



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2021. Т. 29, № 5  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2021;29(5)

Научная статья

УДК 534.16

DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-5-739-750

## Смешанные вынужденные, параметрические и автоколебания при неидеальном источнике энергии и запаздывающих силах

А. А. Алифов

Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН, Москва, Россия

E-mail: a.alifov@yandex.ru

Поступила в редакцию 25.05.2020, принята к публикации 16.07.2021,

опубликована 30.09.2021

**Аннотация.** Цель настоящего исследования – определение влияния запаздывающих сил в упругости и демпфирования на динамику смешанных вынужденных, параметрических и автоколебаний в системе с ограниченным возбуждением. В качестве модели использована механическая фрикционная автоколебательная система, приводимая в движение двигателем ограниченной мощности. **Методы.** В данной работе для решения нелинейных дифференциальных уравнений движения рассматриваемой системы используется метод прямой линеаризации (МПЛ), отличающийся от известных методов нелинейной механики простотой применения и весьма малыми затратами труда и времени. Это особенно важно с точки зрения проведения расчетов при проектировании реальных устройств. **Результаты.** Представленная полиномиальной функцией общего вида характеристика силы трения, вызывающего автоколебания, линеаризована с помощью метода прямой линеаризации нелинейностей. С использованием этого же метода построены решения дифференциальных уравнений движения системы, получены уравнения для определения нестационарных значений амплитуды, фазы колебаний и скорости источника энергии. Рассмотрены стационарные движения, а также их устойчивость посредством критериев Рауса–Гурвица. Выполнены расчеты для получения информации о влиянии запаздываний на динамику системы. **Заключение.** Как показали расчеты, запаздывания сдвигают кривые амплитуд вправо-влево, вверх-вниз на амплитудно-частотной плоскости, изменяют их форму, оказывают влияние на устойчивость движения.

**Ключевые слова:** смешанные колебания, вынужденные колебания, параметрические колебания, автоколебания, метод, прямая линеаризация, источник энергии, демпфирование, упругость, запаздывание.

**Для цитирования:** Алифов А. А. Смешанные вынужденные, параметрические и автоколебания при неидеальном источнике энергии и запаздывающих силах // Известия вузов. ПНД. 2021. Т. 29, № 5. С. 739–750.

DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-5-739-750

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Mixed forced, parametric, and self-oscillations with nonideal energy source and lagging forces

A. A. Alifov

Blagonravov Mechanical Engineering Research Institute of RAS, Moscow, Russia

E-mail: a.alifov@yandex.ru

Received 25.05.2020, accepted 16.07.2021, published 30.09.2021

**Abstract.** The purpose of this study is to determine the effect of retarded forces in elasticity and damping on the dynamics of mixed forced, parametric, and self-oscillations in a system with limited excitation. A mechanical frictional self-oscillating system driven by a limited-power engine was used as a model. **Methods.** In this work, to solve the nonlinear differential equations of motion of the system under consideration, the method of direct linearization is used, which differs from the known methods of nonlinear mechanics in ease of use and very low labor and time costs. This is especially important from the point of view of calculations when designing real devices. **Results.** The characteristic of the friction force that causes self-oscillations, represented by a general polynomial function, is linearized using the method of direct linearization of nonlinearities. Using the same method, solutions of the differential equations of motion of the system are constructed, equations are obtained for determining the nonstationary values of the amplitude, phase of oscillations and the speed of the energy source. Stationary motions are considered, as well as their stability by means of the Routh–Hurwitz criteria. Performed calculations obtained information about the effect of delays on the dynamics of the system. **Conclusion.** Calculations have shown that delays shift the amplitude curves to the right and left, up and down on the amplitude–frequency plane, change their shape, and affect the stability of motion.

**Keywords:** mixed oscillations, forced oscillations, parametric oscillations, self-oscillations, method, direct linearization, the source of energy, damping, elasticity, delay.

**For citation:** Alifov AA. Mixed forced, parametric, and self-oscillations with nonideal energy source and lagging forces. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2021;29(5):739–750. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-5-739-750

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

## Введение

В связи с проблемами экологии, влиянием используемой энергии на климатические изменения и истощением энергоресурсов вопрос потребления энергии вышел во всем мире на передний план. Некоторый вклад в решение этих проблем может вносить известная теория колебательных систем, взаимодействующих с источниками энергии. Она впервые последовательно изложена в основополагающей монографии В.О. Кононенко [1]. С помощью данной теории можно более обоснованно выбрать источник энергии с нужными характеристиками, и она была развита последователями В.О. Кононенко во всем мире (известной автору последней монографией в этом направлении является [2]). В монографии [3] описано сильное динамическое взаимодействие колебательной системы и источника энергии при увеличении колебательной нагрузки, а в [4] – значительная связь между колебаниями и уровнем потребляемой энергии при функционировании деталей и точностью их обработки.

В теории колебательных систем с ограниченным возбуждением основным методом исследования является метод усреднения [5], несмотря на то, что для анализа нелинейных колебательных систем существует ряд и других методов нелинейной механики [6–10]. Использование всех этих приближенных методов связано со значительными трудовыми и временными затратами. От них принципиально отличается метод прямой линеаризации (МПЛ), изложенный в [11–16] и др. Он содержит влияющий на точность решения параметр точности линеаризации,

отсутствующий в описанных в [17, 18] способах линеаризации. Преимущества МПЛ в сравнении с известными методами нелинейной механики следующие: на несколько порядков меньше затраты труда и времени; отсутствие трудоемких и сложных приближений различных порядков и простота применения; возможность получения конечных расчетных соотношений независимо от степени нелинейности. Сравнение известных методов нелинейной механики и МПЛ приведено в ряде работ автора, в частности, [12, 14]. Некоторое сравнение приводится далее и в настоящей работе.

Широкое распространение в технике получили системы с запаздыванием, которое является причиной колебаний во многих случаях. В [19] указаны объекты техники со ссылкой на ряд работ в этом направлении. В дополнение отметим следующее. В автономных и телеуправляемых системах (подвижные роботы [20], манипуляторы и др.) источником запаздывания является канал передачи данных, пренебрежение им может привести к существенным ошибкам при управлении группой роботов. В монографии [21] описаны новые данные о закономерностях пластического деформирования металлов при проявлении запаздывания текучести и прерывистого деформирования.

Как известно из классификации колебаний по механизму возбуждения, существуют 4 типа колебаний, отличающихся по своим особенностям (характеристикам) и образующих также 4 вида смешанных (комбинация типов) колебаний [3, 6] и др. С учетом свойств источника энергии и различных запаздываний (по упругости, демпфированию, автоколебательному механизму возбуждения) в работах [19, 22–25] рассмотрены смешанные:

- вынужденные и автоколебания при запаздывании в автоколебательном механизме и упругости [22];
- параметрические и автоколебания при запаздывании в автоколебательном механизме [23];
- параметрические и автоколебания при запаздываниях в автоколебательном механизме и упругости [24];
- вынужденные, параметрические и автоколебания при запаздывании в упругости [19];
- вынужденные, параметрические и автоколебания при запаздывании в автоколебательном механизме [25].

Целью работы является рассмотрение с использованием МПЛ смешанных вынужденных, параметрических и автоколебаний при ограниченной мощности источника энергии и наличии запаздываний в силах упругости и демпфирования.

## 1. Модель и уравнения движения

Представленная на рис. 1 модель фрикционной автоколебательной системы хорошо описывает автоколебания под действием трения, которые могут возникать в целом ряде объектов машиностроения [23–32]. Зависящая от относительной скорости  $U = V - \dot{x}$ ,  $V = r_0 \dot{\phi}$  сила трения  $T(U)$ , возникающая между телом  $I$  с массой  $m$  и приводимой в движение двигателем лентой, на которой оно лежит, может привести к возникновению автоколебаний. Тело находится под действием параметрического возбуждения  $(c + b \cos vt)x$  и вынуждающей силы  $\lambda \sin v_1 t$ .

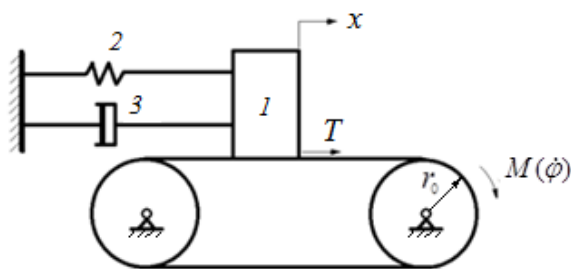


Рис. 1. Модель системы

Fig. 1. Model of system

Движения системы описываются уравнениями

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + k_0\dot{x} + c_0x &= \lambda \sin v_1 t - bx \cos vt + T(U) - k_\eta \dot{x}_\eta - c_\tau x_\tau, \\ I\ddot{\phi} &= M(\dot{\phi}) - r_0 T(U), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $m$  – масса тела, лежащего на ленте,  $k_0 = \text{const}$  и  $c_0 = \text{const}$  – соответственно коэффициенты демпфирования и жесткости демпфера 3 и пружины 2,  $\lambda = \text{const}$ ,  $b = \text{const}$ ,  $v_1 = \text{const}$ ,  $v = \text{const}$  – соответственно амплитуды и частоты вынуждающей силы и параметрического возбуждения,  $\eta$  и  $\tau$  – постоянные временные факторы запаздывания в силах демпфирования и упругости,  $k_\eta = \text{const}$ ,  $c_\tau = \text{const}$ ,  $M(\dot{\phi})$  и  $\dot{\phi}$  – моментная характеристика и скорость вращения ротора двигателя,  $I$  – суммарный момент инерции вращающихся частей,  $r_0 = \text{const}$  – радиус шкива, вращающего ленту.

Широкое распространение в реальных условиях, включая космические [33], получила форма характеристики силы трения

$$T(U) = T_0(\text{sgn } U - \alpha_1 U + \alpha_3 U^3), \quad (2)$$

где  $T_0$  – сила нормальной реакции,  $\alpha_1, \alpha_3$  – положительные постоянные,  $\text{sgn } U = 1$  при  $U > 0$ ,  $\text{sgn } U = -1$  при  $U < 0$  и в случае относительного покоя  $U = 0$  имеет место  $-T_0 \leq T(0) \leq T_0$ .

Характеристика  $T(U)$ , являющаяся, как правило, нелинейной и неизвестной на практике, описывается обычно полиномиальной функцией. Представим ее в более общем виде

$$T(U) = T_0 [\text{sgn } U + f(\dot{x})], \quad f(\dot{x}) = \sum_{n \geq 0} \delta_n \dot{x}^n, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \delta_0 &= \alpha_1 V + \alpha_2 V^2 + \alpha_3 V^3 + \alpha_4 V^4 + \alpha_5 V^5, & \delta_1 &= -(\alpha_1 + 2\alpha_2 V + 3\alpha_3 V^2 + 4\alpha_4 V^3 + 5\alpha_5 V^4), \\ \delta_2 &= \alpha_2 + 3\alpha_3 V + 6\alpha_4 V^2 + 10\alpha_5 V^3, & \delta_3 &= -(\alpha_3 + 4\alpha_4 V + 10\alpha_5 V^2), \\ \delta_4 &= \alpha_4 + 5\alpha_5 V, & \delta_5 &= -\alpha_5. \end{aligned}$$

Заменим [11–16] теперь нелинейную функцию  $f(\dot{x})$  линейной по МПЛ

$$f_*(\dot{x}) = B_f + k_f \dot{x}. \quad (4)$$

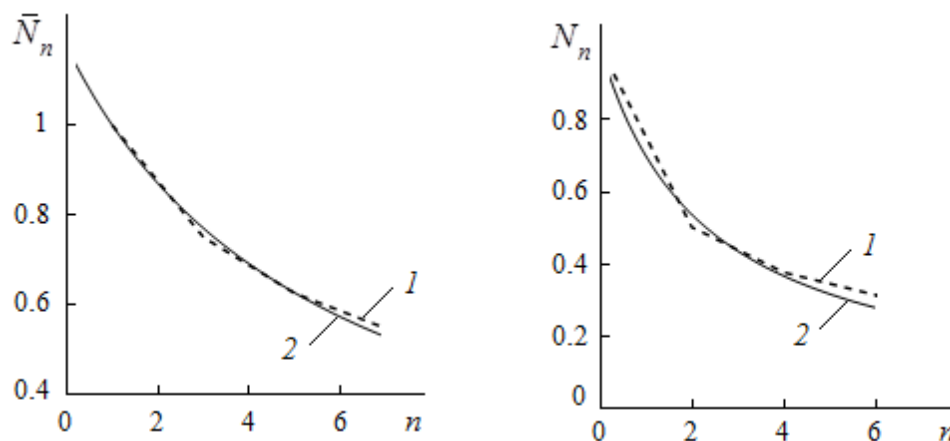


Рис. 2. Графики численных коэффициентов методом усреднения (кривые 1) и МПЛ (кривые 2)

Fig. 2. Graphs of the numerical coefficients of the averaging method (curves 1) and MDL (curves 2)

Коэффициенты линеаризации  $B_f$  и  $k_f$  определяются выражениями  $B_f = \sum_n \alpha_n N_n v^n$ ,  $n = 0, 2, 4, \dots$  ( $n$  – четное),  $k_f = \sum_n \alpha_n \bar{N}_n v^{n-1}$ ,  $n = 1, 3, 5, \dots$  ( $n$  – нечетное), где  $v = \max |\dot{x}|$ ,  $N_n = (2r+1)/(2r+1+n)$ ,  $\bar{N}_n = (2r+3)/(2r+2+n)$ .

Символ  $r$  представляет собой параметр точности линеаризации. Как показано в [11], его можно выбрать в интервале  $(0, 2)$ , но он не ограничен.

На рис. 2 показано сравнение численных коэффициентов  $\bar{N}_n$  ( $r = 1.85$ ) и  $N_n$  ( $r = 0.65$ ) с численными коэффициентами, полученными асимптотическим методом усреднения Боголюбова–Митропольского для различных значений степени нелинейности  $n$ . Кривые 1 соответствуют методу усреднения, кривые 2 – МПЛ. Из графиков видна достаточная близость результатов обоих методов.

С учетом (3) и (4) уравнения (1) принимают вид

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + k\dot{x} + c_0x &= T_0 (\operatorname{sgn} U + B_f) + \lambda \sin v_1 t - bx \cos vt - k_\eta \dot{x}_\eta - c_\tau x_\tau, \\ I\ddot{\varphi} &= M(\dot{\varphi}) - r_0 T_0 (\operatorname{sgn} U + B_f + k_f \dot{x}), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $k = k_0 - T_0 k_f$ .

## 2. Решение уравнений

Решения (5) можно строить методом замены переменных с усреднением [11] и процедуры для расчета взаимодействия колебательных систем с источниками энергии ограниченной мощности [14–16]. Так как характеры решений для  $x$  и  $\dot{x}$  при условиях  $U > 0$  и  $U < 0$  принципиально различны [3], то соответственно рассмотрим отдельно случаи  $u \geq a\omega_0$  и  $u < a\omega_0$ , введя  $u = r_0\Omega$ ,  $\omega_0^2 = c_0/m$ , где  $\Omega$  – усредненная скорость источника энергии. На практике главный интерес представляют основные резонансы, когда  $\omega \approx v_1$  и  $\omega \approx v/2$ . Определим значения амплитуды  $a$ , фазы  $\xi$  колебаний и скорости источника энергии  $\Omega$  для этих резонансов на основе  $x = a \cos \psi$ ,  $\dot{x} = -ap \sin \psi$ ,  $\dot{\varphi} = \Omega$ ,  $\psi = pt + \xi$ ,  $v = ap$ ,  $p = v/2$ . В результате имеем

а)  $u \geq a\omega_0$

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{1}{4pm} [2aA + 2\lambda \cos \xi - ba \sin 2\xi], \\ \frac{d\xi}{dt} &= \frac{1}{4pma} [2aE + 2\lambda \sin \xi + ab \cos 2\xi], \\ \frac{du}{dt} &= \frac{r_0}{J} \left[ M\left(\frac{u}{r_0}\right) - r_0 T_0 (1 + B_f) \right], \end{aligned} \quad (6a)$$

б)  $u < a\omega_0$

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{1}{4pm} \left[ 2aA + 2\lambda \cos \xi - ba \sin 2\xi - \frac{8T_0}{\pi ap} \sqrt{a^2 p^2 - u^2} \right], \\ \frac{d\xi}{dt} &= \frac{1}{4pma} [2aE + 2\lambda \sin \xi + ab \cos 2\xi], \\ \frac{du}{dt} &= \frac{r_0}{J} \left[ M\left(\frac{u}{r_0}\right) - r_0 T_0 (1 + B_f) - \frac{r_0 T_0}{\pi} (3\pi - 2\psi_*) \right], \end{aligned} \quad (6b)$$

где

$$A = p(k_0 + k_\eta \cos p\eta - T_0 k_f) - c_\tau \sin p\tau, \quad E = m(\omega_0^2 - p^2) + c_\tau \cos p\tau,$$

$$\omega_0^2 = c_0/m, \quad u = r_0\Omega, \quad \psi_* = 2\pi - \arcsin(u/ap).$$

Так как в области резонанса  $\omega_0 \approx p$ , то примем  $(\omega_0^2 - p^2)/2p \approx 2\omega_0(\omega_0 - p)$ .

Из условий  $\dot{a} = 0$ ,  $\dot{\xi} = 0$ ,  $\dot{u} = 0$  получим при  $u \geq a\omega_0$  следующие соотношения для определения стационарных значений амплитуды и фазы колебаний:

$$(a^2G - 2\lambda^2)^2 - 4\lambda^2(\lambda^2 + 2bDa^2) = 0, \quad \operatorname{tg} \xi = R(baR - \lambda)/aA,$$

где

$$D = b + 2E, \quad G = 4A^2 + D^2 - 2bD, \quad R = (\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 + 2ba^2D})/2ab.$$

В случае  $u < a\omega_0$  амплитуда стационарных колебаний определяется приближенной зависимостью  $a\omega \approx u$ . Из третьего уравнения (6а) находим нагрузку  $S(u)$  на источник энергии, которая при  $u \geq a\omega_0$  определяется выражением

$$S(u) = r_0T_0(1 + B_f).$$

Уравнение

$$M(u/r_0) - S(u) = 0 \quad (7)$$

позволяет определить стационарные значения скорости  $u$ , которые можно найти также точкой пересечения кривых  $M(u/r_0)$  и  $S(u)$ .

Уравнение (7) имеет место также при  $u < a\omega_0$ , но с учетом  $a\omega \approx u$  в выражении  $S(u)$ .

### 3. Устойчивость стационарных движений

Составив уравнения в вариациях для (7) и используя критерии Рауса–Гурвица, получим следующие условия устойчивости стационарных колебаний:

$$D_1 > 0, \quad D_3 > 0, \quad D_1D_2 - D_3 > 0, \quad (8)$$

где

$$D_1 = -(b_{11} + b_{22} + b_{33}), \quad D_2 = b_{11}b_{33} + b_{11}b_{22} + b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32} - b_{12}b_{21}, \\ D_3 = b_{11}b_{23}b_{32} + b_{12}b_{21}b_{33} - b_{11}b_{22}b_{33}.$$

В случае скоростей  $u \geq ar$  имеем выражения

$$b_{11} = \frac{r_0}{J} \left( Q - r_0T_0 \frac{\partial B_f}{\partial u} \right), \quad b_{12} = -\frac{r_0^2T_0}{J} \frac{\partial B_f}{\partial a}, \quad b_{21} = \frac{aT_0}{2m} \frac{\partial k_f}{\partial u}, \\ b_{22} = -\frac{1}{4pm} \left[ 2 \left( A + a \frac{\partial A}{\partial a} \right) - b \sin 2\xi \right], \quad b_{23} = \frac{1}{2mp} (\lambda \sin \xi + ab \cos 2\xi), \\ b_{32} = -\frac{\lambda}{2pma^2} \sin \xi, \quad b_{33} = -\frac{1}{2pma} [\lambda \cos \xi + 2aA],$$

а при  $u < ar$  изменяются лишь коэффициенты

$$b_{11} = \frac{r_0}{J} \left[ Q - r_0T_0 \frac{\partial B_f}{\partial u} - \frac{2r_0T_0}{\pi \sqrt{a^2p^2 - u^2}} \right], \quad b_{12} = -\frac{r_0^2T_0}{J} \left[ \frac{\partial B_f}{\partial a} + \frac{2u}{\pi a \sqrt{a^2p^2 - u^2}} \right], \\ b_{21} = \frac{aT_0}{2m} \left[ \frac{\partial k_f}{\partial u} + \frac{4u}{\pi a^2p^2 \sqrt{a^2p^2 - u^2}} \right], \quad b_{22} = -\frac{1}{4pm} \left[ 2 \left( A + a \frac{\partial A}{\partial a} \right) - b \sin 2\xi \right] - \frac{4T_0u^2}{2\pi m a^2p^2 \sqrt{a^2p^2 - u^2}},$$

$$\text{где } Q = \frac{d}{du} M\left(\frac{u}{r}\right).$$

Характеристика (3) доставляет выражения

$$\begin{aligned}\frac{\partial B_f}{\partial u} &= \frac{\partial \delta_0}{\partial u} + N_2(ap)^2 \frac{\partial \delta_2}{\partial u} + N_4(ap)^4 \frac{\partial \delta_4}{\partial u}, \quad \frac{\partial k_f}{\partial u} = \bar{N}_1 \frac{\partial \delta_1}{\partial u} + \bar{N}_3(ap)^2 \frac{\partial \delta_3}{\partial u} + \bar{N}_5(ap)^4 \frac{\partial \delta_5}{\partial u}, \\ \frac{\partial B_f}{\partial a} &= 2ap^2(N_2\delta_2 + 2N_4\delta_4a^2p^2), \quad \frac{\partial k_f}{\partial a} = 2ap^2(\bar{N}_3\delta_3 + 2\bar{N}_5\delta_5a^2p^2), \\ \frac{\partial A}{\partial a} &= -pT_0 \frac{\partial k_f}{\partial a}, \quad A + a \frac{\partial A}{\partial a} = A - apT_0 \frac{\partial k_f}{\partial a}, \\ \frac{\partial \delta_0}{\partial u} &= \alpha_1 + 2\alpha_2u + 3\alpha_3u^2 + 4\alpha_4u^3 + 5\alpha_5u^4, \quad \frac{\partial \delta_1}{\partial u} = -2(\alpha_2 + 3\alpha_3u + 6\alpha_4u^2 + 10\alpha_5u^3), \\ \frac{\partial \delta_2}{\partial u} &= 3(\alpha_3 + 4\alpha_4u + 10\alpha_5u^2), \quad \frac{\partial \delta_3}{\partial u} = -4(\alpha_4 + 5\alpha_5u), \quad \frac{\partial \delta_4}{\partial u} = 5\alpha_5, \quad \frac{\partial \delta_5}{\partial u} = 0,\end{aligned}$$

из которых для функции (2) следуют

$$\begin{aligned}\frac{\partial B_f}{\partial u} &= \delta_0 - 3\delta_3N_2a^2p^2, \quad \frac{\partial k_f}{\partial u} = 6\delta_3u, \quad \frac{\partial B_f}{\partial a} = -6N_2\delta_3uap^2, \quad \frac{\partial k_f}{\partial a} = 2\bar{N}_3\delta_3ap^2, \\ A + a \frac{\partial A}{\partial a} &= p(k_0 + k_\eta \cos p\eta) - c_\tau \sin p\tau + p\alpha_3\bar{N}_3T_0(3a^2p^2 - h), \\ h &= 3(u_0^2 - u^2)/\bar{N}_3, \quad u_0^2 = \alpha_1/3\alpha_3,\end{aligned}$$

где  $\delta_0$  и  $\delta_3$  определяются выражениями, приведенными в (3).

В случае идеального источника энергии условиями устойчивости являются

$$D_1 = -(b_{22} + b_{33}) > 0, \quad D_2 = b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32} > 0$$

и амплитуда на границе области устойчивости определяется на основе условия  $D_1 > 0$ , которое дает

$$F \equiv 2A - aW = 0, \quad (9)$$

где  $W = pT_0 \frac{\partial k_f}{\partial a}$  или  $W = 2T_0ap^3(\bar{N}_3\delta_3 + 2\bar{N}_5\delta_5a^2p^2)$ .

#### 4. Расчеты

Для получения информации о влиянии запаздывания на систему проводились расчеты с использованием следующих параметров:  $\omega = 1 \text{ с}^{-1}$ ,  $m = 1 \text{ кгс} \cdot \text{с}^2 \cdot \text{см}^{-1}$ ,  $b = 0.07 \text{ кгс} \cdot \text{см}^{-1}$ ,  $\lambda = 0.02 \text{ кгс}$ ,  $k = 0.02 \text{ кгс} \cdot \text{с} \cdot \text{см}^{-1}$ ,  $k_\eta = 0.02 \text{ кгс} \cdot \text{с} \cdot \text{см}^{-1}$ ,  $c_\tau = 0.05 \text{ кгс} \cdot \text{см}^{-1}$ ,  $r_0 = 1 \text{ см}$ ,  $J = 1 \text{ кгс} \cdot \text{с} \cdot \text{см}^2$ . С учетом (4) характеристика трения  $T(U)$  была принята в форме (2) с параметрами  $T_0 = 0.5 \text{ кгс}$ ,  $\alpha_1 = 0.84 \text{ с} \cdot \text{см}^{-1}$ ,  $\alpha_3 = 0.18 \text{ с}^3 \cdot \text{см}^{-3}$ .

Показанные на рис. 3 амплитудно-частотные кривые  $a(v)$  получены для  $u = 1.2$  при линейной характеристике силы упругости. Для проведения расчетов амплитуды был использован параметр точности линеаризации  $r = 1.5$  и соответственно  $\bar{N}_3 = 3/4$ . Так как число  $3/4$  получается также при методе усреднения, то имеет место одинаковость всех результатов расчета амплитуды по МПЛ и методу усреднения. Отметим, что четные степени нелинейности, которой в данном случае является  $T(U)$ , не влияют на амплитуду, но влияют на устойчивость (в расчетах устойчивости для  $N_2$  использован параметр точности линеаризации  $r = 0.65$ ). Сплошная кривая 1 на всех рисунках соответствует полному отсутствию запаздываний ( $k_\eta = 0$ ,  $c_\tau = 0$ )

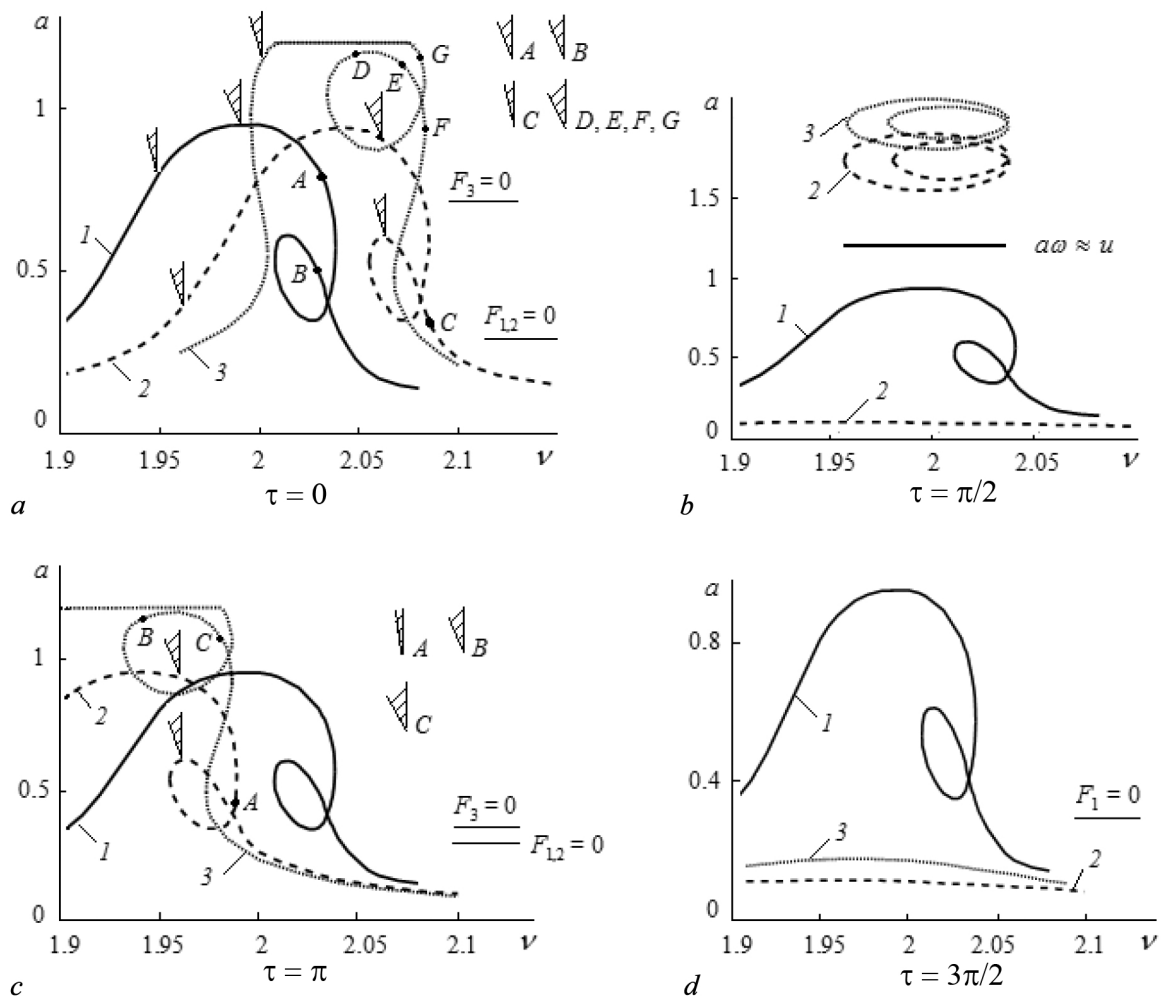


Рис. 3. Зависимости амплитуды от частоты при различных значениях  $\tau$ : 0 (а),  $\pi/2$  (б),  $\pi$  (с),  $3\pi/2$  (д)

Fig. 3. Dependences of the amplitude on the frequency at different  $\tau$ : 0 (a),  $\pi/2$  (b),  $\pi$  (c),  $3\pi/2$  (d)

и приведена для сравнения, штриховая 2 –  $\eta = \pi/2$ , двухпунктирная 3 –  $\eta = \pi$ . Поскольку скорость  $u = 1.2$  и действует приближенное равенство  $\omega \approx u$ , представленное горизонтальной прямой  $a = 1.2$  ( $\omega = 1$ ), то штриховая и пунктирная кривые при  $\eta = \pi/2$  показаны условно, без учета этого равенства. Колебания могут быть устойчивыми, если крутизна  $Q$  – характеристика источника энергии – будет находиться в пределах заштрихованного сектора. Кривая 2 с весьма малыми амплитудами на рис. 3, б неустойчива полностью. Прямые  $F_{1,2} = 0$ ,  $F_3 = 0$  отражают (9) в соответствии с обозначением амплитудных кривых в зависимости от  $\eta$ .

### Заключение

Запаздывания смещают амплитудную кривую вверх-вниз, вправо-влево, изменяют ее форму. Наличие запаздываний обуславливает в системе эффекты, аналогичные тем, что возникают и при отсутствии запаздываний. Останавливаться на них не будем, ибо результаты анализа (1) при отсутствии запаздывания и целый ряд сильно зависящих от свойств источника энергии явлений детально описаны в [3].

## Список литературы

1. Кононенко В. О. Колебательные системы с ограниченным возбуждением. М.: Наука, 1964. 254 с.
2. Краснопольская Т. С., Швец А. Ю. Регулярная и хаотическая динамика систем с ограниченным возбуждением. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2008. 280 с.
3. Alifov A. A., Frolov K. V. Interaction of Nonlinear Oscillatory Systems with Energy Sources. New York, Washington, Philadelphia, London: Hemisphere Publishing Corporation, 1990. 327 p.
4. Alifov A. A. About calculation of self-oscillatory system delayed and limited excitation // *Ölçmə və keyfiyyət: problemlər, perspektivlər* mövzusunda Beynəlxalq Elmi-texniki konfransın materialları. Bakı, Azərbaycan, 21–23 noyabr 2018. Bakı: AzTU, 2018. P. 289–293.
5. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 504 с.
6. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М.: Наука, 1981. 568 с.
7. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1981. 400 с.
8. Журавлев В. Ф., Климов Д. М. Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 328 с.
9. Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах. М.: Мир, 1968. 432 с.
10. Бутенин Н. В., Неймарк Ю. И., Фужаев Н. А. Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1976. 384 с.
11. Алифов А. А. Методы прямой линеаризации для расчета нелинейных систем. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2015. 74 с.
12. Alifov A. A. Method of the direct linearization of mixed nonlinearities // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2017. Vol. 46, no. 2. P. 128–131. DOI: 10.3103/S1052618817020029.
13. Alifov A. A. About direct linearization methods for nonlinearity // In: Hu Z., Petoukhov S., He M. (eds) *Advances in Artificial Systems for Medicine and Education III*. AIMEE 2019. Vol. 1126 of *Advances in Intelligent Systems and Computing*. Cham: Springer, 2020. P. 105–114. DOI: 10.1007/978-3-030-39162-1\_10.
14. Alifov A. A., Farzaliev M. G., Dzhaforov E. N. Dynamics of a self-oscillatory system with an energy source // *Russian Engineering Research*. 2018. Vol. 38, no. 4. P. 260–262. DOI: 10.3103/S1068798X18040032.
15. Alifov A. A. On the calculation by the method of direct linearization of mixed oscillations in a system with limited power-supply // In: Hu Z., Petoukhov S., Dychka I., He M. (eds) *Advances in Computer Science for Engineering and Education II*. ICCSEE 2019. Vol. 938 of *Advances in Intelligent Systems and Computing*. Cham: Springer, 2019. P. 23–31. DOI: 10.1007/978-3-030-16621-2\_3.
16. Alifov A. A. About application of methods of direct linearization for calculation of interaction of nonlinear oscillatory systems with energy sources // *Proceedings of the International Symposium of Mechanism and Machine Science (ISMMS-2017)*. Baku, Azerbaijan, 11-14 September 2017. Baku: AzC IFToMM, 2017. P. 218–221.
17. Пановко Я. Г. Способ прямой линеаризации в нелинейных задачах крутильных колебаний // *Уч. записки Латвийского гос. ун-та*. 1953. Т. 4. С. 73–90.
18. Лойцянский Л. Г. Свободные и вынужденные колебания при наличии квадратичного и промежуточного между линейным и квадратичным законов сопротивления // *Известия АН СССР. Инженерный сборник*. 1954. Т. 18. С. 139–148.
19. Алифов А. А. О смешанных вынужденных, параметрических и автоколебаниях при ограниченном возбуждении и запаздывающей упругости // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2020. № 3. С. 12–19. DOI: 10.15593/perm.mech/2020.3.02.

20. Золотухин Ю. Н., Котов К. Ю., Мальцев А. С., Нестеров А. А., Филиппов М. Н. Компенсация транспортного запаздывания при управлении траекторным движением группы мобильных роботов // Труды XIII Международной конференции «Проблемы управления и моделирования в сложных системах» (ПУМСС-2011). Самара, Россия, 15-17 июня 2011. Самара: Институт проблем управления сложными системами, 2011. С. 223–229.
21. Третьякова Т. В., Вильдеман В. Э. Пространственно-временная неоднородность процессов неупругого деформирования металлов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2017. 120 с.
22. Алифов А. А. О расчете смешанных вынужденных и автоколебаний при запаздывающей упругой связи и источнике энергии ограниченной мощности // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2020. № 2. С. 25–30. DOI: 10.31857/S0235711920020054.
23. Алифов А. А., Фарзалиев М. Г. О расчете методом линеаризации взаимодействия параметрических и автоколебаний при запаздывании и ограниченном возбуждении // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 68. С. 41–52. DOI: 10.17223/19988621/68/4.
24. Алифов А. А. Автопараметрические колебания при запаздываниях в силах упругости и трения // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2021. № 2. С. 9–16. DOI: 10.31857/S0235711921020024.
25. Алифов А. А. Автоколебания при запаздывании и ограниченной мощности источника энергии // Известия РАН. Механика твердого тела. 2019. № 3. С. 147–154. DOI: 10.1134/S0572329919030024.
26. Климов Д. М. Об одном виде автоколебаний в системе с сухим трением // Известия АН. Механика твердого тела. 2003. № 3. С. 6–13.
27. Фролов К. В. Избранные труды. В 2-х томах. М.: Наука, 2007.
28. Пановко Я. Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. Л.: Машиностроение, 1976. 320 с.
29. Абдиев Ф. К. Автоколебания системы с запаздыванием и с неидеальным источником энергии // Известия АН АзССР. Серия физико-технических и математических наук. 1983. № 4. С. 134–139.
30. Рубаник В. П., Старик Л. К. Об устойчивости автоколебаний резца в случае неидеального источника энергии // Научные труды вузов Лит. ССР. Вибротехника. 1971. № 2. С. 205–212.
31. Мурашкин Л. С., Мурашкин С. Л. Прикладная нелинейная механика станков. Л.: Машиностроение, 1977. 192 с.
32. Пономарев А. С., Соколов В. И., Кожухарь А. А. Поперечные автоколебания силовых столов, вызванные силами трения // Вестник Харьковского политехн. ин-та. Машиностроение. 1977. Т. 8, № 130. С. 67–70.
33. Броновец М. А., Журавлев В. Ф. Об автоколебаниях в системах измерения сил трения // Известия РАН. Механика твердого тела. 2012. № 3. С. 3–11.

## References

1. Kononenko VO. Vibrating Systems with Limited Power-Supply. London: Iliffe Books; 1969. 236 p.
2. Krasnopolskaya TS, Shvets AY. Regular and Chaotic Dynamics of Systems with Limited Excitation. Moscow-Izhevsk: SPC «Regular and Chaotic Dynamics», Izhevsk Institute of Computer Science; 2008. 280 p.
3. Alifov AA, Frolov KV. Interaction of Nonlinear Oscillatory Systems with Energy Sources. New York, Washington, Philadelphia, London: Hemisphere Publishing Corporation; 1990. 327 p.
4. Alifov AA. About calculation of self-oscillatory system delayed and limited excitation. In: Proceedings of the International Scientific and Technical Conference «Measurement and Quality: Problems, Prospects». Baku, Azerbaijan, 21-23 November 2018. Baku: AzTU; 2018. P. 289–293.

5. Bogoliubov NN, Mitropolskii YA. Asymptotic Methods in Theory of Non-linear Oscillations. New York: Gordon and Breach; 1961. 537 p.
6. Andronov AA, Vitt AA, Khaikin SE. Theory of Oscillators. USA: Pergamon Press; 1966. 848 p.
7. Moiseyev NN. Asymptotic Methods of Nonlinear Mechanics. Moscow: Nauka; 1981. 400 p. (in Russian).
8. Zhuravlev VF, Klimov DM. Applied Methods in the Theory of Oscillations. Moscow: Nauka; 1988. 328 p. (in Russian).
9. Hayashi C. Nonlinear Oscillations in Physical Systems. New York: McGraw-Hill; 1964.
10. Butenin NV, Neymark YI, Fufayev NA. Introduction to the Theory of Nonlinear Oscillations. Moscow: Nauka; 1976. 384 p. (in Russian).
11. Alifov AA. Methods of Direct Linearization for Calculation of Nonlinear Systems. Moscow-Izhevsk: SPC «Regular and Chaotic Dynamics»; 2015. 74 p. (in Russian).
12. Alifov AA. Method of the direct linearization of mixed nonlinearities. Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2017;46(2):128–131. DOI: 10.3103/S1052618817020029.
13. Alifov AA. About direct linearization methods for nonlinearity. In: Hu Z, Petoukhov S, He M, editors. Advances in Artificial Systems for Medicine and Education III. AIMEE 2019. Vol. 1126 of Advances in Intelligent Systems and Computing. Cham: Springer; 2020. P. 105–114. DOI: 10.1007/978-3-030-39162-1\_10.
14. Alifov AA, Farzaliev MG, Dzhafarov EN. Dynamics of a self-oscillatory system with an energy source. Russian Engineering Research. 2018;38(4):260–262. DOI: 10.3103/S1068798X18040032.
15. Alifov AA. On the calculation by the method of direct linearization of mixed oscillations in a system with limited power-supply. In: Hu Z, Petoukhov S, Dychka I, He M, editors. Advances in Computer Science for Engineering and Education II. ICCSEEA 2019. Vol. 938 of Advances in Intelligent Systems and Computing. Cham: Springer; 2019. P. 23–31. DOI: 10.1007/978-3-030-16621-2\_3.
16. Alifov AA. About application of methods of direct linearization for calculation of interaction of nonlinear oscillatory systems with energy sources. In: Proceedings of the International Symposium of Mechanism and Machine Science (ISMMS-2017). Baku, Azerbaijan, 11–14 September 2017. Baku: AzC IFToMM; 2017. P. 218–221.
17. Panovko YG. Method of direct linearization in nonlinear problems of torsional oscillations. Scientific Notes of the Latvian State University. 1953;4:73–90 (in Russian).
18. Loytsyansky LG. Free and forced oscillations in the presence of quadratic and intermediate between linear and quadratic laws of resistance. Bulletin of the Academy of Sciences of the USSR. Engineering Collection. 1954;18:139–148 (in Russian).
19. Alifov AA. About mixed forced, parametric and self-oscillations by limited excitation and delayed elasticity. PNRPU Mechanics Bulletin. 2020;(3):12–19 (in Russian). DOI: 10.15593/perm.mech/2020.3.02.
20. Zolotukhin YN, Kotov KY, Maltsev AS, Nesterov AA, Filippov MN. Compensation of transport lag when controlling the trajectory movement of a group of mobile robots. In: Proceedings of the XIII International Conference «Problems of Control and Modeling in Complex Systems» (PCMCS-2011). Samara, Russia, 15–17 June 2011. Samara: Institute for Complex Systems Control Problems; 2011. P. 223–229.
21. Tretyakova TV, Wildeman VE. Spatio-Temporal Inhomogeneity of the Processes of Inelastic Deformation of Metals. Moscow: FIZMATLIT; 2017. 120 p. (in Russian).
22. Alifov AA. Calculating mixed forced and self-oscillations for delayed elastic constraint and a limited power energy source. Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2020;49(2): 105–109. DOI: 10.3103/S1052618820020053.
23. Alifov AA, Farzaliev MG. On the calculation by the method of linearization of the interaction of

- parametric and self-oscillations at delay and limited excitation. Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics. 2020;(68):41–52 (in Russian). DOI: 10.17223/19988621/68/4.
24. Alifov AA. Autoparametric oscillations with delays in elastic and frictional forces. Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2021;50(2):98–104. DOI: 10.3103/S1052618821020023.
  25. Alifov AA. Self-oscillations in delay and limited power of the energy source. Mechanics of Solids. 2019;54(4):607–613. DOI: 10.3103/S0025654419040150.
  26. Klimov DM. On one type of self-excited vibrations in a system with dry friction. Mechanics of Solids. 2003;(3):6–13 (in Russian).
  27. Frolov KV. Selected Works. In 2 Volumes. Moscow: Nauka; 2007 (in Russian).
  28. Panovko YG. Fundamentals of the Applied Theory of Vibrations and Shock. Leningrad: Mashinostroeniye; 1976. 320 p. (in Russian).
  29. Abdiyev FK. Delayed self-oscillations of a system with a non-ideal energy source. Bulletin of the Academy of Sciences of the AzSSR. Series of Physical, Technical and Mathematical Sciences. 1983;(4):134–139 (in Russian).
  30. Rubanik VP, Starik LK. On the stability of self-oscillations of a cutter in the case of an non-ideal energy source. Scientific Works of Universities of the Lithuanian SSR. Vibration Technology. 1971;(2):205–212 (in Russian).
  31. Murashkin LS, Murashkin SL. Applied Nonlinear Mechanics of Machine Tools. Leningrad: Mashinostroeniye; 1977. 192 p. (in Russian).
  32. Ponomarev AS, Sokolov VI, Kozhukhar AA. Transverse self-oscillations of power tables caused by friction forces. Bulletin of the Kharkov Polytechnic Institute. Mechanical Engineering. 1977; 8(130):67–70 (in Russian).
  33. Bronovets MA, Zhuravlev VF. On self-excited vibrations in friction force measurement systems. Mechanics of Solids. 2012;47(3):261–268. DOI: 10.3103/S0025654412030016.



*Алифов Алишир Али оглы* – родился в Азербайджане (1948). Окончил с отличием Азербайджанский политехнический институт (АзПИ). Доктор технических наук (1985). Главный научный сотрудник Института машиноведения имени А. А. Благонравова РАН (ИМАШ РАН). Область научных интересов: теория колебаний, нелинейные динамические системы, самоорганизация, теоретическая и прикладная механика, машиностроение, динамика машин. Автор свыше 150 публикаций, в том числе 8 монографий, изобретений. Член редколлегии журнала Machine Science и Международного философско-космологического общества (МФКО).

Россия, Москва 101000, Малый Харитоньевский переулок, 4  
 Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН  
 E-mail: a.alifov@yandex.ru  
 ORCID: 0000-0003-2327-068x  
 AuthorID: 603468