



Изв. вузов «ПИНД», т.12, № 1-2, 2004

УДК 537.86: 530.182

КОЛЕБАНИЯ В ЦИФРОВЫХ РЕКУРСИВНЫХ ФИЛЬТРАХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ПРЕДСТАВЛЕНИЕМ ЧИСЕЛ В ДОПОЛНИТЕЛЬНОМ КОДЕ С ОКРУГЛЕНИЕМ

Ю.А. Брюханов

Исследованы процессы в цифровых фильтрах нижних и верхних частот с произвольным числом уровней квантования. Числа представляются в дополнительном коде, а результаты суммирования округляются. Сумматор имеет характеристику с насыщением. Методом точечных отображений исследованы автономный режим и колебания при постоянном внешнем воздействии. Получены выражения для расчета наиболее вероятных режимов.

Цифровые рекурсивные фильтры первого порядка используются для выделения сигналов нижних или верхних частот [1]. Процессы в таких фильтрах зависят от количества двоичных разрядов M , способа представления чисел и характеризуются определенными ошибками квантования. Если последовательность ошибок квантования является совокупностью выборок стационарного случайного процесса, если она не коррелирована с последовательностью точных значений сигнала, а сами значения ошибки не коррелированы между собой (представляя собой белый шум) и при этом распределение вероятностей ошибки равномерно во всем диапазоне ошибок квантования, то исследование процессов в фильтрах может быть осуществлено с помощью линейной статистической модели ошибок [2]. Эти условия нарушаются при малом числе разрядов (и связанным с ним числе уровней квантования $L=2^{M+1}$), а также при воздействии, например, постоянного или синусоидального сигнала, дискретизированного с частотой,rationально кратной частоте синусоиды. Нарушение условий влечет за собой необходимость рассмотрения цифрового фильтра как существенно нелинейной колебательной системы.

Полагаем, что в фильтре использована целочисленная арифметика с фиксированной запятой, сумматор имеет характеристику с насыщением, в отличие от [3] использовано также распространенное на практике [2] представление чисел в дополнительном коде с округлением результатов сложения чисел.

Цель работы - исследование автономного режима и колебаний при постоянном внешнем воздействии A .

При использовании целочисленной арифметики шаг квантования равен единице, A - целое число, характеристика квантователя (сумматора) с округлением в дополнительном коде и насыщением определяется функцией

$$f(\varphi) = \begin{cases} [\varphi + \frac{1}{2}] & \text{при } 0 \leq \varphi < N_1 - \frac{1}{2}, \\ N_1 & \text{при } \varphi \geq N_1 - \frac{1}{2}, \\ [\varphi + \frac{1}{2} - N] - N & \text{при } -N + \frac{1}{2} \leq \varphi < 0, \\ -N & \text{при } \varphi < -N + \frac{1}{2}, \end{cases}$$

где $[\cdot]$ - целая часть числа, $N_1 = N - 1$, $N = L/2$. Участки характеристики при $\varphi \geq 0$, соответствующие значениям $[\varphi + \frac{1}{2}]$, обозначим $0, I, II, \dots, N_1$, а участки при $\varphi < 0$, соответствующие значениям $[\varphi + \frac{1}{2} - N] - N$, обозначим $0, -I, -II, \dots, -N$. Имеем в виду, что вследствие квантования в системе первого порядка возможны L состояний.

В общем случае движения в цифровых фильтрах первого порядка описываются нелинейным разностным уравнением

$$x(n+1) = f(ax(n) + u(n)),$$

где $x(n+1)$ - реакция фильтра, a - параметр фильтра, $u(n)$ - входное воздействие. Заметим, что зависимость функции f от числа уровней квантования L обуславливает зависимость вида разностного уравнения от этого числа, а вместе с тем и от количества двоичных разрядов M . Введем функцию $y(n) = x(n+1)$. Процессы исследуем на плоскости состояний (x, y) методом точечных отображений с использованием диаграммы Ламерея, представляющей собой совокупность графиков биссектрисы $y=x$ и функции последования [4]. Задача исследования движений сводится к нахождению последовательности точечных отображений F отрезка $x \in [-N, N_1]$ в себя. Как и в [3], плоскость состояний разобьем на области соответственно участкам характеристики квантователя (сумматора), обозначив их, как и соответствующие участки.

В нелинейной системе в зависимости от начального состояния $x(0)$ возможны различные установившиеся движения. Поскольку все L возможных начальных состояний равновероятны, введем понятие вероятности P установившегося движения B в виде $P(B) = m/L$, где m - количество начальных состояний, соответствующих этому движению. Параметр фильтра a выбираем в области устойчивости без учета эффектов квантования, то есть $0 < |a| < 1$.

Свободные колебания ($u(n)=0$)

При этом граница областей $[\varphi + \frac{1}{2} \operatorname{sign}\varphi]$, $[\varphi + \frac{1}{2} \operatorname{sign}\varphi] + \operatorname{sign}\varphi$ на плоскости состояний определяется зависимостью $x = ([\varphi + \frac{1}{2} \operatorname{sign}\varphi] + \frac{1}{2} \operatorname{sign}\varphi)/a$. Сама граница при $\varphi \geq 0$ принадлежит области $[\varphi + \frac{1}{2}] + 1$, а при $\varphi < 0$ - области $[\varphi - \frac{1}{2}]$. Функция последования имеет вид $y = f(ax)$. В зависимости от знака и величины параметра a графики функций последования и биссектрисы могут пересекаться в одной или нескольких точках.

Пусть $a > 0$, в этом случае цепь является фильтром нижних частот (ФНЧ). В качестве примера рассмотрим случай $L=12$, $a = \frac{4}{5}$. Плоскость состояний с обозначенными на ней областями, соответствующими участкам характеристики квантователя (сумматора), и диаграмма Ламерея показаны на рис. 1. Здесь график функции последования пересекается с

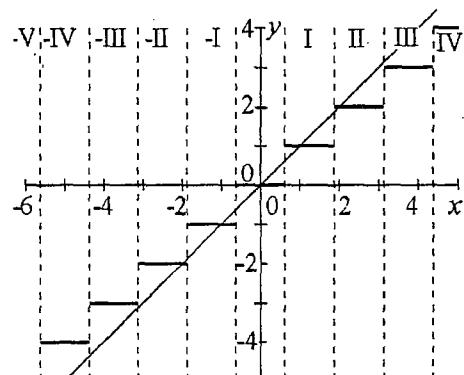


Рис. 1. Диаграмма Ламерея автономного фильтра нижних частот при $L=12$, $a=4/5$

биссектрисой при $[x] \in [-2;2]$. Поэтому при старте из точки 0 в цепи сохраняется состояние покоя. Ниже это обозначено $T=0$. При старте из точек $x=\pm 1$ в цепи возникают паразитные колебания с периодом $T=1$ и амплитудой $X=\pm 1$, соответственно. Ниже это обозначено $T=1(\pm 1)$. При движении из точек $[x] \in [2;5]$ и из точек $[x] \in [-2;-6]$ в цепи устанавливаются колебания соответственно $T=1(\pm 2)$. Поэтому вероятность колебаний $T=1(2)$ равна $\frac{1}{3}$. Ниже это обозначено $P(2)=\frac{1}{3}$. Вероятности других возможных паразитных движений равны $P(0)=P(\pm 1)=\frac{1}{12}$, $P(-2)=\frac{5}{12}$. Следует отметить, что интервал установившихся значений $X \in [-2;2]$ составляет так называемую мертвую зону цифрового фильтра [2]. Рассмотрение движений при $a \in (0;1)$ позволяет построить бифуркационную и вероятностную диаграммы. Последняя показана на рис. 2, а.

Исследование колебаний для ряда значений L позволило установить следующие закономерности для наиболее вероятных значений величины X . В общем случае произвольного L на выходе фильтра в установленном режиме имеем наиболее вероятное паразитное движение $T=1(-X)$, где $-N < -X < 0$, если на диаграмме Ламеря точки $-X$ и $-X-1$ принадлежат области $-X$. Это означает выполнение условия

$$-X - \frac{1}{2} \leq -aX < -X + \frac{1}{2} \cap -X - \frac{1}{2} \leq a(-X-1) < -X + \frac{1}{2},$$

откуда следует $(X-1/2)/X < a \leq (X+1/2)/(X+1)$. При $X=0$ с вероятностью $P=1$ выполняется условие $0 < a \leq 1/2$. В диапазоне значений $(N-1/2)/N < a < 1$ имеем равновероятные движения $T=1(X)$, где $X \in [-N; N_1]$. Пользуясь этими закономерностями, для любого L можно найти зависимость $X(a)$.

Пусть $a < 0$, в этом случае цепь является фильтром верхних частот (ФВЧ). В качестве примера рассмотрим случай $L=12$, $a = -4/5$. При этом функция последований отличается от изображенной на рис. 1 только знаком. График ее пересекается с биссектрисой только в начале координат, что обуславливает сохранение состояния покоя при старте из точки $x=0$. Вместе с тем, при старте из точек $x=\pm 1$ в цепи возникают паразитные колебания с периодом $T=2$ и

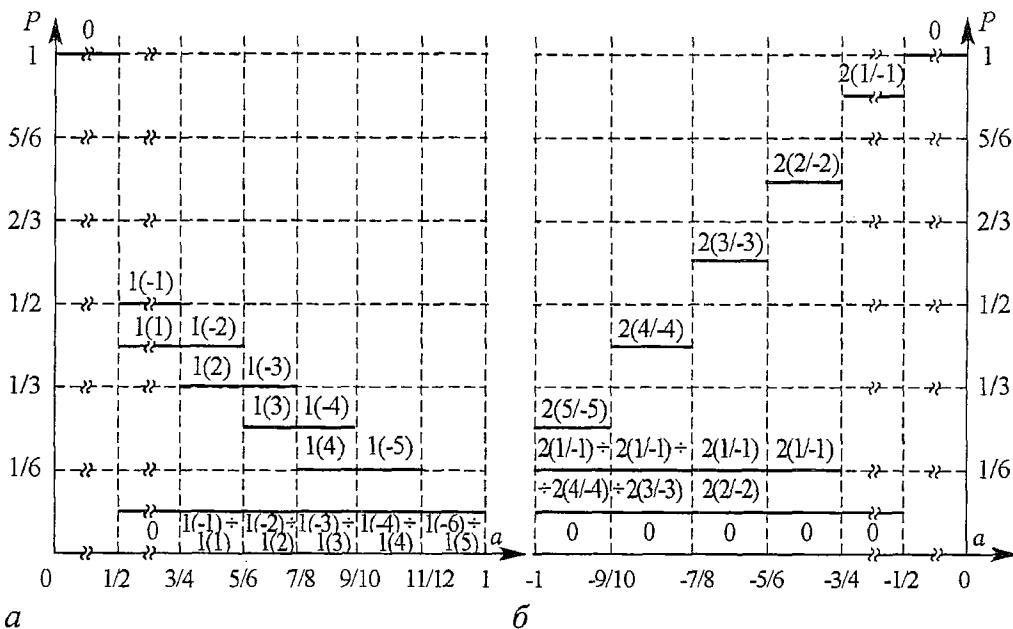


Рис. 2. Вероятностные диаграммы автономной цепи для $L=12$: а - фильтра нижних частот, б - фильтра верхних частот

мгновенными значениями $x \in \{1; -1\}$. Ниже это обозначено $T=2(1/-1)$. При движении из точек $[x] \in [-6; -2]$ и $[x] \in [2; 5]$ в цепи устанавливаются колебания $T=2(2/-2)$. Соответственно вероятности вышеуказанных движений составляют величины $P(0)=1/12$, $P(1/-1)=2/12$, $P(2/-2)=3/4$. И здесь интервал значений $X \in [-2; 2]$ составляет мертвую зону фильтра. Рассмотрение движений при $a \in (-1; 0)$ позволяет построить бифуркационную и вероятностную диаграммы. Последняя показана на рис. 2, б.

Исследование колебаний для ряда значений L позволило установить следующие закономерности. На выходе фильтра имеем $X=0$, если на диаграмме Ламеря точка $X=1$ принадлежит области 0. Откуда следует $-1/2 \leq a < 0$. Наиболее вероятным является установившееся паразитное движение $T=2(X/-X)$, где $0 < X < N_1$, если точки X и $X+1$ принадлежат области $-X$. Это означает выполнение условия

$$-(X+1/2) \leq aX < -(X-1/2) \cap -(X+1/2) \leq a(X+1) < -(X-1/2),$$

откуда следует

$$-(X+1/2)/(X+1) \leq a < -(X-1/2)/X.$$

При $-1 < a < -(N_1 - 1/2)/N_1$ имеем наиболее вероятное движение (с вероятностью $3/L$) $T=2(N_1/-N_1)$. Эти закономерности позволяют установить зависимость $X(a)$ для произвольного числа уровней квантования L .

Постоянное воздействие ($u(n)=A$)

При постоянном внешнем воздействии A функция последования имеет вид $y=f(ax+A)$, а график ее пересекает ось ординат в точке $y=A$, при этом $\varphi=A$. Граница областей $[\varphi + 1/2 \operatorname{sign}\varphi]$, $[\varphi + 1/2 \operatorname{sign}\varphi] + \operatorname{sign}\varphi$ на плоскости состояний определяется зависимостью $x = ([\varphi + 1/2 \operatorname{sign}\varphi] + 1/2 \operatorname{sign}\varphi - A)/a$. Сама граница при $\varphi \geq 0$ принадлежит области $[\varphi + 1/2] + 1$, а при $\varphi < 0$ - области $[\varphi - 1/2]$. Рассмотрим случай $A > 0$.

Пусть $a > 0$. В качестве примера рассмотрим случай $A=1$. Диаграмма Ламеря для $L=12$, $a=4/5$ показана на рис. 3, а. Здесь график функции последования пересекается с биссектрисой при $[x] \in [3; 5]$. Следовательно, при старте из точек $[x] \in [-6; 3]$ в цепи устанавливается колебание $T=1(3)$. При старте из точек $x=4$ и $x=5$ имеем соответственно движения $T=1(4)$ и $T=1(5)$. Поэтому вероятности колебаний равны $P(3)=5/6$, $P(4)=P(5)=1/12$. Рассмотрение движений при $a \in (0; 1)$

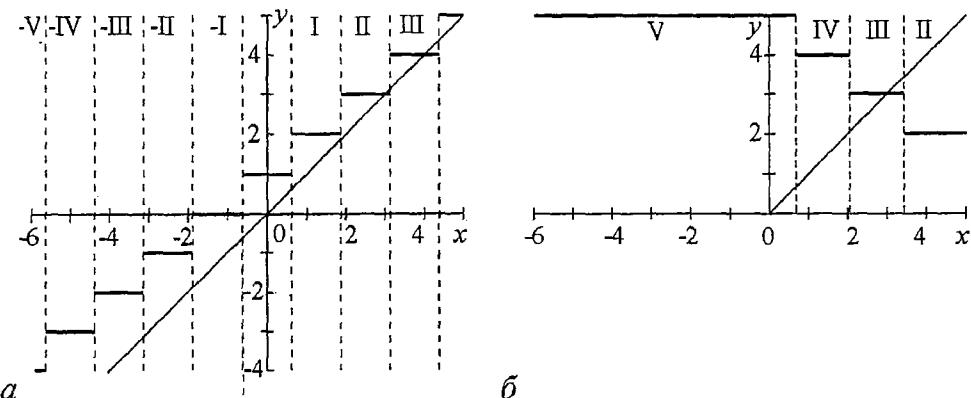


Рис. 3. Диаграммы Ламеря для $L=12$: а - фильтра нижних частот, $a=4/5$, $A=1$; б - фильтра верхних частот, $a=-8/11$, $A=5$

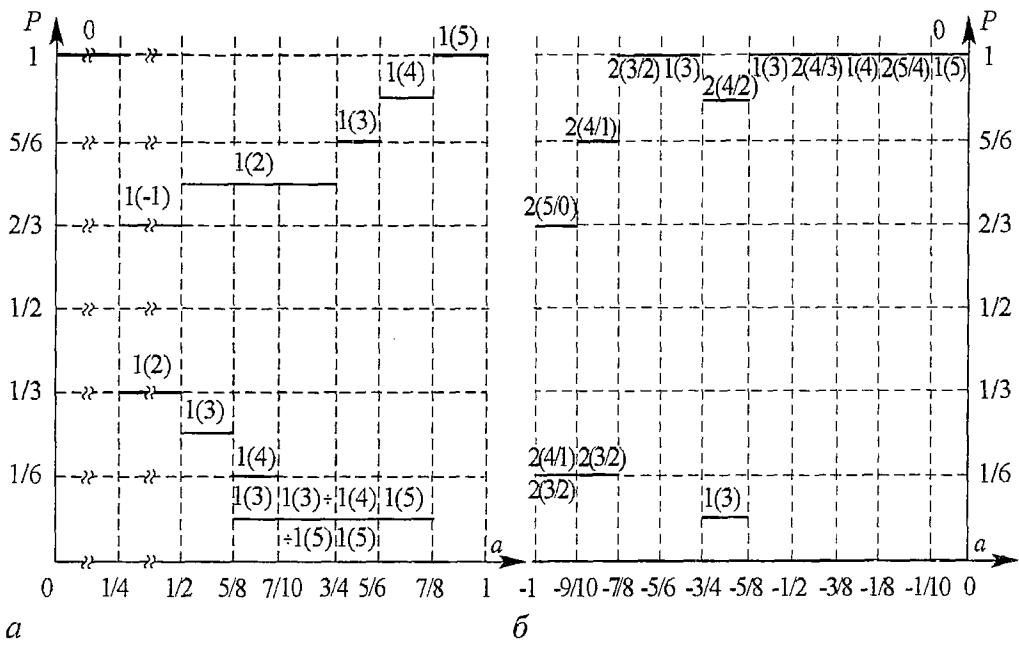


Рис. 4. Вероятностные диаграммы для $L=12$: a - фильтра нижних частот при $A=1$, b - фильтра верхних частот при $A=5$

позволяет построить бифуркационную и вероятностную диаграммы. Последняя показана на рис. 4, a .

Исследование колебаний для ряда значений L и A позволило установить следующие закономерности для наиболее вероятных установившихся значений величины x . В общем случае произвольного $0 < A < N_1$ на выходе фильтра имеем наиболее вероятное движение $T=1(X)$, где $A < X < N_1$, $A < N_1$, если на диаграмме Ламеря точки $X-1$ и X принадлежат области X . Это означает выполнение условия

$$X - \frac{1}{2} \leq aX + A < X + \frac{1}{2} \cap X - \frac{1}{2} \leq a(X-1) + A < X + \frac{1}{2},$$

откуда следует

$$(X - \frac{1}{2} - A)/(X - 1) \leq a < (X + \frac{1}{2} - A)/X.$$

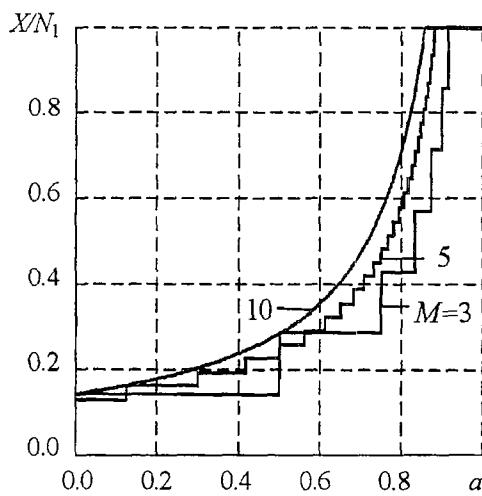


Рис. 5. Наиболее вероятные зависимости X/N_1 от величины параметра a для ФНЧ

При $X=A$ необходимо пользоваться выражением $0 < a < 1/(2A)$. В случае $X=N_1$ необходимо, чтобы точка N_1-1 принадлежала области N_1 , что означает $a \geq (N_1 - \frac{1}{2} - A)/(N_1 - 1)$, верхним значением этого диапазона является $a < 1$. При $A=N_1$, $a \in (0;1)$ на выходе фильтра имеем единственное установившееся движение $T=1(N_1)$.

Полученные закономерности позволяют найти зависимость $X(a)$ для любых L и A . Эту зависимость можно сравнить с идеальной при $L=\infty$, которая установлена в [5]. В качестве примера на рис. 5 приведены графики нормированной функции $X(a)/N_1$ для трех значений числа разрядов M , при этом, когда $M=3$, имеем $A=1$.

Пусть $a < 0$. В качестве примера рассмотрим случай $A=5$. Диаграмма Ламеря для $L=12$, $a=-\frac{8}{11}$ показана на рис. 3, б. Здесь график функции последований пересекается с биссектрисой в единственной точке при $x=3$. Это обуславливает возникновение колебаний $T=1(3)$ при старте из точки $x=3$. Вместе с тем, при старте из точек $[x] \in [-6; 2]$, $x \in \{4; 5\}$ в цели устанавливается паразитное колебание $T=2(4/2)$. Соответственно вероятности этих движений равны $P(3)=\frac{1}{12}$, $P(4/2)=\frac{11}{12}$. Рассмотрение движений при $a \in (-1; 0)$ позволяет построить бифуркационную и вероятностную диаграммы. Последняя показана на рис. 4, б.

Исследование колебаний для ряда значений L и A позволило установить следующие закономерности для наиболее вероятных установившихся значений X . В общем случае произвольного $1 < A \leq N_1$ на выходе ФВЧ имеем $T=1(X)$, где $1 < X \leq A$, если точки $X-1$ и X принадлежат области X или если точки X и $X+1$ принадлежат области X . Это означает выполнение условия

$$X - \frac{1}{2} \leq aX + A < X + \frac{1}{2} \cap X - \frac{1}{2} \leq a(X-1) + A < X + \frac{1}{2}$$

или

$$X - \frac{1}{2} \leq aX + A < X + \frac{1}{2} \cap X - \frac{1}{2} \leq a(X+1) + A < X + \frac{1}{2}.$$

Откуда следует

$$(X - \frac{1}{2} - A)/X \leq a < (X + \frac{1}{2} - A)/(X-1) \quad (1)$$

или

$$(X - \frac{1}{2} - A)/(X+1) \leq a < (X + \frac{1}{2} - A)/X. \quad (2)$$

При $X=1$ следует пользоваться выражением (2). В случае $A=1$ единственным колебанием с периодом $T=1$ является $T=1(1)$ при условии

$$-\frac{1}{2} \leq a < 0. \quad (3)$$

Левая граница этого диапазона обусловлена принадлежностью точки $X=1$ области I. Другим по сравнению с определяемыми из (1)-(3) областям параметра $a < 0$ соответствуют наиболее вероятные паразитные колебания с периодом $T=2$. Эти закономерности позволяют установить зависимость $X(a)$ для произвольных L и A . Этую зависимость можно сравнить с идеальной при $L=\infty$, которая рассчитывается с помощью методики, разработанной в [5].

Рассмотрим случай $A < 0$. Воспользовавшись методикой, описанной выше, получаем следующие закономерности для наиболее вероятных установившихся колебаний при произвольных L и A .

Пусть $a > 0$. В случае входного воздействия $-N_1 \leq A < -1$ на выходе ФНЧ имеем $T=1(X)$, где $-N_1 \leq X \leq A$, если точки X и $X+1$ принадлежат области X . Это означает выполнение условия

$$X - \frac{1}{2} \leq aX + A < X + \frac{1}{2} \cap X - \frac{1}{2} \leq a(X+1) + A < X + \frac{1}{2},$$

откуда следует

$$(X + \frac{1}{2} - A)/(X+1) < a \leq (X - \frac{1}{2} - A)/X. \quad (4)$$

В диапазоне входного воздействия $-N_1 \leq A \leq 1$ на выходе фильтра имеем $T=1(-N)$, если точка $-N$, на диаграмме Ламеря принадлежит области $-N$, это означает $a > (-N + \frac{1}{2} - A)/-N_1$, верхним значением этого диапазона является $a < 1$. При воздействии $A = -1$ на выходе фильтра имеем $T=1(-1)$, если точка $X = -1$ принадлежит области $-I$, это означает $0 < a \leq \frac{1}{2}$. При том же воздействии имеем $T=1(X)$, где $-N_1 \leq X < -1$, если точки X и $X+1$ принадлежат области X . Это означает выполнение условия (4), где $A = -1$. В случае $A = -N$ $a \in (0; 1)$ на выходе фильтра имеем единственное установившееся колебание $T=1(-N)$.

Пусть $a < 0$. В случае входного воздействия $-N \leq A < -1$ на выходе ФВЧ имеем $T=1(X)$, где $A \leq X < -1$, если на диаграмме Ламеря точки X и $X-1$ принадлежат области X или точки X и $X+1$ принадлежат области X . Результирующие соотношения получаем из (1), (2) путем замены знаков \geq и $<$ на \leq и $>$, соответственно. В том же диапазоне входного воздействия на выходе фильтра имеем $T=1(-1)$, если выполняется условие (1) с вышеуказанный заменой знаков неравенств. В случае $A=-1$ единственным колебанием с периодом $T=1$ является $T=1(-1)$ при условии $-1/2 < a < 0$. Левая граница этого диапазона обусловлена принадлежностью точки $X=-1$ области $-I$. Другим по сравнению с определенными выше областями параметра $a < 0$ соответствуют наиболее вероятные паразитные колебания с периодом $T=2$.

Теоретические результаты подтверждены компьютерным моделированием. Полученные закономерности нетрудно распространить на случай, когда переменные представляются в форме чисел с выравниванием слева (то есть в виде дробных чисел). Для этого достаточно ввести новую переменную $\underline{x} = xq$, где $q = 1/N$ – шаг квантования.

Заключение

Исследованы свободные колебания и колебания при постоянном входном воздействии в цифровых рекурсивных фильтрах нижних и верхних частот первого порядка, использующих арифметику с фиксированной запятой. Числа представляются в дополнительном коде, результаты суммирования округляются, а сумматор имеет характеристику с насыщением. Процессы в фильтрах характеризуются диаграммами Ламеря и вероятностными диаграммами. Полученные выражения позволяют рассчитывать наиболее вероятные режимы фильтров при произвольном числе уровней квантования.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-02-17500.

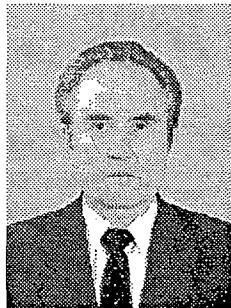
Библиографический список

1. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1978.
2. Капеллини В., Константинидис А. Дж., Эмилиан П. Цифровые фильтры и их применение. М.: Энергоатомиздат, 1983.
3. Брюханов Ю.А. Колебания в цифровых рекурсивных фильтрах первого порядка с усечением по модулю результатов сложения // Радиотехника и электроника. 2002. Т. 47, № 10. С.1208.
4. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1987.
5. Брюханов Ю.А. Колебания в нелинейных рекурсивных цифровых цепях первого порядка при постоянном внешнем воздействии // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1999. Т.7, №4. С. 29.

OSCILLATIONS IN THE FIRST-ORDER DIGITAL RECURSIVE FILTERS WITH REPRESENTATIONS OF NUMBERS IN ADDITIONAL CODE WITH ROUND-OFF

Yu.A. Bryuhanov

Processes in low-pass and high-pass filters with an arbitrary number of quantization levels are investigated. Numbers are represented in additional code and the results of adding are rounded. Adder have the characteristic with saturation. Using dot mappings method, the autonomous regime and oscillations under constant external influence are considered. Expressions for calculating the most probable operating modes are obtained.



Брюханов Юрий Александрович - родился в Красноярске (1941), окончил Красноярский политехнический институт (1967) и аспирантуру Воронежского государственного университета (1970). С 1971 года работает в Ярославском государственном университете, в настоящее время заведует кафедрой динамики электронных систем. Защитил кандидатскую диссертацию (1971) и докторскую диссертацию (1989) в области применения теории колебаний в задачах радиофизики и электроники. Область научных интересов - нелинейная динамика электронных систем дискретного времени. Автор монографии «Управление динамическим режимом колебательных систем» и более 180 статей. Заслуженный деятель науки РФ.