриев Б. С., Жарков Ю. Д. Обобщенная хаотическая синхронизация в диапазоне сверхвысоких частот // Методы нелинейной динамики и теории хаоса в задачах электроники сверхвысоких частот. В 2 т. Т. 2. Нестационарные и хаотические процессы / Под ред. А. А. Короновского, Д. И. Трубецкова, А. Е. Храмова. Гл. 9. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. С. 286–315.
13. Вадивасова Т. Е., Анищенко В. С. Взаимосвязь частотных и фазовых характеристик хаоса. Два критерия синхронизации // Радиотехника и электроника. 2004. Т. 49, № 1. С. 77–83.
14. Arenas A., Díaz-Guilera A., Kurths J., Moreno Y., Zhou C. Synchronization in complex networks // Phys. Rep. 2008. Vol. 469, no. 3. P. 93–153. DOI: 10.1016/j.physrep.2008.09.002.
15. Arenas A., Díaz-Guilera A., Pérez-Vicente C. J. Synchronization reveals topological scales in complex networks // Phys. Rev. Lett. 2006. Vol. 96, no. 11. P. 114102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.96.114102.
16. Moreno Y., Pacheco A. F. Synchronization of Kuramoto oscillators in scale-free networks // EPL. 2004. Vol. 68, no. 4. P. 603. DOI: 10.1209/epl/i2004-10238-x.
17. Leyva I., Sevilla-Escoboza R., Buldú J. M., Sendiña-Nadal I., Gómez-Gardeñes J., Arenas A., Moreno Y., Gómez S., Jaimes-Reátegui R., Boccaletti S. Explosive first-order transition to synchrony in networked chaotic oscillators // Phys. Rev. Lett. 2012. Vol. 108, no. 16. P. 168702. DOI: 10.1103/PhysRevLett.108.168702.
18. Gómez-Gardeñes J., Gómez S., Arenas A., Moreno Y. Explosive synchronization transitions in scale-free networks // Phys. Rev. Lett. 2011. Vol. 106, no. 12. P. 128701. DOI: 10.1103/PhysRevLett.106.128701.
19. Leyva I., Navas A., Sendiña-Nadal I., Almendral J. A., Buldú J. M., Zanin M., Papo D., Boccaletti S. Explosive transitions to synchronization in networks of phase oscillators // Sci. Rep. 2013. Vol. 3. P. 1281. DOI: 10.1038/srep01281.
20. Pazó D. Thermodynamic limit of the first-order phase transition in the Kuramoto model // Phys. Rev. E. 2005. Vol. 72, no. 4. P. 046211. DOI: 10.1103/PhysRevE.72.046211.
21. Zhu L., Tian L., Shi D. Criterion for the emergence of explosive synchronization transitions in networks of phase oscillators // Phys. Rev. E. 2013. Vol. 88, no. 4. P. 042921. DOI: 10.1103/PhysRevE.88.042921.
22. Peron T. K. D. M., Rodrigues F. A. Determination of the critical coupling of explosive synchronization transitions in scale-free networks by mean-field approximations // Phys. Rev. E. 2012. Vol. 86, no. 5. P. 056108. DOI: 10.1103/PhysRevE.86.056108.
23. Zou Y., Pereira T., Small M., Liu Z., Kurths J. Basin of attraction determines hysteresis in explosive synchronization // Phys. Rev. Lett. 2014. Vol. 112, no. 11. P. 114102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.112.114102.
24. Peron T. K. D. M., Rodrigues F. A. Explosive synchronization enhanced by time-delayed coupling // Phys. Rev. E. 2012. Vol. 86, no. 1. P. 016102. DOI: 10.1103/PhysRevE.86.016102.
25. Kuramoto Y. Self-entrainment of a population of coupled non-linear oscillators // In: Araki H. (eds) International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics. Vol. 39 of Lecture Notes in Physics. Springer, Berlin, Heidelberg, 1975. P. 420–422. DOI: 10.1007/BFb0013365.
26. Acebrón J. A., Bonilla L. L., Pérez-Vicente C. J., Ritort F., Spigler R. The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena // Rev. Mod. Phys. 2005. Vol. 77, no. 1. P. 137–185. DOI: 10.1103/RevModPhys.77.137.
27. Hu X., Boccaletti S., Huang W., Zhang X., Liu Z., Guan S., Lai C.-H. Exact solution for first-order

- synchronization transition in a generalized Kuramoto model // *Sci. Rep.* 2014. Vol. 4. P. 7262. DOI: 10.1038/srep07262.
28. *Boccaletti S., Almendral J.A., Guan S., Leyva I., Liu Z., Sendiña-Nadal I., Wang Z., Zou Y.* Explosive transitions in complex networks' structure and dynamics: Percolation and synchronization // *Phys. Rep.* 2016. Vol. 660. P. 1–94. DOI: 10.1016/j.physrep.2016.10.004.
 29. *Watts D. J., Strogatz S. H.* Collective dynamics of ‘small-world’ networks // *Nature*. 1998. Vol. 393, no. 6684. P. 440–442. DOI: 10.1038/30918.
 30. *Koronovskii A. A., Kurovskaya M. K., Moskalenko O. I., Hramov A., Boccaletti S.* Self-similarity in explosive synchronization of complex networks // *Phys. Rev. E*. 2017. Vol. 96, no. 6. P. 062312. DOI: 10.1103/PhysRevE.96.062312.
 31. *Gómez-Gardeñes J., Moreno Y., Arenas A.* Paths to synchronization on complex networks // *Phys. Rev. Lett.* 2007. Vol. 98, no. 3. P. 034101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.98.034101.
 32. *Gómez-Gardeñes J., Moreno Y., Arenas A.* Synchronizability determined by coupling strengths and topology on complex networks // *Phys. Rev. E*. 2007. Vol. 75, no. 6. P. 066106. DOI: 10.1103/PhysRevE.75.066106.
 33. *Stout J., Whiteway M., Ott E., Girvan M., Antonsen T. M.* Local synchronization in complex networks of coupled oscillators // *Chaos*. 2011. Vol. 21, no. 2. P. 025109. DOI: 10.1063/1.3581168.

References

1. Pikovsky AS, Rosenblum MG, Kurths J. *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences*. Cambridge University Press; 2001. 411 p. DOI: 10.1017/CBO9780511755743.
2. Boccaletti S, Latora V, Moreno V, Chavez M, Hwang DU. Complex networks: Structure and dynamics. *Phys. Rep.* 2006;424(4–5):175–308. DOI: 10.1016/j.physrep.2005.10.009
3. Boccaletti S, Koronovsky AA, Trubetskoy DI, Khramov AE, Khramova AE. Stability of the synchronous state of an arbitrary network of coupled elements. *Radiophys. Quantum Electron.* 2006;49(10):826–833. DOI: 10.1007/s11141-006-0118-x.
4. Pecora LM, Carroll TL. Synchronization in chaotic systems. *Phys. Rev. Lett.* 1990;64(8):821–824. DOI: 10.1103/PhysRevLett.64.821.
5. Pecora LM, Carroll TL. Driving systems with chaotic signals. *Phys. Rev. A*. 1991;44(4):2374–2383. DOI: 10.1103/PhysRevA.44.2374.
6. Rulkov NF, Sushchik MM, Tsimring LS, Abarbanel HDI. Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems. *Phys. Rev. E*. 1995;51(2):980–994. DOI: 10.1103/PhysRevE.51.980.
7. Rosenblum MG, Pikovsky AS, Kurths J. Phase synchronization of chaotic oscillators. *Phys. Rev. Lett.* 1996;76(11):1804–1807. DOI: 10.1103/PhysRevLett.76.1804.
8. Osipov GV, Pikovsky AS, Rosenblum MG, Kurths J. Phase synchronization effect in a lattice of nonidentical Rössler oscillators. *Phys. Rev. E*. 1997;55(3):2353–2361. DOI: 10.1103/PhysRevE.55.2353.
9. Rosenblum MG, Pikovsky AS, Kurths J. From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators. *Phys. Rev. Lett.* 1997;78(22):4193–4196. DOI: 10.1103/PhysRevLett.78.4193.
10. Hramov AE, Koronovskii AA. An approach to chaotic synchronization. *Chaos*. 2004;14(3):603–610. DOI: 10.1063/1.1775991.
11. Koronovskii AA, Moskalenko OI, Trubetskoy DI, Khramov AE. Generalized synchronization and noise-induced synchronization: The same type of behavior of coupled chaotic systems. *Dokl. Phys.* 2006;51(4):189–192. DOI: 10.1134/S1028335806040070.
12. Koronovskii AA, Hramov AE, Moskalenko OI, Popov PV, Filatov RA, Starodubov AV, Dmitriev BS, Zharkov YD. Generalized chaotic synchronization in the microwave frequency range. In: Koronovskii AA, Trubetskoy DI, Hramov AE, editors. *Methods of Nonlinear Dynamics and*

- Chaos Theory in Problems of Microwave Electronics. In 2 volumes. Vol. 2. Non-stationary and Chaotic Processes. Ch. 9. M.: FIZMATLIT; 2009. P. 286–315 (in Russian).
13. Vadivasova TE, Anishchenko VS. Relationship between frequency and phase characteristics of chaos: Two criteria of synchronization. *J. Commun. Technol. Electron.* 2004;49(1):69–75.
 14. Arenas A, Díaz-Guilera A, Kurths J, Moreno Y, Zhou C. Synchronization in complex networks. *Phys. Rep.* 2008;469(3):93–153. DOI: 10.1016/j.physrep.2008.09.002.
 15. Arenas A, Díaz-Guilera A, Pérez-Vicente CJ. Synchronization reveals topological scales in complex networks. *Phys. Rev. Lett.* 2006;96(11):114102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.96.114102.
 16. Moreno Y, Pacheco AF. Synchronization of Kuramoto oscillators in scale-free networks. *EPL*. 2004;68(4):603. DOI: 10.1209/epl/i2004-10238-x.
 17. Leyva I, Sevilla-Escoboza R, Buldú JM, Sendiña-Nadal I, Gómez-Gardeñes J, Arenas A, Moreno Y, Gómez S, Jaimes-Reátegui R, Boccaletti S. Explosive first-order transition to synchrony in networked chaotic oscillators. *Phys. Rev. Lett.* 2012;108(16):168702. DOI: 10.1103/PhysRevLett.108.168702.
 18. Gómez-Gardeñes J, Gómez S, Arenas A, Moreno Y. Explosive synchronization transitions in scale-free networks. *Phys. Rev. Lett.* 2011;106(12):128701. DOI: 10.1103/PhysRevLett.106.128701.
 19. Leyva I, Navas A, Sendiña-Nadal I, Almendral JA, Buldú JM, Zanin M, Papo D, Boccaletti S. Explosive transitions to synchronization in networks of phase oscillators. *Sci. Rep.* 2013;3:1281. DOI: 10.1038/srep01281.
 20. Pazó D. Thermodynamic limit of the first-order phase transition in the Kuramoto model. *Phys. Rev. E*. 2005;72(4):046211. DOI: 10.1103/PhysRevE.72.046211.
 21. Zhu L, Tian L, Shi D. Criterion for the emergence of explosive synchronization transitions in networks of phase oscillators. *Phys. Rev. E*. 2013;88(4):042921. DOI: 10.1103/PhysRevE.88.042921.
 22. Peron TKDM, Rodrigues FA. Determination of the critical coupling of explosive synchronization transitions in scale-free networks by mean-field approximations. *Phys. Rev. E*. 2012;86(5):056108. DOI: 10.1103/PhysRevE.86.056108.
 23. Zou Y, Pereira T, Small M, Liu Z, Kurths J. Basin of attraction determines hysteresis in explosive synchronization. *Phys. Rev. Lett.* 2014;112(11):114102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.112.114102.
 24. Peron TKDM, Rodrigues FA. Explosive synchronization enhanced by time-delayed coupling. *Phys. Rev. E*. 2012;86(1):016102. DOI: 10.1103/PhysRevE.86.016102.
 25. Kuramoto Y. Self-entrainment of a population of coupled non-linear oscillators. In: Araki H, editor. International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics. Vol. 39 of Lecture Notes in Physics. Springer, Berlin, Heidelberg; 1975. P. 420–422. DOI: 10.1007/BFb0013365.
 26. Acebrón JA, Bonilla LL, Pérez-Vicente CJ, Ritort F, Spigler R. The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena. *Rev. Mod. Phys.* 2005;77(1):137–185. DOI: 10.1103/RevModPhys.77.137.
 27. Hu X, Boccaletti S, Huang W, Zhang X, Liu Z, Guan S, Lai CH. Exact solution for first-order synchronization transition in a generalized Kuramoto model. *Sci. Rep.* 2014;4:7262. DOI: 10.1038/srep07262.
 28. Boccaletti S, Almendral JA, Guan S, Leyva I, Liu Z, Sendiña-Nadal I, Wang Z, Zou Y. Explosive transitions in complex networks' structure and dynamics: Percolation and synchronization. *Phys. Rep.* 2016;660:1–94. DOI: 10.1016/j.physrep.2016.10.004.
 29. Watts DJ, Strogatz SH. Collective dynamics of ‘small-world’ networks. *Nature*. 1998;393(6684):440–442. DOI: 10.1038/30918.
 30. Koronovskii AA, Kurovskaya MK, Moskalenko OI, Hramov A, Boccaletti S. Self-similarity in explosive synchronization of complex networks. *Phys. Rev. E*. 2017;96(6):062312. DOI: 10.1103/PhysRevE.96.062312.
 31. Gómez-Gardeñes J, Moreno Y, Arenas A. Paths to synchronization on complex networks. *Phys. Rev. Lett.* 2007;98(3):034101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.98.034101.

32. Gómez-Gardeñes J, Moreno Y, Arenas A. Synchronizability determined by coupling strengths and topology on complex networks. *Phys. Rev. E.* 2007;75(6):066106. DOI: 10.1103/PhysRevE.75.066106.
33. Stout J, Whiteway M, Ott E, Girvan M, Antonsen TM. Local synchronization in complex networks of coupled oscillators. *Chaos.* 2011;21(2):025109. DOI: 10.1063/1.3581168.



Короновский Алексей Александрович – родился в Саратове (1972). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (СГУ, 1995), доктор физико-математических наук (2007), профессор (2009), заведующий кафедрой физики открытых систем СГУ, проректор по научной работе и цифровому развитию СГУ. Область научных интересов – динамический хаос, нелинейная динамика и ее проявления в различных сферах человеческой деятельности. Автор научных монографий и статей в отечественных и зарубежных рецензируемых журналах.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
 Саратовский национальный исследовательский
 государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
 E-mail: alexey.koronovskii@gmail.com
 ORCID: 0000-0003-3585-317X



Куровская Мария Константиновна – окончила с отличием факультет нелинейных процессов СГУ (2007). В 2009 г. защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности «радиофизика». Доцент кафедры физики открытых систем СГУ (с 2018 г.). Научные интересы – хаотическая синхронизация, перемежающееся поведение, влияние шума на установление синхронных режимов, динамика сложных сетей, нейрофизиология. Опубликовала около 40 статей в центральных реферируемых отечественных и зарубежных журналах по указанным направлениям.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
 Саратовский национальный исследовательский
 государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
 E-mail: mariakurovskaya@gmail.com
 ORCID: 0000-0002-2805-8402



Москаленко Ольга Игоревна – родилась в Саратове (1984), окончила факультет нелинейных процессов СГУ (2006), кандидат физико-математических наук (2008), доцент (2012), доктор физико-математических наук (2017). Профессор кафедры физики открытых систем СГУ, начальник управления научной деятельности СГУ. Область научных интересов – исследование классической и хаотической синхронизации и явлений, имеющих место на ее границе, в нелинейных системах; применение непрерывного вейвлет- и фурье-анализа к проблеме хаотической синхронизации в системах с малым числом степеней свободы и пространственно-распределенных средах; изучение обобщенной синхронизации в системах с односторонней и взаимной связью и ее возможных приложений; влияние шума на установление синхронных режимов и характеристики перемежаемости; применение хаотической синхронизации для скрытой передачи информации; анализ хаотической синхронизации в сложных сетях; разработка методов анализа поведения систем по временным рядам и их применение к живым системам. Автор более 150 статей в центральных реферируемых отечественных и зарубежных журналах.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
 Саратовский национальный исследовательский
 государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
 E-mail: o.i.moskalenko@gmail.com
 ORCID: 0000-0001-5727-5169