

Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2021. Т. 29, № 4
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2021;29(4)

Научная статья

УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-4-538-548

Моделирование волновых структур на фронте горения

Э. О. Якупов[✉], В. В. Губернов, А. А. Полежаев

Физический институт имени П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия

E-mail: [✉]edward.thirst@gmail.com, gubernov@lpi.ru, apol@lpi.ru

Поступила в редакцию 31.03.2021, принята к публикации 19.04.2021,
опубликована 30.07.2021

Аннотация. В экспериментальных исследованиях распространения волн горения в газообразных средах было обнаружено, что в определённых условиях на фронте возникают автоволновые – спиральные или концентрические – структуры. Цель настоящего исследования – исходя из известной химической кинетики горения водорода, предложить математическую модель, способную объяснить это явление. **Модель.** Исходная детальная модель вначале была редуцирована до четырёх уравнений, адекватно описывающих распространение волны горения. Для объяснения структур на фронте горения была проведена дальнейшая редукция модели до двух уравнений. **Результаты.** Было проведено аналитическое исследование полученной модели, которое продемонстрировало, что она может описать возникновение спиральных волн, а также были определены соответствующие условия на параметры модели. Эти аналитические результаты были подтверждены в численных экспериментах. **Заключение.** Таким образом продемонстрировано, что модель, построенная на основе редукции известной кинетической схемы горения водорода, способна объяснить наблюдаемые экспериментально автоволновые структуры на распространяющемся фронте горения.

Ключевые слова: волны горения, автоволновые структуры, нелинейные системы, математическое моделирование.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 19-02-00610.

Для цитирования: Якупов Э. О., Губернов В. В., Полежаев А. А. Моделирование волновых структур на фронте горения // Известия вузов. ПНД. 2021. Т. 29, № 4. С. 538–548. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-4-538-548

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Modeling of wave patterns at the combustion front

E. O. Yakupov[✉], V. V. Gubernov, A. A. Polezhaev

P. N. Lebedev Physical Institute, Moscow, Russia

E-mail: [✉]edward.thrst@gmail.com, gubernov@lpi.ru, apol@lpi.ru

Received 31.03.2021, accepted 19.04.2021, published 30.07.2021

Abstract. In experimental studies of the propagation of combustion waves in gaseous media, it was found that, under certain conditions, autowave – spiral or target – patterns appear at the wave front. The *purpose* of the present study is to propose a mathematical model that can explain this phenomenon based on the known chemical kinetics of hydrogen combustion. *Model.* The original detailed model was first reduced to four equations that adequately describe the propagation of the combustion wave. To explain the structures at the combustion front, the model was further reduced to two equations. *Results.* An analytical study of the resulting model was carried out, which demonstrated that it can describe the occurrence of spiral waves, and the corresponding conditions for the parameters of the model were determined. These analytical results have been confirmed in numerical experiments. *Conclusion.* Thus, it has been demonstrated that the model constructed on the basis of the reduction of the known kinetic scheme of hydrogen combustion is capable of explaining the experimentally observed autowave patterns at the propagating combustion front.

Keywords: combustion waves, autowave structures, nonlinear systems, mathematical modeling.

Acknowledgements. This work was supported by Russian Foundation for Basic Research, grant No. 19-02-00610.

For citation: Yakupov EO, Gubernov VV, Polezhaev AA. Modeling of wave patterns at the combustion front. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2021;29(4):538–548. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-4-538-548

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Возникновение разнообразных пространственно-временных режимов – автоколебаний, волн, структур, хаоса – характерно как для неживых, так и для живых систем. В книгах Дмитрия Ивановича Трубецкова [1–3] представлено множество примеров таких систем, а также описаны подходы к их исследованию. Наиболее удобными объектами для изучения таких режимов оказались химические системы, в которых удалось наблюдать множество пространственно-временных режимов [4–8], в частности, распространяющиеся волны, пульсирующие, хаотичные, кольцевые, спиральные, квазипериодические, стационарные неоднородные структуры. В некоторых случаях химические реакции протекают не равномерно в пространстве, а в виде распространяющегося фронта. Среди таких – реакция между изначально разделенными реагентами, которые в результате реакции образуют неравномерно распределенный осадок (так называемые структуры Лизеганга) [9], и самораспространяющийся высокотемпературный синтез (СВС) [10]. Другим ярким примером является распространение фронта пламени. В системах горения возникновение нелинейных волновых структур может быть обусловлено диффузионно-тепловыми [11] или гидродинамическими неустойчивостями [7]. Как известно, возникновение диффузионно-тепловых неустойчивостей связано с нарушением равновесия между потоками тепла и реагентов, которое выражается числом Льюиса [12]. В случае, когда число Льюиса меньше единицы, возникает ячеистая структура или, в терминах нелинейной динамики, диссипативная (тиюриковская) структура, что проявляется в формировании неоднородного распределения температуры в плоскости фронта пламени. Для числа Льюиса больше единицы на фронте пламени возникают неустойчивости распространения и пульсации, которые приводят к формированию различных нестационарных режимов горения.

В работах [13–18] приведены результаты исследований горения предварительно перемешанных смесей углеводородных топлив и кислорода, стабилизированных на пористой горелке. Было установлено, что при определенных условиях могут возникать пульсирующие, концентрические, спиральные, ячеистые волны. Динамика этих нелинейных структур также может усложняться и приводить к формированию квазипериодических и хаотических режимов горения. Количественно и качественно с помощью асимптотического [13, 16] и численного анализа [17, 18], соответственно, было показано, что формирование таких режимов обусловлено возникновением диффузионно-тепловой неустойчивости. В серии экспериментов со сферически расширяющимся пламенем [19–21] при высоких давлениях продемонстрировано, что на поверхности радиально расширяющегося пламени могут появляться спиральные и концентрические структуры. В этих примерах существуют два типа нелинейных волн: движущийся или расширяющийся фронт горения и нелинейная структура (спиральные или концентрические волны), которая появляется на фоне этого фронта и распространяется вместе с ним.

Ранее мы продемонстрировали, что как автоволновые, так и ячеистые структуры на распространяющемся фронте горения могут быть описаны в рамках блочной модели, в которой один блок описывает волну горения, а другой – возникающие на ней структуры [22, 23]. При этом мы для каждого из блоков использовали простые феноменологические модели, никак не отражающие конкретные детали процесса. Этот недостаток был восполнен в наших дальнейших исследованиях. А именно, используя известную кинетическую схему элементарных реакций окисления водорода, мы построили детальную математическую модель, редуцировали её до четырёх уравнений, которые смогли адекватно описать распространяющуюся волну горения богатой водород-воздушной смеси (эти результаты готовятся к публикации). В настоящей статье представлены некоторые результаты исследований, являющихся продолжением этих работ. Нами показано, что дальнейшая редукция этих четырёх уравнений до блока из двух уравнений, соответствующих критическим процессам на фронте волны, приводит к модели, способной объяснить возникновение на нём спиральных волн, наблюдавшихся в экспериментах.

1. Модель

При построении модели мы исходили из детальной кинетической схемы окисления водорода [24], включающей 38 прямых и обратных элементарных реакций. Редукция детальной модели проводилась с учётом известных из эксперимента значений скоростей реакций. В результате была получена модель, содержащая три уравнения для наиболее значимых компонентов – радикалов H , HO_2 и кислорода O_2 , а также четвёртое уравнение для температуры Θ . Численное исследование этой модели продемонстрировало хорошее качественное и количественное соответствие как детальной модели, так и эксперименту. При этом оказалось, что фронт горения не однороден по распределению радикалов, а формирует два слоя – условно высокотемпературный, в котором доминируют радикалы H , и низкотемпературный, где, в основном, присутствуют радикалы HO_2 . Это согласуется с расчетами, проведенными в рамках модели с детальным механизмом реакции [25], где также была найдена подобная двухслойная структура фронта горения. Было высказано предположение, что структуры на фронте волны горения формируются именно в низкотемпературном слое. Чтобы это доказать, мы провели дальнейшую редукцию модели и оставили два уравнения – для радикалов HO_2 и температуры Θ . После обезразмеривания эти уравнения имеют следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = p - m \exp(-E/\Theta)u + D_u \Delta u, \quad (1a)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \gamma(m \exp(-E/\Theta)u - k(\Theta - \Theta_0)) + D_\Theta \Delta \Theta. \quad (1b)$$

Качественно смысл членов этих уравнений следующий. В первом уравнении для радикала HO_2 , концентрация которого обозначена переменной u , первый член соответствует их производству с постоянной скоростью p за счёт подпитки радикалами H из высокотемпературного слоя. Данный путь реакции главным образом определяется элементарной стадией $\text{H} + \text{O}_2 + \text{M} \rightarrow \text{HO}_2 + \text{M}$, которая является доминирующим каналом разветвления цепи при высоких давлениях и обладает нулевой энергией активации. Второй член в уравнении (1a) соответствует рекомбинации радикала HO_2 и определяется, в основном, реакциями HO_2 и H , имеющими относительно невысокую энергию активации [24]. Скорость рекомбинации подчиняющаяся закону Аррениуса $m \exp(-E/\Theta)$ с энергией активации E . Эта реакция экзотермическая, поэтому аналогичный член входит и во второе уравнение для температуры Θ . Поскольку мы будем исследовать эти уравнения в двумерном случае (в плоскости низкотемпературного слоя), то в уравнение (1b) для температуры мы добавили линейный член $k(\Theta - \Theta_0)$, который описывает релаксацию температуры к равновесному для рассматриваемого слоя значению и по сути является следствием диффузии тепла поперёк слоя, которой мы пренебрегли. Множитель γ соответствует отношению характерных времён, возникающих в результате редукции исходной кинетической схемы и обезразмеривания. Отметим, что полученная нами модель по сути аналогична феноменологической модели Сальникова [26], которая применялась для объяснения автоволн в пламенах [27].

Параметрический анализ уравнений (1) показывает, что они могут описывать автоволны, если выполняются следующие условия.

- i) Нуль-изоклина второго уравнения $u = \frac{k}{m}(\Theta - \Theta_0) \exp(E/\Theta)$ немонотонна. Это имеет место, когда $E > 4\Theta_0$.
- ii) Система находится в возбудимом состоянии. Это, в частности, имеет место, когда стационарная точка $(\Theta_s, u_s) = (\Theta_0 + \frac{p}{k}, \frac{p}{m} \exp(E/(\Theta_0 + \frac{p}{k})))$ расположена на левой – «устойчивой» – ветви этой изоклины. Соответствующее условие: $\Theta_0 + \frac{p}{k} < (E - \sqrt{E^2 - 4E\Theta_0})/2$.
- iii) Вторая переменная – температура – является более «быстрой», $\gamma \gg 1$, и диффундирует быстрее первой: $D_u < D_\Theta$, то есть число Льюиса больше единицы.

На рис. 1 приведен фазовый портрет уравнений (1), удовлетворяющих сформулированным выше условиям.

Численные эксперименты проводились с разделением по физическим процессам с использованием метода RHOC ADI [28]. Вычисления проводились в квадратной области 50×50 на сетке

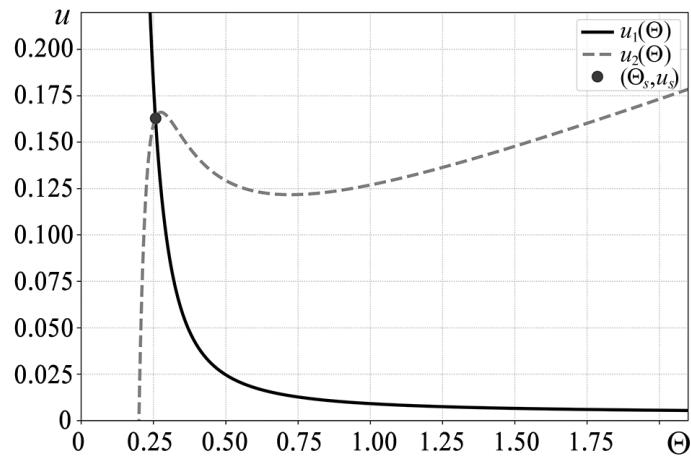


Рис. 1. Фазовый портрет системы уравнений (1). Нуль-изоклина первого уравнения: $u = \frac{p}{m} \exp(E/\Theta)$, второго уравнения – $u = \frac{k}{m}(\Theta - \Theta_0) \exp(E/\Theta)$. Стационарная точка: $(\Theta_s, u_s) = (\Theta_0 + \frac{p}{k}, \frac{p}{m} \exp(E/(\Theta_0 + \frac{p}{k})))$

Fig. 1. Phase portrait of Eqs. (1). Null-cline of the first equation: $u = \frac{p}{m} \exp(E/\Theta)$, of the second equation – $u = \frac{k}{m}(\Theta - \Theta_0) \exp(E/\Theta)$. Stationary point: $(\Theta_s, u_s) = (\Theta_0 + \frac{p}{k}, \frac{p}{m} \exp(E/(\Theta_0 + \frac{p}{k})))$

2500×2500 с пространственным шагом 0.02 и с шагом по времени 0.005. В качестве граничных использовались условия нулевых потоков. Для проверки сходимости варьировали шаги и по пространству, и по времени. Корректность выбора пространственного шага подтверждается тем, что картина не меняется как при уменьшении, так и при увеличении шага вдвое при соответствующем изменении количества узлов сетки (см. ниже, рис. 4).

2. Результаты

В численных экспериментах мы продемонстрируем, что модель (1) при выполнении условий i)–iii), сформулированных выше, действительно способна описать формирование спиральных волн. Выбираем следующие значения параметров, удовлетворяющие этим условиям: $\gamma = 100$, $p = 0.005$, $m = 1.2$, $E = 1.0$, $k = 0.07$, $\Theta_0 = 0.2$, $D_u = 0.001$ и $D_\Theta = 0.01$. При этих значениях параметров стационарное состояние в соответствующей нераспределённой системе устойчиво, но возбудимо: при отклонении от стационарного состояния система проходит конечный цикл возбуждения, которое при наличии диффузионной связи формирует бегущую волну.

Для демонстрации того, что в выбранной системе возможно появление структур, в частности спиральных волн, к условиям возбудимости системы необходимо задать правильные начальные условия. Чтобы возникла спиральная волна, надо сформировать начальную волну возбуждения с характерной рефрактерной зоной. В качестве начального условия мы выбираем плоскую волну, полученную решением уравнений (1) в одномерном случае, разорванную в средней части.

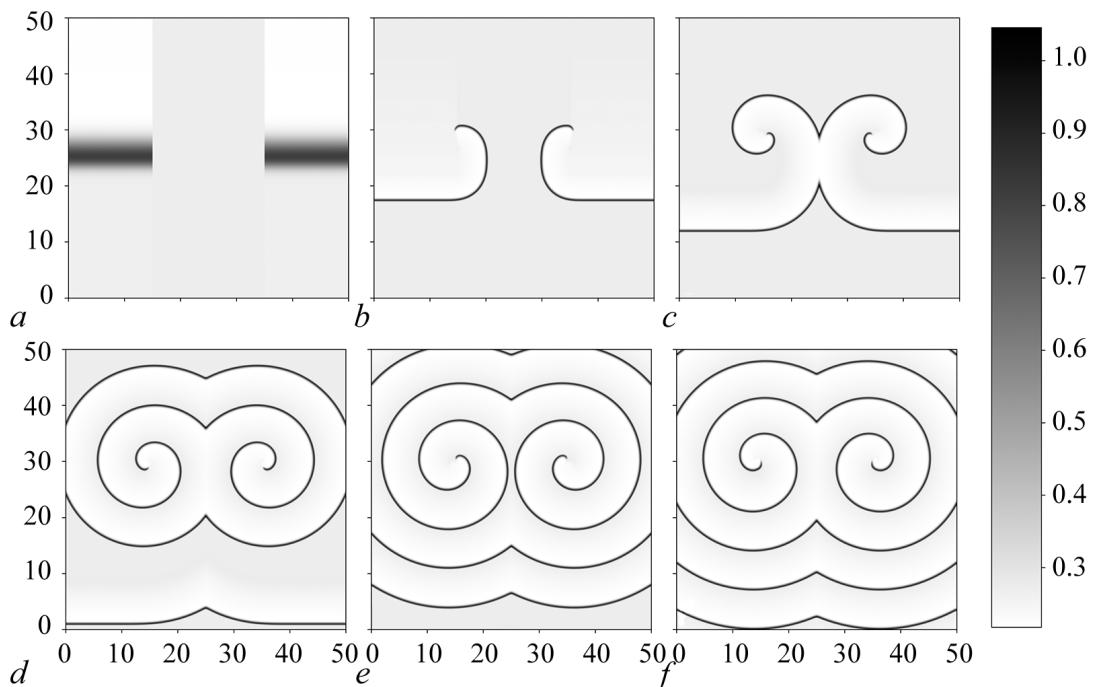


Рис. 2. Результат моделирования спиральных волн в двумерной области. На рисунке показана переменная Θ . Параметры уравнений (1) соответствуют устойчивой ветви нуль-изоклины второго уравнения на диаграмме рис. 1: $D_u = 0.001$, $D_\Theta = 0.01$, $\Theta_0 = 0.2$, $p = 0.0050$. Фрагмент (a) соответствует начальному состоянию, а фрагменты (b–f) соответствуют 25, 50, 100, 150, 200 единицам времени

Fig. 2. The result of spiral wave modelling in a two-dimensional domain. The variable Θ is shown in the figure. The parameters of Eqs. (1) correspond to the stable branch of the null-cline of the second equation in Fig. 1: $D_u = 0.001$, $D_\Theta = 0.01$, $\Theta_0 = 0.2$, $p = 0.0050$. The fragment (a) corresponds to the initial state, and fragments (b–f) correspond to the 25, 50, 100, 150, 200 time units

В результате формируется пара противоположно вращающихся спиральных волн. Результаты моделирования представлены на рис. 2, где можно проследить эволюцию спиральной волны на двумерной плоскости. На рисунках изображена переменная Θ . Благодаря незанятыму пространству в центре, свободные концы начинают заполнять эту возбудимую область и формировать два витка (рис. 2, a–c), которые и образуют соответственно два ядра спиральных волн (рис. 2, d–f). В итоге образуется устойчивая спиральная структура.

Мы также исследовали случай, когда не выполняется условие возбудимости ii), сформулированное выше. Это означает, что стационарная точка на рис. 1 перемещается с устойчивой левой ветви на среднюю неустойчивую ветвь изоклины второго уравнения системы (1). Для этого достаточно увеличить параметр p , отвечающий за скорость производства радикала u , с 0.005 до 0.0055. Оставляя значения других параметров прежними, заполним двумерное пространство затравочной волной только с одной стороны. При таких условиях мы получаем картину, изображенную на рис. 3. В таком режиме волна теряет свою устойчивость и форму и начинает дробиться. Получившиеся в результате свободные концы служат источниками следующих волн (рис. 3, a–c), что приводит к дальнейшему каскаду и заполнению той части пространства, где было начальное возмущение, короткоживущими хаотическими структурами (рис. 3, d–f). В итоге область разделилась на две части: одна, где было начальное возмущение и возникли хаотические структуры; и другая, где начальное состояние соответствовало стационарному и образовались устойчивые фазовые волны.

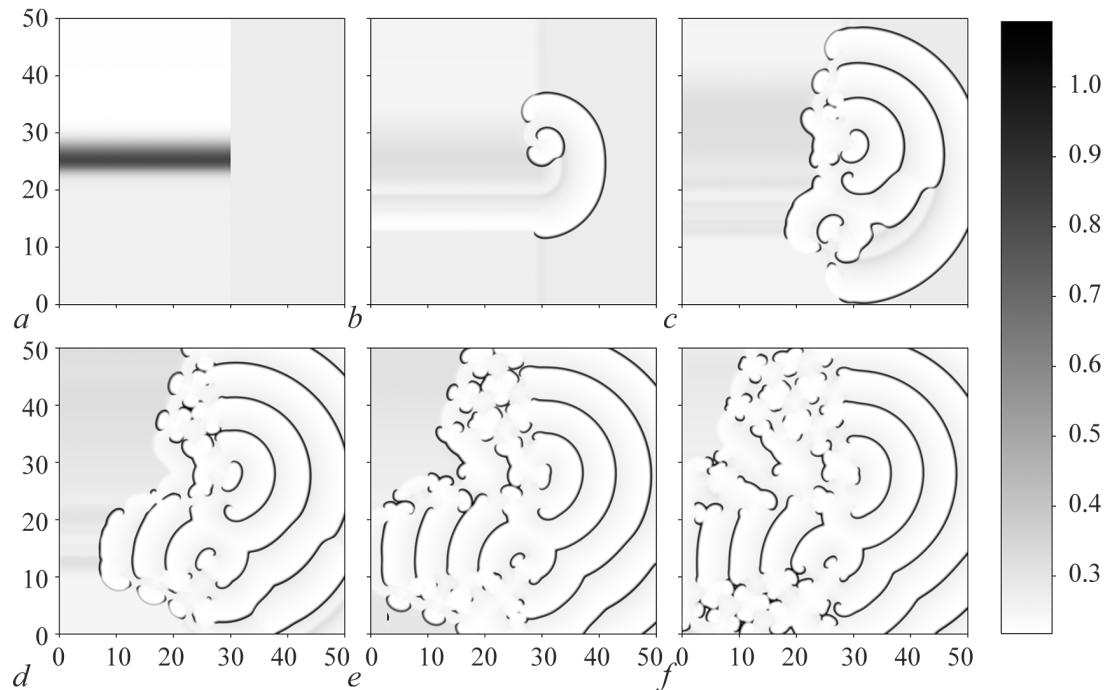


Рис. 3. Результат моделирования неустойчивых структур в двумерной области. Параметры модели (1) определяют колебательный режим: $D_u = 0.001$, $D_\Theta = 0.01$, $\Theta_0 = 0.2$, $p = 0.0055$. На рисунке изображена переменная Θ . На фрагментах (a–c) показано дробление начальной волны в моменты времени 0, 50, 100. На фрагментах (d–f) – разделение области на хаотическую и регулярную части в моменты 150, 200, 250

Fig. 3. The result of modelling of nonstationary patterns in a two-dimensional domain. The parameters of Eqs. (1) correspond to oscillatory regime: $D_u = 0.001$, $D_\Theta = 0.01$, $\Theta_0 = 0.2$, $p = 0.0055$. The variable Θ is shown in the figure. In fragments (a–c) splitting of the initial wave is shown at 0, 50, 100 time units. In fragments (d–f) one can see separation of the domain in chaotic and regular parts at time points 150, 200, 250

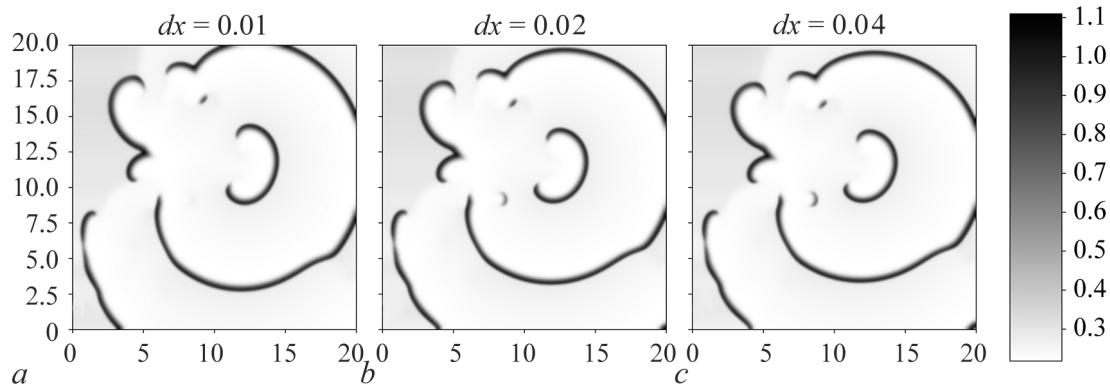


Рис. 4. Хаотические волновые структуры в области 20×20 , в момент времени 97.5, полученные при вычислении с шагом: 0.01 (a), 0.02 (b) и 0.04 (c)

Fig. 4. Chaotic wave structures in the 20×20 region, at the moment of time 97.5, obtained by calculating with steps: 0.01 (a), 0.02 (b) and 0.04 (c)

Для проверки корректности выбора пространственного шага мы провели вычисления для последнего случая в области меньшего размера – 20×20 с двукратным уменьшением и увеличением шага. Результаты, представленные на рис. 4, демонстрируют полное совпадение.

Заключение

В настоящем исследовании мы продемонстрировали, что последовательной редукцией полной модели, основанной на детальной схеме окисления водорода, может быть получена простая модель, которая, как показали численные эксперименты, способна описать автоволновые двумерные структуры. Модель по своей структуре аналогична модели Сальникова [26], предложенной им в 40-х годах прошлого века для объяснения осцилляций в процессах горения, однако, в отличие от последней, она учитывает реальные химические процессы. Эта модель, содержащая два уравнения для радикалов HO_2 и температуры, является блоком более полной модели, описывающей распространение волны горения в богатой водород-кислородной смеси, в которую помимо этих переменных входят кислород и радикалы Н. Таким образом, мы показали, что формирование автоволновых структур на фронте волны горения вполне может быть описано в рамках достаточно простой, но реалистичной модели, полученной редукцией детальной кинетической схемы. Мы показали, что автоволны могут формироваться в передней – низкотемпературной – зоне фронта, где доминируют радикалы HO_2 . Продемонстрировано, что в зависимости от параметров модели могут формироваться как регулярные, так и хаотические спиральные структуры, что находится в хорошем согласии с экспериментом.

Список литературы

1. Трубецков Д. И. Введение в синергетику. Колебания и волны. М: Либроком, 2011. 224 с.
2. Трубецков Д. И. Введение в синергетику: Хаос и структуры. М: Либроком, 2014. 240 с.
3. Ильин И. В., Алешиковский И. А., Иванов А. В., Короновский А. А., Страхова Л. М., Трубецков А. Д., Трубецков Д. И., Храмов А. Е., Яшков И. А. Нелинейная динамика глобальных процессов в природе и обществе. М: Издательство МГУ, 2014. 453 с.

4. *Walgraef D.* Spatio-Temporal Pattern Formation: With Examples from Physics, Chemistry, and Materials Science. Springer-Verlag New York, 1997. 306 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-1850-0.
5. *Cross M. C., Hohenberg P. C.* Pattern formation outside of equilibrium // Rev. Mod. Phys. 1993. Vol. 65, no. 3. P. 851. DOI: 10.1103/RevModPhys.65.851.
6. *Camazine S., Deneubourg J.-L., Franks N. R., Sneyd J., Theraula G., Bonabeau E.* Self-Organization in Biological Systems. Princeton University Press, 2003. 562 p.
7. *Sivashinsky G. I.* Instabilities, pattern formation, and turbulence in flames // Annu. Rev. Fluid Mech. 1983. Vol. 15, no. 1. P. 179–199. DOI: 10.1146/annurev.fl.15.010183.001143.
8. *Ju Y., Maruta K.* Microscale combustion: Technology development and fundamental research // Prog. Energy Combust. Sci. 2011. Vol. 37, no. 6. P. 669–715. DOI: 10.1016/j.pecs.2011.03.001.
9. *Liesegang R. E.* Ueber einige Eigenschaften von Gallerten // Naturw. Wochenschr. 1896. Bd. 11, Nr. 30. S. 353–362.
10. *Мержанов А. Г., Боровинская И. П.* Самораспространяющийся высокотемпературный синтез тугоплавких неорганических соединений // Докл. АН СССР. 1972. Т. 204, № 2. С. 366–369.
11. *Matkowsky B. J., Olagunju D. O.* Propagation of a pulsating flame front in a gaseous combustible mixture // SIAM J. Appl. Math. 1980. Vol. 39, no. 2. P. 290–300. DOI: 10.1137/0139025.
12. *Zeldovich Y. B., Barenblatt G. I., Librovich V. B., Makhviladze G. M.* The Mathematical Theory of Combustion and Explosions. Consultants Bureau, New York, 1985. 597 p.
13. *Buckmaster J.* Stability of the porous plug burner flame // SIAM J. Appl. Math. 1983. Vol. 43, no. 6. P. 1335–1349. DOI: 10.1137/0143089.
14. *Gorman M., Hamill C. F., El-Hamdi M., Robbins K. A.* Rotating and modulated rotating states of cellular flames // Combust. Sci. Technol. 1994. Vol. 98, no. 1–3. P. 25–35. DOI: 10.1080/00102209408935394.
15. *Gorman M., El-Hamdi M., Robbins K. A.* Chaotic dynamics near the extinction limit of a premixed flame on a porous plug burner // Combust. Sci. Technol. 1994. Vol. 98, no. 1–3. P. 47–56. DOI: 10.1080/00102209408935396.
16. *Kurdyumov V. N., Sánchez-Sanz M.* Influence of radiation losses on the stability of premixed flames on a porous-plug burner // Proc. Combust. Inst. 2013. Vol. 34, no. 1. P. 989–996. DOI: 10.1016/j.proci.2012.06.039.
17. *Gubernov V. V., Bykov V., Maas U.* Hydrogen/air burner-stabilized flames at elevated pressures // Combust. Flame. 2017. Vol. 185. P. 44–52. DOI: 10.1016/j.combustflame.2017.07.001.
18. *Margolis S. B.* Bifurcation phenomena in burner-stabilized premixed flames // Combust. Sci. Technol. 1980. Vol. 22, no. 3–4. P. 143–169. DOI: 10.1080/00102208008952379.
19. *Jomaas G., Bechtold J. K., Law C. K.* Spiral waves in expanding hydrogen–air flames: Experiment and theory // Proc. Combust. Inst. 2007. Vol. 31, no. 1. P. 1039–1046. DOI: 10.1016/j.proci.2006.08.100.
20. *Jomaas G., Law C. K.* Observation and regime classification of pulsation patterns in expanding spherical flames // Phys. Fluids. 2010. Vol. 22, no. 12. P. 124102. DOI: 10.1063/1.3525358.
21. *Wang G., Li Y., Yuan W., Wang Y., Zhou Z., Liu Y., Cai J.* Investigation on laminar flame propagation of n-butanol/air and n-butanol/o₂/He mixtures at pressures up to 20 atm // Combust. Flame. 2018. Vol. 191. P. 368–380. DOI: 10.1016/j.combustflame.2018.01.025.
22. *Yakupov E. O., Polezhaev A. A., Gubernov V. V., Miroshnichenko T. P.* Investigation of the mechanism of emergence of autowave structures at the reaction front // Phys. Rev. E. 2019. Vol. 99, no. 4. P. 042215. DOI: 10.1103/PhysRevE.99.042215.
23. *Yakupov E. O., Gubernov V. V., Polezhaev A. A.* Mathematical modeling of spatiotemporal patterns formed at a traveling reaction front // Chaos. 2020. Vol. 30, no. 8. P. 083147. DOI: 10.1063/5.0012435.

24. *Stahl G., Warnatz J.* Numerical investigation of time-dependent properties and extinction of strained methane and propane-air flamelets // *Combust. Flame.* 1991. Vol. 85, no. 3–4. P. 285–299. DOI: 10.1016/0010-2180(91)90134-W.
25. *Korsakova A. I., Gubernov V. V., Kolobov A. V., Bykov V., Maas U.* Stability of rich laminar hydrogen-air flames in a model with detailed transport and kinetic mechanisms // *Combust. Flame.* 2016. Vol. 163. P. 478–486. DOI: 10.1016/j.combustflame.2015.10.024.
26. *Сальников И. Е.* К теории периодического протекания гомогенных химических реакций. II. Термокинетическая автоколебательная модель // Журнал физической химии. 1949. Т. 23, № 3. С. 258–272.
27. *Scott S. K., Wang J., Showalter K.* Modelling studies of spiral waves and target patterns in premixed flames // *J. Chem. Soc. Faraday Trans.* 1997. Vol. 93, no. 9. P. 1733–1739. DOI: 10.1039/A608474E.
28. *Ge Y., Zhao F., Wei J.* A high order compact ADI method for solving 3D unsteady convection diffusion problems // *Applied and Computational Mathematics.* 2018. Vol. 7, no. 1. P. 1–10. DOI: 10.11648/j.acm.20180701.11.

References

1. Trubetskoy DI. Introduction to Synergetics. Oscillations and Waves. Moscow: URSS; 2011. 224 p. (in Russian).
2. Trubetskoy DI. Inroduction To Synergetics: Chaos And Structures. Moscow: URSS; 2014. 240 p. (in Russian).
3. Ilyin IV, Aleshkovski IA, Ivanov AV, Koronovskii AA, Strakhova LM, Trubetskoy AD, Trubetskoy DI, Hramov AE, Yashkov IA. Nonlinear Dynamics Of Global Processes In Nature And Society. M.: Moscow University Press; 2014. 453 p. (in Russian).
4. Walgraef D. Spatio-Temporal Pattern Formation: With Examples from Physics, Chemistry, and Materials Science. Springer-Verlag New York; 1997. 306 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-1850-0.
5. Cross MC, Hohenberg PC. Pattern formation outside of equilibrium. *Rev. Mod. Phys.* 1993;65(3): 851. DOI: 10.1103/RevModPhys.65.851.
6. Camazine S, Deneubourg JL, Franks NR, Sneyd J, Theraula G, Bonabeau E. Self-Organization in Biological Systems. Princeton University Press; 2003. 562 p.
7. Sivashinsky GI. Instabilities, pattern formation, and turbulence in flames. *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1983;15(1):179–199. DOI: 10.1146/annurev.fl.15.010183.001143.
8. Ju Y, Maruta K. Microscale combustion: Technology development and fundamental research. *Prog. Energy Combust. Sci.* 2011;37(6):669–715. DOI: 10.1016/j.pecs.2011.03.001.
9. Liesegang R. Ueber einige Eigenschaften von Gallerten. *Naturw. Wochenschr.* 1896;11(30): 353–362 (in German).
10. Merzhanov AG, Borovinskaya IP. Self-spreading high-temperature synthesis of refractory inorganic compounds. *Proc. USSR Acad. Sci.* 1972;204(2):366–369 (in Russian).
11. Matkowsky BJ, Olagunju DO. Propagation of a pulsating flame front in a gaseous combustible mixture. *SIAM J. Appl. Math.* 1980;39(2):290–300. DOI: 10.1137/0139025.
12. Zeldovich YB, Barenblatt GI, Librovich VB, Makhviladze GM. The Mathematical Theory of Combustion and Explosions. Consultants Bureau, New York; 1985. 597 p.
13. Buckmaster J. Stability of the porous plug burner flame. *SIAM J. Appl. Math.* 1983;43(6): 1335–1349. DOI: 10.1137/0143089.
14. Gorman M, Hamill CF, El-Hamdi M, Robbins KA. Rotating and modulated rotating states of cellular flames. *Combust. Sci. Technol.* 1994;98(1–3):25–35. DOI: 10.1080/00102209408935394.

15. Gorman M, El-Hamdi M, Robbins KA. Chaotic dynamics near the extinction limit of a premixed flame on a porous plug burner. *Combust. Sci. Technol.* 1994;98(1–3):47–56. DOI: 10.1080/00102209408935396.
16. Kurdyumov VN, Sánchez-Sanz M. Influence of radiation losses on the stability of premixed flames on a porous-plug burner. *Proc. Combust. Inst.* 2013;34(1):989–996. DOI: 10.1016/j.proci.2012.06.039.
17. Gubernov VV, Bykov V, Maas U. Hydrogen/air burner-stabilized flames at elevated pressures. *Combust. Flame.* 2017;185:44–52. DOI: 10.1016/j.combustflame.2017.07.001.
18. Margolis SB. Bifurcation phenomena in burner-stabilized premixed flames. *Combust. Sci. Technol.* 1980;22(3–4):143–169. DOI: 10.1080/00102208008952379.
19. Jomaas G, Bechtold JK, Law CK. Spiral waves in expanding hydrogen–air flames: Experiment and theory. *Proc. Combust. Inst.* 2007;31(1):1039–1046. DOI: 10.1016/j.proci.2006.08.100.
20. Jomaas G, Law CK. Observation and regime classification of pulsation patterns in expanding spherical flames. *Phys. Fluids.* 2010;22(12):124102. DOI: 10.1063/1.3525358.
21. Wang G, Li Y, Yuan W, Wang Y, Zhou Z, Liu Y, Cai J. Investigation on laminar flame propagation of n-butanol/air and n-butanol/o₂/He mixtures at pressures up to 20 atm. *Combust. Flame.* 2018;191:368–380. DOI: 10.1016/j.combustflame.2018.01.025.
22. Yakupov EO, Polezhaev AA, Gubernov VV, Miroshnichenko TP. Investigation of the mechanism of emergence of autowave structures at the reaction front. *Phys. Rev. E.* 2019;99(4):042215. DOI: 10.1103/PhysRevE.99.042215.
23. Yakupov EO, Gubernov VV, Polezhaev AA. Mathematical modeling of spatiotemporal patterns formed at a traveling reaction front. *Chaos.* 2020;30(8):083147. DOI: 10.1063/5.0012435.
24. Stahl G, Warnatz J. Numerical investigation of time-dependent properties and extinction of strained methane and propane-air flamelets. *Combust. Flame.* 1991;85(3–4):285–299. DOI: 10.1016/0010-2180(91)90134-W.
25. Korsakova AI, Gubernov VV, Kolobov AV, Bykov V, Maas U. Stability of rich laminar hydrogen-air flames in a model with detailed transport and kinetic mechanisms. *Combust. Flame.* 2016;163:478–486. DOI: 10.1016/j.combustflame.2015.10.024.
26. Sal'nikov IY. On the theory of periodic occurrence of homogeneous chemical reactions. II. Thermokinetic self-oscillatory model. *Russ. J. Phys. Chem.* 1949;23(3):258–272 (in Russian).
27. Scott SK, Wang J, Showalter K. Modelling studies of spiral waves and target patterns in premixed flames. *J. Chem. Soc. Faraday Trans.* 1997;93(9):1733–1739. DOI: 10.1039/A608474E.
28. Ge Y, Zhao F, Wei J. A high order compact ADI method for solving 3D unsteady convection diffusion problems. *Applied and Computational Mathematics.* 2018;7(1):1–10. DOI: 10.11648/j.acm.20180701.11.



Якупов Эдуард Олегович – родился в Нефтеюганске (1991) Тюменской области. Окончил физический факультет Института естественных наук Уральского федерального университета в Екатеринбурге по направлению «Теоретическая физика» (2016). Окончил аспирантуру Физического института Академии наук по специальности «Теоретическая физика» (2020). С 2017 года работает в Лаборатории нелинейной динамики и теоретической биофизики Отделения теоретической физики ФИАН в должности младшего научного сотрудника.

Россия, 119991 Москва, Ленинский проспект, 53
 Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН
 E-mail: edward.thrst@gmail.com
 ORCID: 0000-0002-4259-7314

Губернов Владимир Владимирович – родился в Москве (1976). Окончил физический факультет Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова (1999). Защитил диссертацию (PhD) по прикладной математике в Университете Нового Южного Уэльса (Австралия, 2003) и диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук (2014) в Физическом институте им. П. Н. Лебедева РАН, официальным оппонентом которой был Д. И. Трубецков. Специалист в области физики горения и нелинейной динамики пространственно распределенных систем. Опубликовал свыше 100 научных статей по указанным направлениям. С 2005 года работает в Физическом институте им. П. Н. Лебедева РАН, в настоящий момент на должности ведущего научного сотрудника лаборатории нелинейной динамики и теоретической биофизики.



Россия, 119991 Москва, Ленинский проспект, 53
Физический институт имени П. Н. Лебедева РАН
E-mail: gubernov@lpi.ru
ORCID: 0000-0001-5821-8641

Полежаев Андрей Александрович – родился в Москве (1953). Окончил Московский физико-технический институт (1976). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (МФТИ, 1979) и доктора физико-математических наук (МГУ, 1994). Специалист в области теории нелинейных динамических систем, моделирования процессов пространственно-временной самоорганизации в системах различной природы, математической биофизики. С 1979 года работает в ФИАНе, в настоящее время – главным научным сотрудником, заведующим лабораторией нелинейной динамики и теоретической биофизики. Опубликовал более 100 научных статей по направлениям, указанным выше. Заместитель главного редактора журнала «Компьютерные исследования и моделирование».



Россия, 119991 Москва, Ленинский проспект, 53
Физический институт имени П. Н. Лебедева РАН
E-mail: apol@lpi.ru
ORCID: 0000-0003-0276-5341