



ХАОТИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ В ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Л.Н. Канов, В.А. Соколов

Показано, что при совместной работе электрических машин постоянного тока последовательного и параллельного возбуждения возникают хаотические колебания токов и скоростей вращения машин. Получены числовые характеристики хаотических колебаний.

Введение

К настоящему времени подробно исследованы хаотические колебания в электрических и электронных цепях [1-5]. Однако подобные колебания, связанные с потерей локальной устойчивости, могут существовать и в электромеханических системах [6]. В классических монографиях по электроприводам (см., например, [7]) утверждается, что устойчивая совместная работа двигателя постоянного тока последовательного возбуждения в режиме генератора с машиной параллельного возбуждения невозможна. Такая ситуация возникает при динамическом торможении электропривода постоянного тока. В статье показана возможность возникновения хаотических колебаний токов и скоростей вращения электрических машин в подобной системе электропривода постоянного тока.

1. Математическая модель

Анализ электромагнитных процессов в системе электропривода постоянного тока выполним на основе цепи, показанной на рис. 1. Система состоит из двигателя последовательного возбуждения М1, к которому приложен вращающий момент M , и генератора параллельного возбуждения М2, вращающегося с неизменной скоростью. Упрощенная математическая модель системы имеет вид

$$\begin{cases} di/dt = 1/L [(k_{B1}\omega - R - R_a)i + (R_a - k_{B2})i_B], \\ di_B/dt = 1/L_B [R_a i + (k_{B2} - R_a - R_B)i_B], \\ d\omega/dt = 1/J (M - k_{тр}\omega - C_M i^2), \end{cases} \quad (1)$$

где i , ω - ток и скорость вращения двигателя последовательного возбуждения М1; i_B , i_a - ток возбуждения и ток якоря генератора параллельного возбуждения М2;

M - момент, прикладываемый к двигателю; L, R - индуктивность и сопротивление двигателя M1; L_B, R_B, R_a - индуктивность, сопротивление возбуждения, сопротивление якоря генератора M2; $e_1 = k_{B1} \omega i$, $e_2 = k_{B2} i_B$ - ЭДС двигателя и генератора; k_{B1}, k_{B2} - коэффициенты возбуждения; C_M - электро-механическая постоянная; $k_{тр}$ - коэффициент трения; J - приведенный к валу двигателя момент инерции.

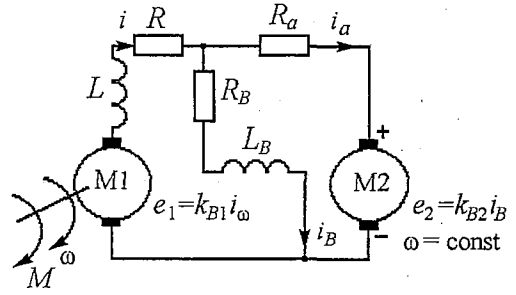


Рис. 1. Схема электропривода постоянного тока

2. Метод решения

Приравнявая правые части уравнений (1) к нулю и исключая i_B и ω , получаем уравнение равновесного состояния системы

$$(k_{B1}/k_{тр})(iM - C_M i^3) - (R + R_a)i + (R_a - k_{B2})R_a i / (R_a + R_B - k_{B1}) = 0. \quad (2)$$

Отсюда следует, что возможны три равновесных значения тока двигателя: $i_1 = 0$ и $i_{2,3} = \pm((M - M_{кр})/C_M)^{1/2}$. Здесь обозначен критический момент

$$M_{кр} = k_{тр}/k_{B1} [R + R_a R_B / (R_a + R_B - k_{B2})] \quad (3)$$

и $R_B > k_{B2}$.

Таким образом, если внешний вращающий момент меньше критического (3), существует состояние равновесия системы (1) при $i = i_B = 0$ и $\omega = M/k_{тр}$. С увеличением момента возникают два состояния равновесия с токами $i = \pm((M - M_{кр})/C_M)^{1/2}$, $i_B = i R_a / (k_{B2} - R_a - R_B)$ и скоростью $\omega = M_{кр}/k_{тр}$. Как видно из последнего выражения, при $M > M_{кр}$ скорость не зависит от величины момента M .

Для оценки устойчивости состояний равновесия составим матрицу A линеаризованной системы (1)

$$A = \begin{bmatrix} (k_{B1} \omega - R - R_a)/L & (R_a - k_{B2})/L & k_{B1} i/L \\ R_a/L_B & (k_{B2} - R_a - R_B)/L_B & 0 \\ -2C_M i/J & 0 & -k_{тр}/J \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Собственные числа матрицы определяются уравнением

$$(p + k_{тр}/J) [(p + (R + R_a - k_{B1} \omega)/L) (p + (R_a + R_B - k_{B2})/L_B) + (R_a/L_B)(k_{B2} - R_a)/L] + (2C_M k_{B1}/(JL)) i^2 (p + (R_a + R_B - k_{B2})/L_B) = 0. \quad (5)$$

Равновесию с нулевыми токами i и i_B при $M < M_{кр}$ и $L < L_B$ соответствует $p_1 = -k_{тр}/J$ и еще пара вещественных отрицательных корней, что говорит об устойчивости этого состояния.

Равновесие с ненулевыми токами i, i_B дает полное кубическое уравнение (5) вида $p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0$. Анализ коэффициентов этого уравнения, выполненный при типичных значениях параметров системы с машинами небольшой мощности ($L \approx 2$ Гн, $L_B \approx 3$ Гн, $R_a \approx R \approx 1$ Ом, $R_B = 40$ Ом, $k_{B1} = 2.1$ Ом·с, $k_{B2} = 32$ Ом, $J = 0.8$ кг·м², $k_{тр} \approx 1$ Н·м·с, $C_M = 2.5 \cdot 10^{-3}$ Н·м/А²), в соответствии с условием $a_1 a_2 - a_3 = 0$ дает граничное значение момента M_0 , при котором система еще будет устойчива: $M_0 = 5.8$ Н·м, критический момент для этих же численных данных $M_{кр} = 2.6$ Н·м.

В этих условиях система имеет пару сопряженных собственных чисел $p_{1,2}=\lambda_1 \pm j\lambda_2$ и одно отрицательное вещественное собственное число $p_3=-\alpha$, $\alpha>0$.

При $5.8>M>2.6$ собственные числа $p_{1,2}$ находятся в левой полуплоскости и определяют состояние равновесия типа устойчивого фокуса. Исключив из очевидных соотношений $-a_1=2\lambda_1+\alpha$, $a_2=|p|^2+2\lambda_1\alpha$, $-a_3=|p|^2\alpha$ величины α , λ_2 , получаем для λ_1 уравнение $-a_2(a_1+2\lambda_1)=-a_3+2\lambda_1(a_1+2\lambda_1)^2$. Дифференцируя это уравнение по M и учитывая, что при $M=M_0$ $\lambda_1=0$, находим выражение для производной $d\lambda_1/dM = =1/[2(a_1^2+a_2)]d(a_3-a_1a_2)/dM$. С учетом вышеприведенных значений параметров системы определяем, что при $M=M_0$ производная $d\lambda_1/dM>0$, то есть при граничном значении момента пара сопряженных собственных чисел $p_{1,2}$ переходит из левой полуплоскости в правую.

3. Результаты

Таким образом, в точке $M=M_0$ выполняется условие теоремы Хопфа [8] о бифуркации рождения цикла, в соответствии с которой можно утверждать, что при достижении моментом значения M_0 в системе происходит бифуркация рождения неустойчивого цикла. На рис. 2 приведены фазовые траектории

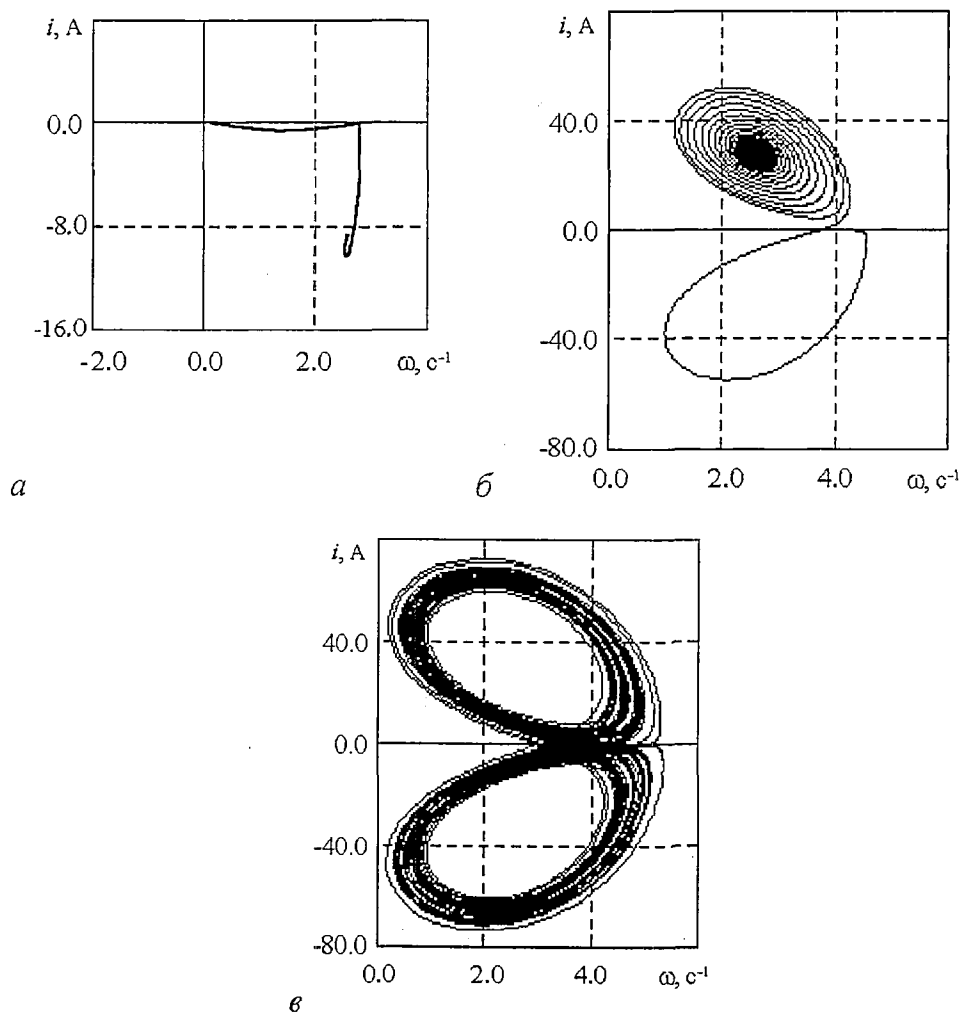


Рис. 2. Фазовые траектории при различных значениях M , Н·м: 2.62 (а); 4.6 (б); 6.0 (в)

системы, иллюстрирующие ее поведение при различных значениях M . Рис. 2, в показывает, что при $M > M_0$ система (1) переходит в режим хаотических колебаний, и в ее фазовом пространстве возникает странный аттрактор - область глобально устойчивых, но локально неустойчивых колебаний (рис. 3). Первый лист аттрактора расположен в квадранте $i, i_B, \omega > 0$; второй - $i, i_B < 0, \omega > 0$. Фазовая точка попадает в область притяжения одного из листов аттрактора, однако после нескольких оборотов вокруг неустойчивого фокуса она захватывается областью притяжения другого листа, чтобы затем вновь покинуть его. Хаотические колебания, возникающие в системе (1) при $M > M_0$, изображены на рис. 4.

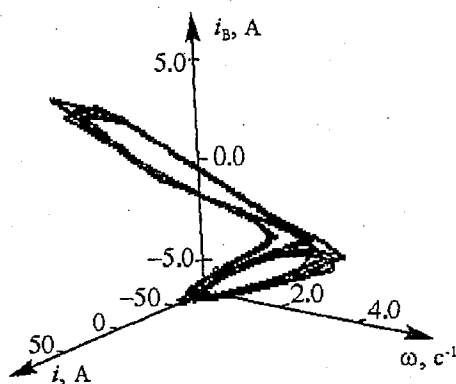


Рис. 3. Аттрактор, $M=6.0 \text{ Н}\cdot\text{м}$

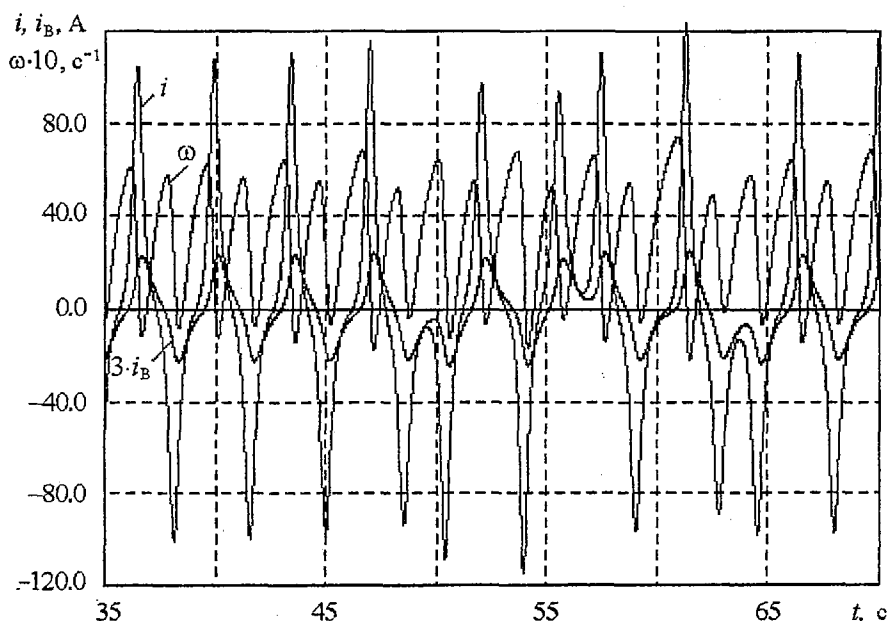


Рис. 4. Колебания токов и скорости двигателя, $M=9.0 \text{ Н}\cdot\text{м}$

Для оценки диапазона значений момента M , вызывающих хаотические колебания, в интервале $0 \dots 600 \text{ с}$ выполнялось численное интегрирование уравнений (1) при различных M с нулевыми начальными условиями. Для каждого M фиксировались точки пересечения фазовой траектории с плоскостью $\omega=2$. На рис. 5 показана построенная таким образом диаграмма точечного отображения Пуанкаре для тока i . Из диаграммы следует, что при моменте, большем критического, в системе происходит появление все

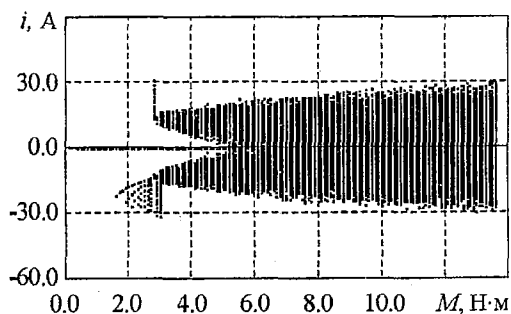


Рис. 5. Отображение Пуанкаре, $\omega=2.0 \text{ с}^{-1}$

большого количества субгармоник, приводящее к хаотическим колебаниям в широком диапазоне значений момента.

Подтверждение хаотического характера колебаний дают показатели Ляпунова [9], характеризующие разбегание близких фазовых траекторий с течением времени. Первый показатель λ_1 определяется из соотношения $|y(t)|/|y(0)| = \exp(\lambda_1 t)$, где $y(t)$ - вектор состояния линеаризованной однородной системы с матрицей A из (4). Исходная система (1) и линеаризованная система с начальными условиями $y_1(0)=1, y_2(0)=y_3(0)=0$ интегрируются совместно в течение достаточно большого времени, после чего показатель λ_1 подсчитывается по формуле $\lambda_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} (1/t) \ln(|y(t)|/|y(0)|)$. В случае устойчивого детерминированного процесса $\lambda_1 < 0$. При хаотических колебаниях линеаризованная система неустойчива вдоль траектории системы (1) (вначале близкие траектории разбегаются), и $\lambda_1 > 0$. На рис. 6 приведены графики показателей Ляпунова в зависимости от изменения момента M . Из графиков следует, что при всех значениях момента, когда существуют хаотические колебания, показатель λ_1 положителен, а показатель λ_3 всегда отрицателен.

Размерность странного аттрактора системы (1) в режиме хаотических колебаний оценивается по показателям Ляпунова [1]: $\dim = j + \sum_{i=1}^j \lambda_i / |\lambda_{j+1}|$, где $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$, а j определяется из условий: $\lambda_1 + \dots + \lambda_j \geq 0, \lambda_1 + \dots + \lambda_{j+1} < 0$. На рис. 6 показан также график зависимости размерности аттрактора системы (1) от момента M , из которого следует, что в области хаотических колебаний аттрактор имеет дробную размерность $1 \leq \dim \leq 3$, что говорит о его фрактальной структуре.

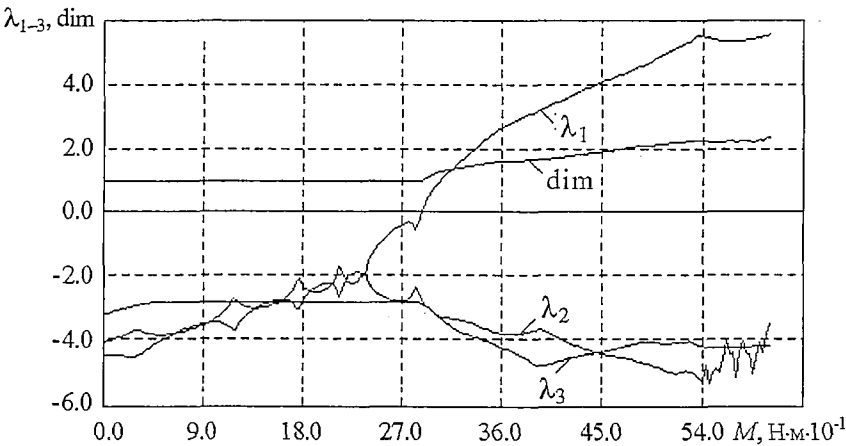


Рис. 6. Показатели Ляпунова и размерность аттрактора

Заключение

Аналогичный анализ показывает, что подобные явления возникают в рассматриваемой паре машин и при других условиях, например, когда машина M2 работает в режиме двигателя, а также тогда, когда машина M1 работает в режиме генератора с постоянной скоростью. В последнем случае хаотически изменяются ток и скорость машины M2. К хаотическим колебаниям приводит не только изменение вращающего момента, но и изменение параметров машин, например k_{B1} . Кроме того, хотя в упрощенной модели электропривода (1) магнитные характеристики машин полагались линейными, тем не менее, при учете насыщения

магнитных цепей машин возникновение хаотических колебаний также имеет место.

Проведенные исследования подтверждают невозможность совместной устойчивой работы машин последовательного и параллельного возбуждения. Попытка перевести двигатель последовательного возбуждения в генераторный режим вызывает появление сложных периодических или хаотических колебаний токов якорей и возбуждения обеих машин, а также их скоростей вращения. Это происходит в широком диапазоне изменения как вращающего момента, так и параметров машин.

Библиографический список

1. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987. 424 с.
2. Зевеке Г.В. Основы теории цепей. М.: Энергоатомиздат, 1989. 528 с.
3. Канов Л.Н., Хаиндрава В.М. Хаотические колебания в нелинейных электрических цепях // Вестник СевГТУ. Вып. 26: Информатика, электроника, связь. Севастополь, 2000. С. 26.
4. Канов Л.Н., Соколов В.А. Хаотические колебания в нелинейном колебательном контуре со схемой Бушера // Вестник СевГТУ. Вып.31: Информатика, электроника, связь. Севастополь, 2001. С. 122.
5. Соколов В.А., Канов Л.Н. Энергетический метод анализа хаотических колебаний нелинейных систем // Вестник СевГТУ. Вып. 41: Информатика, электроника, связь. Севастополь, 2002. С. 129.
6. Канов Л.Н., Кудашев В.С., Языков А.А. Хаотические колебания в электроприводах постоянного тока // Оптимизация производственных процессов. Вып. 4. Севастополь, 2001. С. 127.
7. Андреев В.П., Сабинин Ю.А. Основы электропривода. М.; Л.: Госэнергоиздат, 1963. 772 с.
8. Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И. Теория и приложения бифуркации рождения цикла. М.: Мир, 1985. 280 с.
9. Былов Б.Ф. Теория показателей Ляпунова и ее применение. М.: Наука, 1966. 514 с.

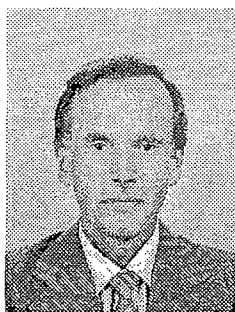
Севастопольский национальный
технический университет
Московский государственный университет,
Черноморский филиал

Поступила в редакцию 24.12.03
после доработки 22.06.04

CHAOTIC OSCILLATIONS IN ELECTROMECHANICS SYSTEMS

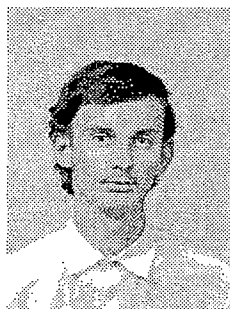
L.N. Kanov, V.A. Sokolov

It is shown that chaotic fluctuations of current and of rotation-velocities appear at collaboration of electrical machines of direct current of consequent and parallel excitation. Numeric features of chaotic fluctuations are received.



Канов Лев Николаевич - родился в Тюмени (1948), окончил Севастопольский приборостроительный институт (1974), кандидат технических наук в области теоретической электротехники, доцент кафедры судовых и промышленных электромеханических систем факультета морских технологий и судоходства Севастопольского национального технического университета. Область научных интересов - схемное моделирование, прикладная нелинейная динамика, теория управления.

E-mail: pu541@sevcom.net



Соколов Владимир Андреевич - родился в Севастополе (1983), аспирант Черноморского филиала Московского государственного университета по специальности «физика». Область научных интересов - прикладная нелинейная динамика.

E-mail: pu541 @ sevcom.net