



## АНАЛИЗ В ФИЗИКЕ

*А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов, А.В. Савин, Н.В. Станкевич*

©А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов, А.В. Савин, Н.В. Станкевич, 2008  
Саратов: «Научная книга», 2008. 90 с.  
ISBN 978-5-9758-0776-2

Книга содержит задачи, требующие при своем решении не простого получения формул, а их анализа и исследования. Такой подход позволяет воспринимать физику как исследовательскую науку, а также научиться понимать и использовать взаимосвязь физики и математики. Книга будет полезна школьникам и студентам младших курсов, интересующимся физикой и исследовательской работой, а также учителям физики и преподавателям.

Книга доступна в сети Интернет по адресу <http://sgtnd.narod.ru/publ/rus/APh.htm>

### Оглавление

#### Предисловие

#### Задачи

1. Физический анализ математических задач
2. Анализ с учетом малости физических величин
3. Анализ функций
4. Внимание, в уравнении параметр
5. Катастрофы (бифуркации)

#### Решения

### Предисловие

Из нескольких таких увеличительных стекол Стекляшкин сделал большую подзорную трубу, в которую можно было смотреть на Луну и на звезды. Таким образом он сделался астрономом.

*Н. Носов.* Приключения Незнайки

Физика – это не только дисциплина в учебном плане школы или вуза, но и наука, которая занимается исследованием окружающего мира и получением новых, не известных ранее знаний. Определенное представление о работе физика-исследователя дает решение физических задач. Но реальные задачи, конечно, отличаются от

учебных. Они отличаются и степенью сложности, и объемом математических преобразований, и необходимостью проведения эксперимента и компьютерных расчетов. Главное, однако, в том, что они не сводятся к подстановке чисел в некоторую формулу, найденную в учебнике или справочнике. Как правило, решаемые физиками задачи требуют глубокого и всестороннего *анализа*. Этот анализ необходим как на этапе получения уравнений и формул (например, какие факторы учесть, а какие нет?), так и на этапе их решения (есть ли строгие методы? можно ли применить приближенные?), а также на этапе обсуждения конечных соотношений (какое поведение системы они предсказывают? какие варианты возможны?) В определенной мере именно анализ, точнее, его отсутствие, отличает «традиционную» учебную задачу от по-настоящему исследовательской.

Физические методы анализа трудно формализовать; это в определенной мере искусство, обучиться которому можно, занимаясь исследовательской работой. Однако некоторым подходам и приемам можно научиться и на уровне «школьной» физики, чему и посвящена настоящая книжка.

Интересно, что физические приемы можно применять для решения задач в математической формулировке. Поэтому, прежде всего, мы рекомендуем задачи, которые «выглядят» как математические, но требуют для своего решения физического подхода. Некоторые примеры задач такого рода даны в первом разделе. Во втором разделе обсуждаются физические примеры задач, характеризующихся наличием малой величины. В третьем разделе обсуждаются задачи, связанные с анализом функциональных зависимостей физических величин, в четвертом представлены задачи, для которых исследование связано с зависимостью решения от параметров. В пятом даны примеры задач, анализ которых выявляет так называемые катастрофы и бифуркации, то есть качественные перестройки состояний физической системы при вариации параметров.

Мы старались не выходить за рамки школьной программы, хотя для решения некоторых задач необходимо уметь вычислять производные. В то же время книжка будет полезна и студентам младших курсов, которые заинтересованы в более глубоком освоении физики.

Эта книжка является, фактически, задачником, при этом решения составляют ее важную часть. Большинство решений представляют собой маленькие исследования, знакомство с которыми не сводится к простой проверке: правильно или неправильно Вы решили задачу. Поэтому рекомендуем сначала попытаться решить задачу, а потом ознакомиться с решением, даже если Вы убеждены, что решили ее правильно.

### Катастрофы (бифуркации)

**Задача.** Маленькая бусинка массы  $m$  может скользить без трения по тонкому проволочному кольцу радиуса  $R$ . Кольцо вращают с частотой  $\omega$  вокруг вертикальной оси, проходящей через плоскость кольца на расстоянии  $a$  от его центра. Проследите за трансформацией зависимости потенциальной энергии бусинки от ее координаты во вращающейся системе отсчета. Сначала исследуйте случай малых значений

координаты  $x$ , отсчитываемой от оси вращения. Найдите отвечающие качественным изменениям вида потенциала линии на плоскости безразмерных параметров  $\varepsilon = g/(\omega^2 R)$ ,  $\alpha = a/R$ .

**Решение.** Задачу удобно решать во вращающейся системе отсчета. В этой системе действует центробежная сила  $m\omega^2 r$ , которой можно сопоставить потенциальную энергию  $U = -(m\omega^2 r^2)/2$ , где  $r$  – радиус вращения. Проведем вертикальную ось системы координат так, чтобы она проходила через центр окружности. Тогда, очевидно,  $r = x + a$ . В свою очередь, в соответствии с рис. 1, потенциальная энергия дается выражением

$$U = -mg\sqrt{R^2 - x^2}.$$

Таким образом, суммарная потенциальная энергия

$$U(x) = -\frac{m\omega^2(x+a)^2}{2} - mg\sqrt{R^2 - x^2}.$$

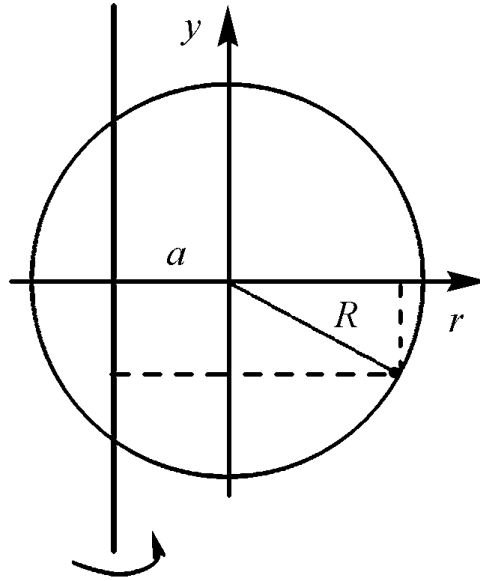


Рис. 1.

Перейдем к безразмерным переменным и параметрам. Введем безразмерную энергию  $W = U/(m\omega^2 R)$  и параметры:  $\varepsilon = g/(\omega^2 R)$ , характеризующий скорость вращения системы, и  $\alpha = a/R$ , характеризующий степень смещения оси вращения относительно центра системы. Тогда

$$W(x) = -\frac{(x+\alpha)^2}{2} - \varepsilon\sqrt{1-x^2}.$$

(Мы сохранили для координаты, нормированной на радиус кольца, обозначение  $x$ .)

При вариации двух существенных параметров  $\alpha = a/R$  и  $\varepsilon = g/(\omega^2 R)$  потенциальная энергия как функция координаты может испытывать определенные метаморфозы.

Обсудим сначала случай  $\alpha = 0$ , при котором ось вращения проходит через центр окружности. Ясно, что при отсутствии вращения будет единственное устойчивое положение равновесия в нижней точке кольца  $x = 0$ . С другой стороны, при очень сильном вращении это равновесие может стать неустойчивым. Убедимся в этом. Используя при малых  $x$  известное соотношение

$$\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \dots,$$

получаем

$$W(x) = \text{const} + \frac{\varepsilon-1}{2} x^2 + \frac{\varepsilon}{8} x^4 + \dots$$

Таким образом, потенциальная энергия как функция координаты задается параболой четвертой степени. При  $\varepsilon = g/(\omega^2 R) > 1$  (медленное вращение) потенциальная функция имеет единственный минимум в начале координат, который отвечает

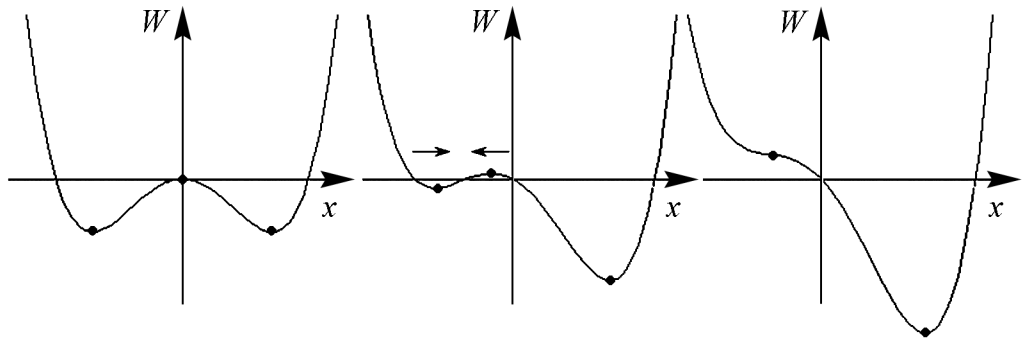


Рис. 2.

устойчивому положению равновесия. При  $\varepsilon < 1$  (быстрое вращение) оно становится неустойчивым. В этот момент минимум превращается в максимум, и от него отделяются симметричным образом два локальных минимума  $x = \pm \sqrt{4(1 - \varepsilon)/\varepsilon}$ , рис. 2, а.

Если теперь  $\alpha \neq 0$ , то есть ось вращения смещена относительно центра окружности, то

$$W(x) = \text{const} - \alpha x + \frac{\varepsilon - 1}{2} x^2 + \frac{\varepsilon}{8} x^4 + \dots$$

В этом случае график потенциальной энергии становится асимметричным, при этом количество возможных конфигураций потенциала как функции  $x$  существенно возрастает. Задача становится принципиально двухпараметрической. (То есть поведение существенно зависит от двух параметров:  $\alpha$  и  $\varepsilon$ .) Обсудим возможные метаморфозы потенциала.

Введение нового параметра  $\alpha$  и асимметрии задачи приводит к тому, что глубина двух потенциальных минимумов может быть разной. При этом, варьируя параметр  $\alpha$ , можно добиться ситуации слияния максимума и одного из минимумов. Эта ситуация иллюстрируется рис. 2, б, в.

Найдем условие этой бифуркации. Положению равновесия отвечает нулевое значение производной потенциала по координате  $W'(x) = 0$ , а условию слияния положений равновесия – равенство нулю второй производной  $W''(x) = 0$ , когда потенциальная функция имеет точку перегиба. Вычислим соответствующие производные и приравняем их нулю:

$$W'(x) = -\alpha + (\varepsilon - 1)x + \frac{\varepsilon x^3}{2} = 0,$$

$$W''(x) = \varepsilon - 1 + \frac{3\varepsilon x^2}{2} = 0.$$

Из второго уравнения находим  $x = \pm \sqrt{2(1 - \varepsilon)/(3\varepsilon)}$ . Подставляя в первое соотношение, получаем

$$\alpha = \pm \left( \frac{2(1 - \varepsilon)}{3\varepsilon} \right)^{3/2}.$$

Это уравнение задает линию на плоскости параметров  $(\alpha, \varepsilon)$ , разделяющую области с различным характером конфигурации потенциальной энергии, как функции

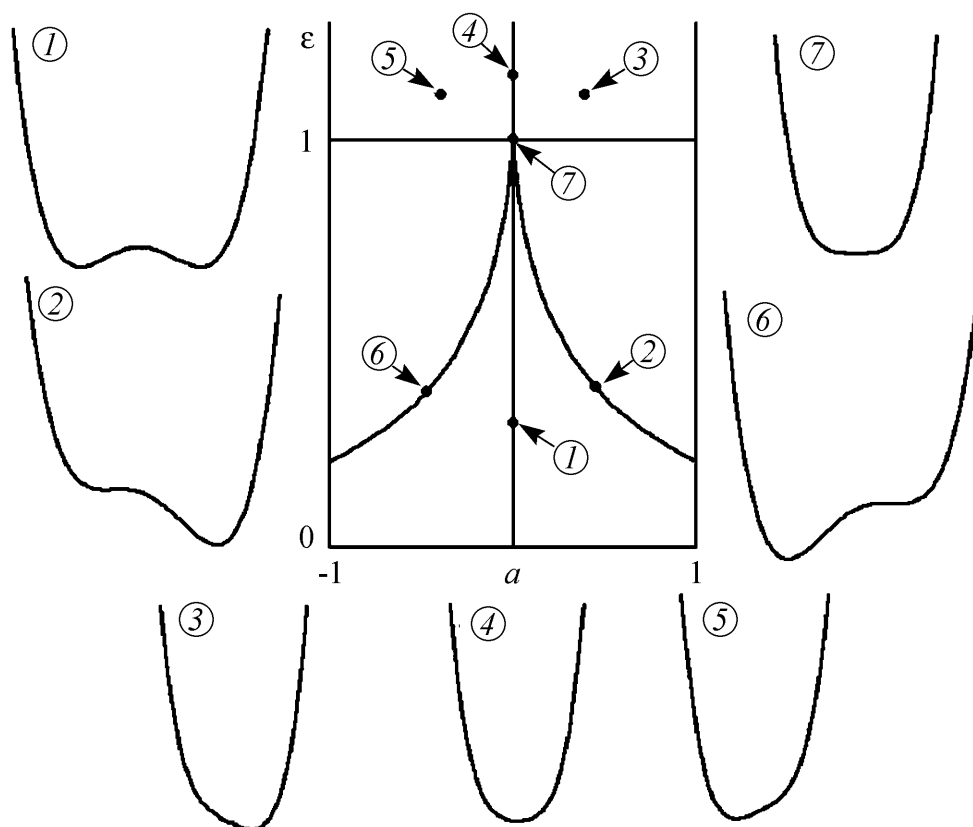


Рис. 3.

координаты. Такое разбиение плоскости  $(\alpha, \varepsilon)$  показано на рис. 3. Рядом представлены соответствующие конфигурации потенциальной функции. Можно заметить, что разделительная линия, отвечающая слиянию двух положений равновесия, в точке  $(0, 1)$  имеет особенность («острие»). Эта точка отвечает максимально вырожденной ситуации, когда функция характеризуется локальным минимумом четвертой степени. В ее окрестности, используя  $\varepsilon = 1 - \Delta\varepsilon$ , получаем

$$\alpha \approx \pm \left( \frac{2}{3} \Delta\varepsilon \right)^{3/2}.$$

Таким образом, это действительно особенность в виде полукубического острия. Такие особенности весьма характерны для систем, в которых могут сосуществовать и сливаться три локальных экстремума. В теории катастроф такая точка носит специальное название *точка сборки*, а подходящие к ней линии слияния экстремумов называют линиями *складок*.

Мы пока ограничились рассмотрением случая малых  $x$ . Проведем теперь рассмотрение более аккуратно, не ограничиваясь этим предположением. Вычисляя соответствующие производные от потенциала

$$W(x) = -(x + \alpha)^2/2 - \varepsilon\sqrt{1 - x^2},$$

получаем

$$W'(x) = -x - a + \frac{\varepsilon x}{\sqrt{1-x^2}} = 0,$$
$$W''(x) = -1 + \frac{\varepsilon}{(1-x^2)^{3/2}} = 0.$$

После несложных преобразований находим:

$$x = \pm\sqrt{1-\varepsilon^{2/3}}$$

и

$$\alpha = \pm(1-\varepsilon^{2/3}).$$

Последнее уравнение задает более точно линию на плоскости параметров  $(\alpha, \varepsilon)$ , разделяющую области с различным характером конфигурации потенциальной энергии как функции координаты. Однако легко видеть, что в окрестности точки сборки мы имеем также полукубическое острие. Действительно, используя  $\varepsilon = 1 - \Delta\varepsilon$  и, соответственно,  $\varepsilon^{2/3} = (1 - \Delta\varepsilon)^{2/3} \approx 1 - (2/3)\Delta\varepsilon$ , получаем  $\alpha \approx \pm((2/3)\Delta\varepsilon)^{3/2}$ , то есть уже полученное выше соотношение.