



## ДИНАМИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ, БИФУРКАЦИИ И ПЕРЕХОДЫ К ХАОТИЧЕСКОМУ ПОВЕДЕНИЮ В МОДЕЛЯХ СВЯЗАННЫХ СИСТЕМ СИНХРОНИЗАЦИИ СЛОЖНОГО СИГНАЛА

*В.П. Пономаренко*

В работе приведены результаты исследования нелинейной динамики в моделях двухкольцевой системы синхронизации по частоте и задержке во времени. Получены условия устойчивости синхронного режима, определены области значений параметров, при которых реализуется этот режим и наблюдаются разнообразные, в том числе хаотические, несинхронные режимы. Изучены особенности поведения системы в процессе перехода к состоянию синхронного слежения за параметрами входного сигнала.

1. Современные методы приема и оценивания изменяющихся параметров сложных сигналов основаны на применении разнообразных систем автоматического управления колебаниями, в основе функционирования которых лежит принцип синхронизации входного (оцениваемого) и опорного (синтезируемого в системе управления) сигналов. В классе таких систем важное значение для радиоавтоматики, радионавигации и широкополосной радиосвязи, получающей в последнее время все большее распространение [1], имеют взаимосвязанные двухкольцевые системы синхронизации (ДСС), которые позволяют решать задачи следящей оценки параметров радиосигналов. Богатый набор и сложность динамических процессов, демонстрируемых этими нелинейными системами, фундаментальная и прикладная значимость свойств их динамического поведения для теории и проектирования разнообразных устройств формирования и обработки сигналов, адекватность моделей систем многим объектам из других приложений обусловили неослабевающий интерес специалистов к различным аспектам нелинейной динамики ДСС.

Применительно к классу псевдослучайных фазоманипулированных сигналов, получивших широкое применение в системах широкополосной связи и управления, оцениваемыми параметрами во многих задачах являются фазовый угол  $\vartheta(t)$  и задержка во времени  $T(t)$ . Соответствующая структура ДСС, реализующая оптимальные алгоритмы оценки этих параметров, выполняется на основе взаимосвязанных парциальных систем фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ) и автоподстройки задержки (АПЗ) [2-4]. Подсистемы ФАПЧ и АПЗ представляют собой системы автоматического управления, построенные по принципу отрицательной обратной связи [2, 5]. Основными элементами этих подсистем являются: управляемые генераторы, при помощи которых в системе

формируется опорный сигнал с параметрами  $\vartheta^*(t)$  и  $T^*(t)$  (оценками изменяющихся параметров  $\vartheta(t)$  и  $T(t)$ ); дискриминаторы рассогласований фаз  $\varphi = \vartheta(t) - \vartheta^*(t)$  и задержек  $\eta = T(t) - T^*(t)$ , вырабатывающие управляющие сигналы; цепи управления с фильтрами низких частот (ФНЧ), структуры которых определяются в зависимости от принятых моделей изменения оцениваемых параметров  $\vartheta(t)$  и  $T(t)$ . Взаимодействие подсистем ФАПЧ и АПЗ в общем случае осуществляется как через перекрестные обратные связи (с выхода одной из подсистем на вход другой подсистемы), так и через связи по цепям управления.

Управляющий сигнал в подсистеме ФАПЧ, зависящий от величины и знака рассогласования  $\varphi$ , образуется в результате сопоставления в фазовом дискриминаторе фаз входного сигнала и колебаний управляемого генератора. Формирование управляющего сигнала в подсистеме АПЗ, зависящего от величины и знака рассогласования  $\eta$ , основано на вычислении в дискриминаторе, содержащем два коррелятора и вычитатель, разности функций корреляции между входным и двумя опорными псевдослучайными сигналами, один из которых следует во времени с опережением на длительность  $\Delta$  одного элемента сигнала, а другой - с отставанием на  $\Delta$ . Управляющие сигналы используются для коррекции частот управляемых генераторов, результатом которой является уменьшение первоначальных рассогласований  $\varphi$  и  $\eta$  до достижения стационарного состояния, в котором величины  $\varphi$  и  $\eta$  имеют минимальные значения. Такое состояние ДСС принято называть состоянием (режимом) синхронизации опорного сигнала, формируемого при помощи подсистем ФАПЧ и АПЗ, по оцениваемому сигналу. Важно, что при достижении и сохранении этого состояния в системе создается возможность синхронного слежения за изменяющимися параметрами  $\vartheta(t)$  и  $T(t)$ .

Благодаря практически неограниченной свободе в выборе типов ФНЧ в цепях управления подсистем ФАПЧ и АПЗ и в организации связей между подсистемами рассматриваемая структура ДСС предоставляет широкие возможности при решении задач синхронизации и оценки параметров различных типов сложных сигналов. Для этих приложений режим синхронизации является основным рабочим режимом ДСС, поэтому главной задачей при исследовании динамики таких систем является изучение устойчивости и условий реализации этого режима, выяснение путей подавления его потенциальных неустойчивостей и механизмов перехода от несинхронного режима к режиму слежения. Несинхронные режимы систем (режимы с непостоянными величинами рассогласований  $\varphi$  и  $\eta$ ), являющиеся нежелательными для обеспечения слежения за параметрами  $\vartheta$  и  $T$ , представляют непосредственный интерес для задач формирования сложных регулярных и хаотических колебаний управляемых генераторов ДСС. Использование разнообразных несинхронных режимов в качестве рабочих состояний ДСС позволяет расширить функциональные возможности систем. В связи с этим большой интерес приобретают задачи обнаружения различных типов асинхронных режимов, стимулирования их неустойчивости, исследования эволюции режимов при изменении параметров систем и выяснения способов управления режимами. Таким образом, исследование нелинейной динамики различных вариантов ДСС имеет большое значение для обоснованного принятия решения о целесообразности практического использования того или иного варианта структуры системы в конкретных приложениях.

Объектом исследования в данной работе является ДСС, в которой взаимодействие подсистем ФАПЧ и АПЗ осуществляется через однонаправленные связи - связь с выхода подсистемы АПЗ на вход подсистемы ФАПЧ и связь по цепям управления. Такая структура ДСС интересна тем, что она является [3, 6] схемной реализацией оптимального алгоритма оценки параметров  $\vartheta$

и  $T$  в условиях значительных частотных и временных рассогласований оцениваемого и опорного сигналов. Этот алгоритм основан на так называемой некогерентной обработке сигнала (без учета информации о его фазе). В рассматриваемой ДСС связь с выхода подсистемы АПЗ на вход подсистемы ФАПЧ необходима для демодуляции входного сигнала, она реализуется использованием блока перемножения входного сигнала и сигнала управляемого генератора подсистемы АПЗ. Через связь по цепям управления осуществляется передача сигнала о фазовом рассогласовании, образующемся в подсистеме ФАПЧ, в цепь управления подсистемы АПЗ.

2. Уравнения динамики рассматриваемой системы получаем из уравнений для оценок  $\vartheta^*(t)$  и  $T^*(t)$ , выведенных в [3, 6]. Записанные для рассогласований  $\varphi$  и  $\eta$  в операторной форме ( $p \equiv d/dt$ ) эти уравнения имеют вид

$$\dot{\varphi} = \vartheta - (k_\varphi/p)F_1(p)R(\eta)\sin \varphi, \quad (1)$$

$$\dot{\eta} = T - (k_\tau/p)F_2(p)[D(\eta) + k_3R(\eta)\sin \varphi],$$

где  $k_\varphi$  и  $k_\tau$  - коэффициенты усиления по цепям управления подсистем ФАПЧ и АПЗ;  $k_3$  - параметр, характеризующий степень связи подсистем по цепям управления;  $F_1(p)$  и  $F_2(p)$  - операторы, определяемые коэффициентами передачи фильтров в цепях управления подсистем ФАПЧ и АПЗ;  $R(\eta)$  и  $D(\eta) = R(\eta - \Delta) - R(\eta + \Delta)$  - нелинейности (корреляционная функция манипулирующего псевдослучайного сигнала и дискриминационная характеристика подсистемы АПЗ, соответственно), определяемые следующими зависимостями [2]:

$$R(\eta) = \begin{cases} 1 + \eta/\Delta, & -\Delta \leq \eta \leq 0, \\ 1 - \eta/\Delta, & 0 \leq \eta \leq \Delta, \\ 0, & |\eta| \geq \Delta, \end{cases}$$

$$D(\eta) = \begin{cases} -2 - \eta/\Delta, & -2\Delta \leq \eta \leq -\Delta, \\ \eta/\Delta, & -\Delta \leq \eta \leq \Delta, \\ 2 - \eta/\Delta, & \Delta \leq \eta \leq 2\Delta, \\ 0, & |\eta| \geq 2\Delta. \end{cases}$$

Уравнениям (1) соответствует эквивалентная структурная схема исследуемой ДСС, приведенная на рис. 1. Особенность этой системы состоит в том, что дискриминационная характеристика  $D(\eta)$  имеет ограниченную рабочую область  $\Omega_\eta$  рассогласований  $\eta$  ( $\Omega_\eta = \{|\eta| < 2\Delta\}$ ), в то время как раскрыв дискриминационной характеристики  $F(\varphi)$  подсистемы ФАПЧ ( $F(\varphi) = \sin \varphi$ ) охватывает все возможные значения  $\varphi$ . В начальный момент величина рассогласования  $\eta$  может выходить за пределы области  $\Omega_\eta$ , тогда петля управления

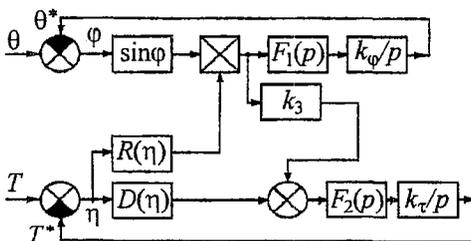


Рис. 1. Эквивалентная структурная схема системы синхронизации

задержкой оказывается разомкнутой и режим слежения невозможен. Для его реализации в этом случае обычно предусматривается режим предварительной синхронизации (режим поиска по задержке [2]), в процессе которой частота колебаний управляемого генератора подсистемы АПЗ изменяется так, чтобы величина рассогласования  $\eta$  оказалась в пределах области

$\Omega_{\eta}$ . При этом переход к состоянию синхронного слежения возможен, если после окончания режима поиска начальное состояние системы будет локализовано в области притяжения режима синхронизации.

Конкретный вид и размерность уравнений (1) зависят от коэффициентов передачи  $F_1(p)$  и  $F_2(p)$ . В данной работе мы рассмотрим особенности динамики ДСС, описываемой уравнениями (1), в следующих случаях:

- $F_1(p)=1, F_2(p)=1$  - без ФНЧ в цепях управления подсистем ФАПЧ и АПЗ;
- $F_1(p)=1/(1+(\tau_1+\tau_2)p+\tau_1\tau_2p^2)$ , а  $F_2(p)=1/(1+\tau_3p)$  - с применением ФНЧ второго порядка в цепи управления подсистемы ФАПЧ и интегрирующего ФНЧ первого порядка в цепи управления подсистемы АПЗ ( $\tau_1, \tau_2$  и  $\tau_3$  - постоянные времени). Рассматриваемые типы ФНЧ соответствуют моделям динамики параметров  $\vartheta$  и  $T$ , используемым в ряде прикладных задач [2, 3].

Нелокальное исследование получаемых в этих случаях моделей ДСС сопряжено с существенными трудностями, в связи с чем в качестве основного метода их исследования мы привлекаем компьютерное моделирование, которое базируется на качественно-численных методах анализа нелинейных динамических систем [7-9]. Организация статьи следующая. Вначале рассмотрена двумерная модель системы, соответствующая случаю  $F_1(p)=F_2(p)=1$ , на которой выясняются динамические режимы и бифуркации в зависимости от степени связи по цепям управления. Затем на примере модели с двумя с половиной степенями свободы исследуется влияние параметров инерционности на динамику системы, показывается возможность генерации в системе хаотически модулированных колебаний.

3. Полагая в уравнениях (1)  $F_1(p) = F_2(p) = 1$  и переходя к безразмерному времени  $\tau = k_{\varphi} t$ , безразмерной переменной  $x = \eta/\Delta$  и параметрам  $\gamma = p\vartheta/k_{1\varphi}$  и  $\beta = pT/(k_{\varphi}\Delta)$  (имеющим смысл относительных начальных расстроек частот входного сигнала и колебаний управляемых генераторов подсистем ФАПЧ и АПЗ),  $b = k_{\tau}/(k_{\varphi}\Delta)$ ,  $\alpha = k_3 b$ , получим следующую систему уравнений

$$d\varphi/d\tau = \gamma - R(x)\sin \varphi, \quad dx/d\tau = \beta - bD(x) - \alpha R(x)\sin \varphi. \quad (2)$$

Система (2) в силу периодичности правых частей по  $\varphi$  с периодом  $2\pi$  является динамической системой с цилиндрическим фазовым пространством  $U_1 = (\varphi(\text{mod } 2\pi), x)$ . Она соответствует ДСС, в которой обе парциальные системы характеризуются достаточно простым регулярным поведением, и отражает свойства поведения системы, обусловленные нелинейностью парциальных систем и связью через управляющие сигналы. Поведение системы (2) определяется параметрами  $\gamma, \beta, b, \alpha$ . Параметр  $b > 0$  по физическому смыслу. В силу инвариантности системы (2) относительно преобразований  $(\varphi, x, \gamma, \beta) \rightarrow (-\varphi, -x, -\gamma, -\beta)$  и  $(\beta, \alpha, x) \rightarrow (-\beta, -\alpha, -x)$  достаточно рассмотреть ее, например, в области значений параметров  $D_0 = \{\gamma \geq 0, \alpha \geq 0, \beta\}$ . Движения системы (2) будем исследовать на развертке фазового цилиндра  $U_1$  на часть плоскости  $(\varphi, x)$  в полосе  $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ . Разбиение фазового цилиндра на траектории системы определяют [10-12] состояния равновесия, сепаратрисы седел, предельные циклы первого рода (колебательные) и второго рода (вращательные).

Особые траектории системы (2) имеют применительно к динамике рассматриваемой ДСС следующий физический смысл. Устойчивому состоянию равновесия соответствует режим синхронизации. Устойчивый предельный цикл первого рода (не охватывающий фазовый цилиндр) определяет квазисинхронный режим ДСС, в котором рассогласования  $\varphi$  и  $x$  периодически изменяются относительно синхронного состояния. Устойчивому предельному циклу второго рода (охватывающему фазовый цилиндр) соответствует асинхронный режим с

вращением фазы, в котором рассогласование фаз  $\varphi$  неограниченно нарастает, а рассогласование задержек  $x$  периодически изменяется относительно некоторого среднего значения. Сепаратрисы седел выделяют на фазовом цилиндре области начальных значений  $\varphi$  и  $x$ , начиная с которых, в ДСС устанавливается тот или иной стационарный режим.

**3.1.** Обсудим влияние параметра  $\alpha$  на устойчивость синхронного режима. При значениях параметров  $(\gamma, \beta, b, \alpha) \in C_0$ , где область  $C_0 = \{\beta_1(\gamma, b, \alpha) < \beta < \beta_2(\gamma, b, \alpha), 0 \leq \gamma < 1\}$ , а значения  $\beta_1(\gamma, b, \alpha) = -b + \gamma(\alpha + b)$ ,  $\beta_2(\gamma, b, \alpha) = b + \gamma(\alpha - b)$ , система (2) имеет два состояния равновесия  $A_1(\varphi_1, x_1)$  и  $A_2(\varphi_2, x_2)$ , координаты которых определяются равенствами

$$\varphi_1 = \arcsin \{ \gamma / [1 - (\beta - \alpha\gamma)b^{-1} \text{sign}(\beta - \alpha\gamma)] \}, \quad x_1 = (\beta - \alpha\gamma)b^{-1}, \quad \varphi_2 = \pi - \varphi_1, \quad x_2 = x_1. \quad (3)$$

Состояния равновесия  $A_1(\varphi_1, x_1)$  и  $A_2(\varphi_2, x_2)$  расположены в области  $0 < x < 1$  фазового цилиндра  $U_1$  при значениях  $\beta - \alpha\gamma > 0$  или в области  $-1 < x < 0$  фазового цилиндра  $U_1$  при значениях  $\beta - \alpha\gamma < 0$ . Анализируя характеристические уравнения системы для  $A_1$  и  $A_2$ , устанавливаем следующее: состояние равновесия  $A_1(\varphi_1, x_1)$  при значениях  $\alpha < b$  устойчиво для всех значений параметров  $(\gamma, \beta, b, \alpha) \in C_0$ ; при значениях  $\alpha > b$  состояние равновесия  $A_1(\varphi_1, x_1)$  устойчиво для значений параметров  $(\gamma, \beta, b, \alpha) \in C_s$ , где  $C_s = \{\beta_1(\gamma, b, \alpha) < \beta < \beta^*(\gamma, b, \alpha)\}$ ,  $C_s \subset C_0$ , значение  $\beta^*(\gamma, b, \alpha)$  определяется из условия  $b - \alpha \sin \varphi_1 + (1 - (\beta - \alpha\gamma)b^{-1}) \cos \varphi_1 = 0$ ; состояние равновесия  $A_2(\varphi_2, x_2)$  - седло.

Граница  $\beta = \beta^*(\gamma, b, \alpha)$  области устойчивости  $C_s$  состояния равновесия  $A_1(\varphi_1, x_1)$  проходит в области  $C_n = \{\max(b, \alpha\gamma) < \beta < \beta_2(\gamma, b, \alpha)\}$ . Исследуя расположение границы  $\beta = \beta^*$  в зависимости от параметра  $b$ , получаем, что  $\beta^*(\gamma, b, \alpha) \rightarrow \beta_2(\gamma, b, \alpha)$  при уменьшении  $b$ ,  $\beta^*(\gamma, b, \alpha) \rightarrow \beta_0(\gamma, b, \alpha) = \max(b, \alpha\gamma)$  при увеличении  $b$ . Поведение системы (2) вблизи границы устойчивости  $\beta = \beta^*$  определяется, как известно [11,13], знаком первой ляпуновской величины  $L$ . Для ее вычисления положим  $\varphi - \varphi_1 = \xi$ ,  $x - x_1 = \eta$  и, ограничиваясь в разложении в ряд правых частей системы (2) членами до третьего порядка включительно, запишем систему в новых переменных

$$d\xi/d\tau = a\xi + b_0\eta + a_{20}\xi^2 + a_{11}\xi\eta + a_{02}\eta^2 + a_{30}\xi^3 + a_{21}\xi^2\eta + a_{12}\xi\eta^2 + a_{03}\eta^3,$$

$$d\eta/d\tau = c\xi + d_0\eta + b_{20}\xi^2 + b_{11}\xi\eta + b_{02}\eta^2 + b_{30}\xi^3 + b_{21}\xi^2\eta + b_{12}\xi\eta^2 + b_{03}\eta^3,$$

где

$$a = -(1 - x_1)\cos\varphi_1, \quad b_0 = \sin\varphi_1, \quad a_{20} = ((1 - x_1)\sin\varphi_1)/2, \quad a_{11} = \cos\varphi_1, \quad a_{30} = ((1 - x_1)\cos\varphi_1)/6,$$

$$a_{21} = -(\sin\varphi_1)/2, \quad a_{02} = a_{12} = a_{03} = 0, \quad c = -\alpha(1 - x_1)\cos\varphi_1, \quad d_0 = \alpha\sin\varphi_1 - b, \quad b_{20} = (\alpha(1 - x_1)\sin\varphi_1)/2,$$

$$b_{11} = \alpha\cos\varphi_1, \quad b_{30} = (\alpha(1 - x_1)\cos\varphi_1)/6, \quad b_{21} = -(\alpha\sin\varphi_1)/2, \quad b_{02} = b_{12} = b_{03} = 0.$$

Подставляя значения этих коэффициентов в выражение для первой ляпуновской величины (см. [11,13]), получаем после вычислений

$$L = (\pi/4)(2\alpha\cos^3\varphi_1 + \gamma)(b\gamma \sin\varphi_1 \cos^3\varphi_1)^{-1/2} =$$

$$= \pi(2\alpha(1 - \gamma^2(1 - (\beta - \alpha\gamma)b^{-1})^{-2})^{3/2} + \gamma) / [4(1 - \gamma^2(1 - (\beta - \alpha\gamma)b^{-1})^{-2})^{3/4}(\gamma(1 - (\beta - \alpha\gamma)b^{-1})^{-1})^{1/2}].$$

Так как  $L > 0$ , то граница области устойчивости  $\beta = \beta^*$  является опасной. Это означает, что при переходе через границу  $\beta = \beta^*$  от значений  $\beta < \beta^*$  к значениям  $\beta > \beta^*$  состояние равновесия  $A_1$  становится неустойчивым, к нему стягивается неустойчивый предельный цикл  $P_1$  первого рода; при переходе через границу  $\beta = \beta^*$  в обратном направлении (от значений  $\beta > \beta^*$  к значениям  $\beta < \beta^*$ ) неустойчивое

состояние равновесия  $A_1$  становится устойчивым с рождением от него неустойчивого предельного цикла  $P_1$ .

**3.2.** Рассмотрим динамику системы (2) при значениях  $0 < \alpha < b$ . Прежде всего, отметим интересную особенность системы - при значениях  $|\beta| < b$ ,  $\alpha \geq 0$  она имеет на фазовом цилиндре  $U_1$  неустойчивый вращательный предельный цикл  $\Gamma_0$ ;  $\{x = 2 \operatorname{sign} \beta - \beta b^{-1}\}$ , расположенный при значениях  $0 < \beta < b$  в области  $1 < x < 2$ , а при значениях  $-b < \beta < 0$  - в области  $-2 < x < -1$ . Фазовые траектории, проходящие при  $0 < \beta < b$  (при  $-b < \beta < 0$ ) выше (ниже) цикла  $\Gamma_0$ , поднимаются (опускаются) на цилиндре  $U_1$ . Наличие у системы (2) таких траекторий исключает возможность глобальной устойчивости синхронного режима ДСС, которая характерна для одиночной системы ФАПЧ [5].

Численное исследование системы (2) обнаруживает существование у нее бифуркации петли сепаратрис второго рода  $\Pi_\phi$  седла  $A_2$ , охватывающей фазовый цилиндр  $U_1$ , при значениях  $\beta = \beta_s(\gamma, b, \alpha)$ . При этом, в случае, когда значения  $b > 1 + \alpha$ , седловая величина  $\sigma = -(1 - x_2) \cos \varphi_2 - b + \alpha \sin \varphi_2 < 0$ , следовательно, петля  $\Pi_\phi$  устойчивая, а в случае, когда значения параметра  $\alpha < b < 1 + \alpha$ , седловая величина  $\sigma$  меняет знак, следовательно, петля  $\Pi_\phi$  может быть как устойчивой, так и неустойчивой. На рис. 2 дано качественное расположение бифуркационной кривой  $\beta = \beta_s$  на плоскости параметров  $(\gamma, \beta')$ , где  $\beta' = \beta b^{-1}$ ,  $\alpha' = \alpha b^{-1}$ , при фиксированных значениях параметров  $b$  и  $\alpha$  в случае  $\alpha < b < 1 + \alpha$ . Здесь линии  $\beta'_1$  и  $\beta'_2$  ограничивают область  $S_0$  существования состояний равновесия  $A_1$  и  $A_2$ . Точки  $M$  и  $N$ , соответствующие обращению седловой величины  $\sigma$  в ноль, разделяют линию  $\beta'_s$  на три части:  $\beta'_{s1}$  - выше точки  $M$ ,  $\beta'_{s2}$  - между точками  $M$  и  $N$  и  $\beta'_{s3}$  - ниже точки  $N$ . Петля  $\Pi_\phi$  является устойчивой на частях  $\beta'_{s1}$  и  $\beta'_{s3}$  линии  $\beta'_s$  (седловая величина  $\sigma < 0$ ) и неустойчивой на части  $\beta'_{s2}$  линии  $\beta'_s$  (седловая величина  $\sigma > 0$ ). При пересечении с увеличением  $\beta'$  частей  $\beta'_{s1}$  и  $\beta'_{s3}$  линии  $\beta'_s$  из петли  $\Pi_\phi$  на фазовом цилиндре рождается устойчивый вращательный предельный цикл  $L_1$  в области  $0 < x < 1$  на  $U_1$  (рис. 3, в, г). При пересечении с уменьшением  $\beta'$  части  $\beta'_{s2}$  кривой  $\beta'_s$  из петли  $\Pi_\phi$  рождается неустойчивый вращательный предельный цикл  $\Gamma_1$  в области  $0 < x < 1$  на  $U_1$  (рис. 3, б).

При численном исследовании системы (2) при значениях  $\alpha < b < 1 + \alpha$  установлено существование на плоскости  $(\gamma, \beta')$  еще двух бифуркационных кривых (см. рис. 2):  $\beta' = \beta'_{c1}$ , исходящей из точки  $M$ , и  $\beta' = \beta'_{c2}$ , исходящей из точки  $N$  ( $\beta'_{c1} < \beta'_s$ ,  $\beta'_{c2} > \beta'_s$ ); эти кривые отвечают бифуркации двойного вращательного предельного цикла. При переходе с увеличением (с уменьшением)  $\beta'$  через линию  $\beta'_{c1}$  (через линию  $\beta'_{c2}$ ) на фазовом цилиндре  $U_1$  появляются два вращательных предельных цикла: устойчивый  $L_2$  и неустойчивый  $\Gamma_1$  (см. рис. 3, б).

Бифуркационная кривая  $\beta'_s$  полностью определяет параметрический портрет системы (2) на плоскости параметров  $(\gamma, \beta')$  в области  $S_0$  при значениях  $b > 1 + \alpha$ , а бифуркационные кривые  $\beta'_s$ ,  $\beta'_{c1}$  и  $\beta'_{c2}$  - при значениях  $\alpha < b < 1 + \alpha$ . При этом, когда значения  $b > 1 + \alpha$ , бифуркационная кривая  $\beta'_s$  выделяет на плоскости  $(\gamma, \beta')$  в области

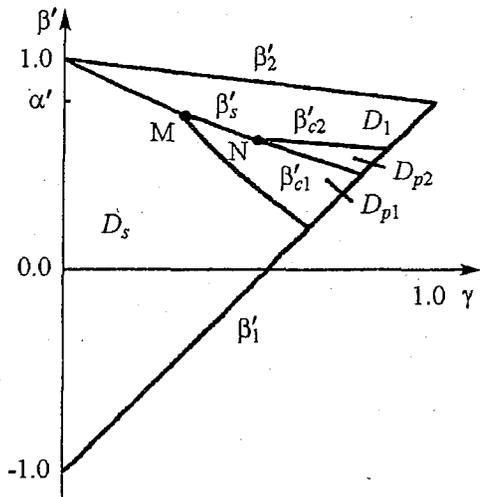


Рис. 2. Области динамических режимов модели (2) ДСС при значениях  $0 < \alpha < b$

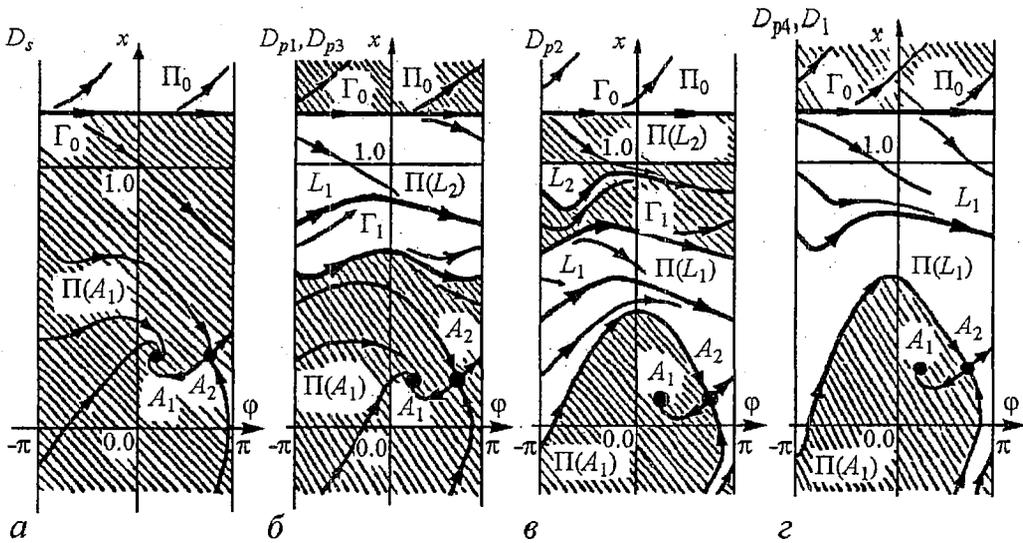


Рис. 3. Фазовые портреты модели (2) при значениях  $0 < \alpha < b$

$C_0$  две области:  $D_s = \{\beta'_1 < \beta' < \beta'_s\}$  и  $D_1 = \{\beta'_s < \beta' < \beta'_2\}$  с качественно различными структурами фазового портрета системы (рис. 3, а и з). При  $\alpha < b < 1 + \alpha$  бифуркационные кривые  $\beta'_s$ ,  $\beta'_{c1}$  и  $\beta'_{c2}$  выделяют в  $C_0$  четыре области (см. рис. 2):  $D_s = \{\beta'_1 < \beta' < \min(\beta'_s, \beta'_{c1})\}$ ,  $D_{p1} = \{\max(\beta'_{c1}, \beta'_1) < \beta' < \beta'_s\}$ ,  $D_{p2} = \{\max(\beta'_s, \beta'_1) < \beta' < \beta'_{c2}\}$  и  $D_1 = \{\max(\beta'_s, \beta'_{c2}, \beta'_1) < \beta' < \beta'_2\}$  с качественно различными фазовыми портретами системы (см. рис. 3).

Остановимся на особенностях фазовых портретов, соответствующих выделенным областям на плоскости  $(\gamma, \beta')$ . Для значений параметров из области  $D_s$  система (2) не имеет устойчивых предельных циклов (см. рис. 3, а). При переходе из области  $D_s$  в область  $D_1$  на фазовом цилиндре из петли сепаратрис  $\Pi_\phi$  появляется устойчивый предельный цикл  $L_1$ . При переходе из области  $D_s$  в область  $D_{p1}$  на фазовом цилиндре через бифуркацию двойного цикла возникает пара предельных циклов - устойчивый  $L_2$  и неустойчивый  $\Gamma_1$ . Таким образом, в области  $D_1$  система имеет два предельных цикла -  $L_1$  и  $\Gamma_0$  (см. рис. 3, з), а в области  $D_{p1}$  - три предельных цикла (см. рис. 3, б) - устойчивый  $L_2$  и неустойчивый  $\Gamma_1$ , расположенные на  $U_1$  при  $0 < x < 1$ , а также неустойчивый цикл  $\Gamma_0$ . При переходе из области  $D_{p1}$  в область  $D_{p2}$  на фазовом цилиндре в результате бифуркации петли сепаратрис  $\Pi_\phi$  возникает устойчивый вращательный предельный цикл  $L_1$ , то есть в области  $D_{p2}$  система имеет четыре предельных цикла - устойчивые  $L_1$  и  $L_2$  и неустойчивые  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_0$  (см. рис. 3, в). При переходе из области  $D_{p2}$  в область  $D_1$  происходит слияние и исчезновение предельных циклов  $L_2$  и  $\Gamma_1$ .

Из установленных фазовых портретов системы (2) видно, что синхронный режим в ДСС устанавливается при условии, что начальные значения  $\phi$  и  $x$  заданы в области  $\Pi(A_1)$  притяжения состояния равновесия  $A_1$ . Интересно проследить за изменением области  $\Pi(A_1)$ . Для параметров из области  $D_s$  она ограничена неустойчивым предельным циклом  $\Gamma_0$  (см. рис. 3, а), для параметров из области  $D_{p1}$  - неустойчивым предельным циклом  $\Gamma_1$  (см. рис. 3, б); при этом все фазовые траектории, идущие из области  $x \text{sign} \beta < -2$  фазового цилиндра, с ростом времени приближаются к состоянию равновесия  $A_1$ . Для параметров из областей  $D_1$  и  $D_{p2}$  область притяжения  $\Pi(A_1)$  ограничена сепаратрисами седла  $A_2$  (см. рис. 3, в, з). Видно, что как в  $D_{p1}$ , так и в  $D_1$  и  $D_{p2}$ , область  $\Pi(A_1)$  стала меньше, чем она была, когда значения параметров находились в области  $D_s$ . В области  $D_{p1}$  это уменьшение происходит за счет появления на фазовом цилиндре области

притяжения  $\Pi(L_2)$  предельного цикла  $L_2$ , ограниченной циклами  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_0$  (см. рис. 3, б). В областях  $D_1$  и  $D_{p2}$  уменьшение области притяжения  $\Pi(A_1)$  связано с появлением на фазовом цилиндре в результате бифуркации петли сепаратрис  $\Pi_\phi$  так называемых «пролетных» траекторий, идущих из области  $x < -2$  не к состоянию равновесия  $A_1$ , а к предельному циклу  $L_1$ .

Мы видим, что в результате бифуркации петли сепаратрис  $\Pi_\phi$  не только появляются или исчезают предельные циклы, но и наблюдается резкое изменение области притяжения  $\Pi(A_1)$ . Из фазовых портретов на рис. 3 ясно, что при начальных значениях  $\phi$  и  $x$ , заданных в области  $x \text{ sign } \beta < -2$  фазового цилиндра  $U_1$  (а именно такие начальные условия устанавливаются в ДСС в результате предварительной синхронизации [2]), режим синхронизации обеспечивается только для значений параметров из областей  $D_s$  и  $D_{p1}$ . В связи с этим область  $B_s = D_s \cup D_{p1} = \{\beta'_1 < \beta' < \beta'_s\}$  следует рассматривать как область захвата ДСС в синхронный режим. Интересно отметить, что при уменьшении параметра  $b$  кривая  $\beta' = \beta'_s$  приближается к линии  $\beta' = \beta'_2$ , при этом область  $B_s \rightarrow C_0$ . При увеличении  $b$  точки  $M$  и  $N$  на кривой  $\beta' = \beta'_s$  сближаются, при этом наблюдается сближение кривых  $\beta' = \beta'_s$ ,  $\beta' = \beta'_{c1}$  и  $\beta' = \beta'_{c2}$ . Когда значения  $b > 1 + \alpha$ , кривые  $\beta' = \beta'_{c1}$  и  $\beta' = \beta'_{c2}$  не существуют (они исчезают, совпадая с кривой  $\beta' = \beta'_s$ ), не существуют и области  $D_{p1}$  и  $D_{p2}$ .

**3.3.** Рассмотрим систему (2) при значениях  $\alpha > b$ . Качественно-численное исследование системы в этом случае позволило выяснить, что, кроме описанных выше бифуркаций при значениях  $\beta' = \beta'_s$ ,  $\beta' = \beta'_{c1}$  и  $\beta' = \beta'_{c2}$ , система претерпевает в области  $C_0$  еще следующие бифуркации: смену устойчивости состояния равновесия  $A_1$  при  $\beta' = \beta''(\gamma, b, \alpha)$ ; образование неустойчивой (седловая величина  $\sigma > 0$ ) петли сепаратрис первого рода  $\Pi_0$  седла  $A_2$  при  $\beta' = \beta'_{s1}(\gamma, b, \alpha)$ ; образование двойного вращательного предельного цикла при  $\beta' = 1$ .

На рис. 4 дано качественное расположение кривых  $\beta'_s$ ,  $\beta'_{c1}$ ,  $\beta'_{c2}$ ,  $\beta''$ ,  $\beta'_{s1}$  и  $\beta' = 1$  в общем случае, когда имеет место пересечение кривых  $\beta''$  и  $\beta'_{s1}$  (в точке  $K$  при  $\gamma = \gamma_K$ ) и пересечение кривых  $\beta'_s$  и  $\beta' = 1$  (в точке  $L$  при  $\gamma = \gamma_L$ ). Для значений  $0 < \gamma < \gamma_K$  линия  $\beta'_{s1}$  проходит ниже линии  $\beta''$  (то есть  $\beta'_{s1} < \beta''$ ). Для этих значений  $\gamma$  при пересечении с увеличением  $\beta'$  линии  $\beta'_{s1}$  из петли сепаратрис  $\Pi_0$  рождается неустойчивый предельный цикл  $P_1$ , охватывающий устойчивое состояние равновесия  $A_1$  (рис. 5, з). С дальнейшим увеличением  $\beta'$  цикл  $P_1$  стягивается к точке  $A_1$  и исчезает при переходе через линию  $\beta''$ , состояние равновесия  $A_1$  становится неустойчивым.

Для значений  $\gamma > \gamma_K$  линия  $\beta'_{s1}$  проходит выше линии  $\beta''$  (то есть  $\beta'_{s1} > \beta''$ ) и необходимо существуют еще две бифуркации двойных предельных циклов первого рода при  $\beta' = \beta'_{c3}$  и  $\beta' = \beta'_{c4}$  ( $\beta'_{c3} < \beta'' < \beta'_{s1} < \beta'_{c4}$ ). Качественное расположение линий  $\beta'_{c3}$  и  $\beta'_{c4}$  дано на рис. 4. При последовательном пересечении с возрастанием  $\beta'$  линий  $\beta'_{c3}$ ,  $\beta'_{c4}$ ,  $\beta''$  и  $\beta'_{s1}$  бифуркационные события в системе (2) развиваются следующим образом. При переходе через линию  $\beta'_{c3}$  на фазовом цилиндре рождаются два предельных цикла колебательного типа вокруг устойчивого состояния равновесия  $A_1$ : внешний устойчивый  $P_2$  и внутренний

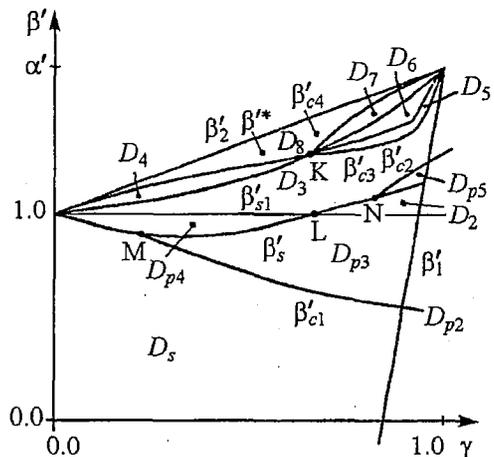


Рис. 4. Параметрический портрет модели (2) при значениях  $\alpha > b$

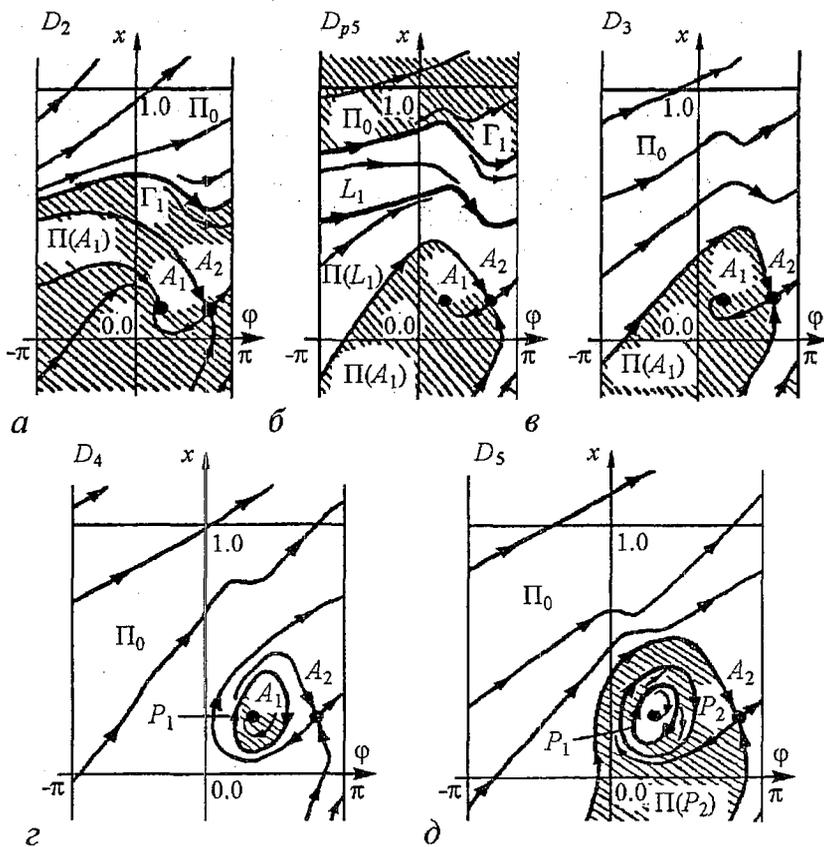


Рис. 5. Фазовые портреты модели (2) при значениях  $\alpha > b$

неустойчивый  $P_1$  (рис. 5, д). При переходе через линию  $\beta''$  цикл  $P_1$  стягивается к состоянию равновесия  $A_1$ , передавая ему свою неустойчивость; при переходе через линию  $\beta'_{s1}$  из петли сепаратрис  $\Pi_0$  рождается неустойчивый колебательный предельный цикл  $P_3$ , внутри которого находятся устойчивый цикл  $P_2$  и неустойчивое состояние равновесия  $A_1$ ; при переходе через линию  $\beta'_{c4}$  предельные циклы  $P_2$  и  $P_3$  сливаются и исчезают.

Таким образом, в результате качественно-численного исследования системы (2) получаем, что структура ее параметрического портрета  $(\gamma, \beta')$  в области  $S_0$  при значениях  $\alpha > b$  определяется наличием следующих областей параметров:  $D_5 = \{\beta'_1 < \beta' < \min(\beta'_s, \beta'_{c1})\}$ ,  $D_2 = \{\max(1, \beta'_1) < \beta' < \beta'_{s1}\}$ ,  $D_{p3} = \{\max(\beta'_{c1}, \beta'_1) < \beta' < \min(\beta'_s, 1)\}$ ,  $D_{p4} = \{\beta'_s < \beta' < 1\}$ ,  $D_{p5} = \{\max(\beta'_s, \beta'_1) < \beta' < \beta'_{c2}\}$ ,  $D_3 = \{\max(1, \beta'_s, \beta'_{c2}, \beta'_1) < \beta' < \min(\beta'_{s1}, \beta'_{c3})\}$ ,  $D_4 = \{\beta'_{s1} < \beta' < \beta'^*\}$ ,  $D_5 = \{\beta'_{c3} < \beta' < \min(\beta'^*, \alpha\gamma)\}$ ,  $D_6 = \{\max(\alpha\gamma, \beta'^*) < \beta' < \beta'_{s1}\}$ ,  $D_7 = \{\beta'_{s1} < \beta' < \beta'_{c4}\}$ ,  $D_8 = \{\max(\beta'_{c4}, \beta'^*) < \beta' < \beta'_2\}$ . Фазовые портреты для областей  $D_5$ ,  $D_{p3}$  и  $D_{p4}$  изображены на рис. 3, а, б, г, а для областей  $D_2$ ,  $D_{p5}$ ,  $D_3$ ,  $D_4$ , и  $D_5$  - на рис. 5, а-д, соответственно. Интересно отметить, что наличие в области  $S_0$  бифуркационной кривой  $\beta'=1$  приводит к тому, что в области значений параметров  $D_0 = \{\max(1, \beta'_{c2}, \beta'_s, \beta'_1) < \beta' < \beta'_2\}$ , в которой проходят бифуркационные кривые  $\beta'_{s1}$ ,  $\beta'^*$ ,  $\beta'_{c3}$  и  $\beta'_{c4}$ , система (2) не имеет предельных циклов вращательного типа (см. рис. 5, в-д).

Рассмотрим перестройки фазового портрета системы при переходе с возрастанием  $\beta'$  из области  $D_5$  в область  $D_0$ , реализуемые в зависимости от значений параметра  $\gamma$ . Для  $0 < \gamma < \gamma_M$ , где значение  $\gamma_M$  соответствует смыканию кривых  $\beta'_s$  и  $\beta'_{c1}$ , при пересечении линии  $\beta'_s$  из петли сепаратрис  $\Pi_\phi$  появляется устойчивый вращательный предельный цикл  $L_1$  (см. рис. 3, г), который при пересечении линии  $\beta'=1$  сливается с неустойчивым предельным циклом  $\Gamma_0$  и

исчезает (см. рис. 5, в). Когда значения  $\gamma$  находятся в интервале  $\gamma_M < \gamma < \gamma_L$ , то вначале, при пересечении линии  $\beta'_{c1}$ , на фазовом цилиндре возникают вращательные предельные циклы  $L_2$  и  $\Gamma_1$  (см. рис. 3, б), далее, при пересечении линии  $\beta'_s$  цикл  $\Gamma_1$  исчезает, сливаясь с петлей  $\Pi_\phi$ , затем, при переходе через линию  $\beta'=1$ , происходит совпадение и исчезновение предельных циклов  $L_2$  и  $\Gamma_0$  (см. рис. 5, в). Когда  $\gamma > \gamma_L$ , то при увеличении  $\beta'$  наблюдаются следующие события: при пересечении линии  $\beta'_{c1}$  возникают циклы  $L_2$  и  $\Gamma_1$ ; при переходе через линию  $\beta'=1$  совпадают и исчезают циклы  $L_2$  и  $\Gamma_0$  (см. рис. 5, а); при пересечении части LN линии  $\beta'_s$  цикл  $\Gamma_1$  исчезает, сливаясь с петлей  $\Pi_\phi$  (см. рис. 5, в), а при пересечении части кривой  $\beta'_s$ , расположенной справа от точки N, из петли  $\Pi_\phi$  рождается устойчивый предельный цикл  $L_1$  (см. рис. 5, б); при переходе через линию  $\beta'_{c2}$  совпадают и исчезают предельные циклы  $L_1$  и  $\Gamma_1$  (см. рис. 5, в).

Из фазовых портретов на рис. 3 и 5 видно, что режим синхронизации в ДСС с начальными условиями  $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ ,  $x \text{sign} \beta < -2$  реализуется при значениях параметров из областей  $D_s, D_{p3}$  и  $D_2$ , то есть из области  $B_s$  как и при значениях  $\alpha < b$ . При значениях параметров вне области  $B_s$  для системы, кроме синхронного режима, характерны пролетные движения и квазисинхронный режим, который существует в областях параметров  $D_5, D_6$  и  $D_7$  и реализуется при условии, что начальные условия попадают в область притяжения  $\Pi(P_2)$  предельного цикла  $P_2$ . При этом в зависимости от начального состояния системы в областях  $D_3$  и  $D_4$  в ДСС наблюдаются режим синхронизации или пролетные движения, в областях  $D_5$  и  $D_6$  - режим синхронизации, квазисинхронный режим или пролетные движения, в области  $D_7$  - квазисинхронный режим или пролетные движения, в области  $D_8$  существуют только пролетные движения.

Результаты численного определения границы  $\beta' = \beta^{*}$  области захвата  $B_s$  на плоскости  $(\gamma, \beta')$  для ряда значений параметра  $b$  и значений  $\alpha = 0.8$  и  $\alpha' = 1.6$  приведены на рис. 6, 7. Интересно, что зависимость  $\beta^{*}$  от  $b$  имеет немонотонный

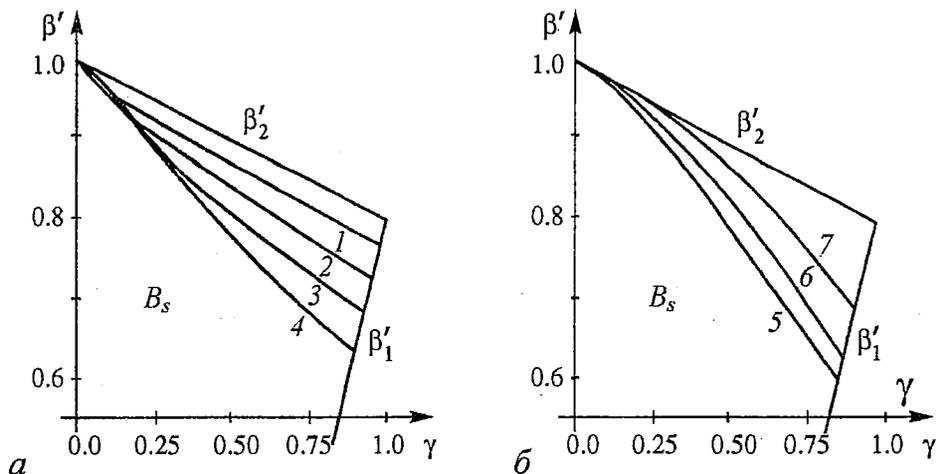


Рис. 6. Границы области захвата в синхронный режим при  $\alpha = 0.8$  и  $b = 0.01$  (кривая 1), 0.03 (2), 0.065 (3), 0.12 (4), 0.3 (5), 0.5 (6), 1.0 (7)

характер. При увеличении  $b$  от достаточно малых значений, когда  $\beta^{*}$  близко к  $\beta'_2$ , значение  $\beta^{*}$  вначале уменьшается (рис. 6, а, рис. 7), а затем возрастает, при  $\alpha < b$  вновь приближаясь к  $\beta'_2$ , а при  $\alpha > b$  приближаясь к  $\beta'=1$  (рис. 6, б, рис. 7).

4. Рассмотрим динамику ДСС в случае применения в цепях управления ФНЧ с коэффициентами передачи  $F_1(p) = 1/(1 + (\tau_1 + \tau_2)p + \tau_1\tau_2p^2)$ ,  $F_2(p) = 1/(1 + \tau_3p)$ . Уравнения динамики системы на основании (1) записываем в виде

$$\begin{aligned} d\varphi/d\tau = y, \quad \varepsilon_2 dy/d\tau = u - y, \quad \varepsilon_1 du/d\tau = \gamma - u - R(x)\sin\varphi, \\ dx/d\tau = z, \quad \varepsilon_3 dz/d\tau = \beta - z - bD(x) - \alpha R(x)\sin\varphi, \end{aligned} \quad (4)$$

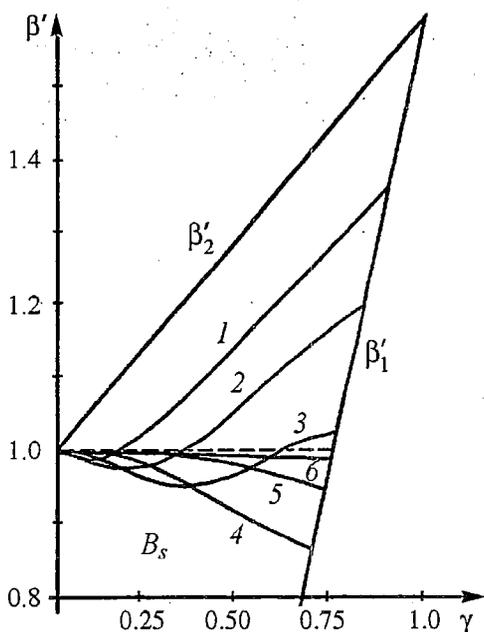


Рис. 7. Границы области захвата в синхронный режим при  $\alpha=1.6$  и  $b=0.03$  (кривая 1), 0.065 (2), 0.12 (3), 0.3 (4), 1.0 (5), 2.0 (6)

где  $\varepsilon_1=k_\varphi\tau_1$ ,  $\varepsilon_2=k_\varphi\tau_2$ , и  $\varepsilon_3=k_\varphi\tau_3$  - параметры инерционности. Система (4) является динамической системой с пятимерным цилиндрическим фазовым пространством  $U_2=\{\varphi(\text{mod } 2\pi), y, u, x, z\}$ . Поведение парциальной системы АПЗ описывается двумя последними уравнениями системы (4), в которых надо положить  $\alpha=0$ . Системе свойственны [14] режим синхронизации или пролетные движения, ведущие к проскальзыванию рабочей области  $\Omega_x=\{|x|<2\}$ . Динамика парциальной системы ФАПЧ описывается тремя первыми уравнениями системы (4), в которых надо положить  $R(x)=1$ . В ней могут реализоваться [15] режим синхронизации, периодические или хаотические квазисинхронные режимы (в фазовом пространстве им отвечают устойчивые предельные циклы или хаотические аттракторы колебательного типа), режимы периодических или хаотических биений (в фазовом пространстве им соответствуют устойчивые предельные циклы или хаотические аттракторы вращательного, а также колебательно-вращательного типов). Таким образом, система (4) соответствует ДСС, в которой парциальная система АПЗ индивидуально демонстрирует только регулярное поведение, а в автономной парциальной системе ФАПЧ наряду с регулярными возможны хаотические динамические режимы.

**4.1.** Условия устойчивости синхронного режима ДСС, определяемые из анализа коэффициентов соответствующего характеристического уравнения для состояния равновесия  $A_1(\varphi_1, 0, 0, x_1, 0)$  системы (4), даются следующими неравенствами

$$a_1a_2 - a_3 > 0, \quad (a_1a_2 - a_3)(a_3a_4 - a_2a_5) - (a_1a_4 - a_5) > 0, \quad (5)$$

в которых

$$a_1=1/\varepsilon_1+1/\varepsilon_2+1/\varepsilon_3, \quad a_2=1/(\varepsilon_1\varepsilon_3)+1/(\varepsilon_2\varepsilon_3)+1/\varepsilon_1\varepsilon_2+(b+\alpha q_2)/\varepsilon_3,$$

$$a_3=1/(\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3)+(1/(\varepsilon_1\varepsilon_3)+1/(\varepsilon_2\varepsilon_3))(b+\alpha q_2)+q_1/(\varepsilon_1\varepsilon_2), \quad a_4=(b+\alpha q_2+q_1)/(\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3),$$

$$a_5=q_1b/(\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3), \quad q_1=R(x_1)\cos\varphi_1, \quad q_2=R'(x_1)\sin\varphi_1,$$

а  $\varphi_1$  и  $x_1$  определены равенствами (3). Область значений параметров  $C_{se}$ , в которой выполняются неравенства (5), соответствует области существования синхронного режима ДСС. Важно отметить, что в областях  $x\text{sign}\beta \geq 2$  фазового пространства  $U_2$  переменные  $u, y \rightarrow \gamma$ ,  $z \rightarrow \beta$ , а  $\varphi$  и  $x$  неограниченно растут при  $\gamma, \beta > 0$  или убывают при  $\gamma, \beta < 0$ . Следовательно, глобальная устойчивость синхронного режима в системе невозможна.

**4.2.** Движения, развивающиеся в фазовом пространстве  $U_2$ , зависят от семи параметров модели (4). В данной работе мы ограничимся рассмотрением динамических режимов и бифуркаций, реализуемых при изменении параметров  $\varepsilon_2$  и  $\gamma$ . При этом основное внимание уделим определению области захвата в синхронный режим и выяснению сценариев перехода к хаотическим несинхронным режимам. На рис. 8 приведено расположение областей динамических режимов ДСС на плоскости  $(\varepsilon_2, \gamma)$ , полученное по результатам численного исследования системы (4) при значениях параметров  $\alpha=0.9$ ,  $b=4.5$ ,  $\beta=1.25$ ,  $\varepsilon_1=10$ ,  $\varepsilon_3=30$ . Линии  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  ограничивают область  $C_0 = \{\gamma_1 < \gamma < \gamma_2\}$  существования состояний равновесия  $A_1(\varphi_1, 0, 0, x_1, 0)$  и  $A_2(\varphi_2, 0, 0, x_1, 0)$  системы (4). Линии  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  и линия  $\gamma_s$ , отвечающая смене устойчивости состояния равновесия  $A_1$  в результате бифуркации Андронова - Хопфа, выделяют в  $C_0$  область  $C_{se}$ , которую будем рассматривать как область удержания режима синхронного слежения ДСС при изменении параметров  $\varepsilon_2$  и  $\gamma$ . При пересечении с увеличением  $\varepsilon_2$  линии  $\gamma_s$  и переходе в область  $G_0$ , расположенную справа от линии  $\gamma_s$ , в фазовом пространстве  $U_2$  мягко рождается устойчивый предельный цикл  $S_1$  колебательного типа. Этот цикл соответствует квазисинхронному режиму ДСС с колебаниями относительно ставшего неустойчивым состояния равновесия  $A_1$ . Численное исследование системы (4) в области  $G_0$  показало, что, во-первых, в этой области существуют другие предельные циклы колебательного типа, во-вторых, граница  $\gamma_0$  области  $G_1$  существования квазисинхронных режимов, заключенной между линиями  $\gamma_s$  и  $\gamma_0$ , имеет сложную структуру - она составлена из кривых, отвечающих бифуркациям удвоения периода, рождения двумерного тора из колебательного предельного цикла и седло-узловым бифуркациям колебательных предельных циклов (на рис. 8 граница  $\gamma_0$  не изображена). Для значений параметров из области  $G_2$ , расположенной справа от линии  $\gamma_0$ , в фазовом пространстве  $U_2$  существуют периодические и хаотические асинхронные режимы. Таким образом, область  $G_0 = G_1 \cup G_2$ .

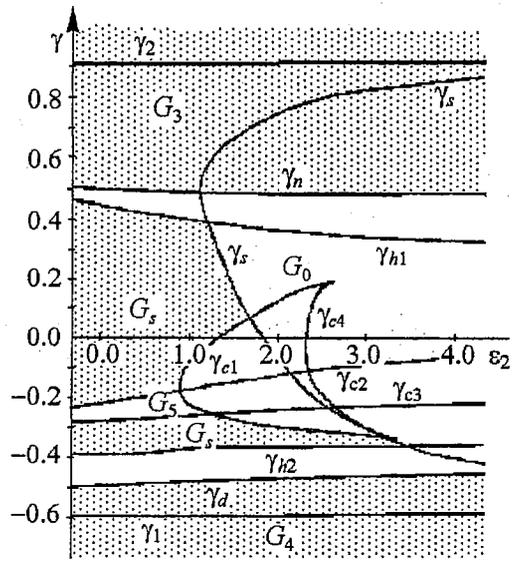


Рис. 8. Области динамических режимов модели (4) ДСС

В области  $G_s = \{\max(\gamma_{c1}, \gamma_{c2}) < \gamma < \min(\gamma_{h1}, \gamma_s)\} \cup \{\gamma_{h2} < \gamma < \min(\gamma_{c3}, \gamma_{c1}, \gamma_s)\}$  система (4) не имеет в фазовом пространстве других аттракторов, кроме состояния равновесия  $A_1$ . Область  $G_s$  будем интерпретировать как область захвата ДСС в синхронный режим. Границы области  $G_s$  соответствуют следующим бифуркациям системы (4): линия  $\gamma_{c1}$  - седло-узловой бифуркации колебательного предельного цикла  $S_2$ ; линии  $\gamma_{c2}$  и  $\gamma_{c3}$  - седло-узловым бифуркациям вращательных предельных циклов; линии  $\gamma_{h1}$  и  $\gamma_{h2}$  - разрушению хаотических аттракторов вращательного типа. Рассмотрим, какие перестройки динамических режимов происходят при выходе из области  $G_s$ .

При переходе через границу  $\gamma_{c1}$  в ДСС возникает квазисинхронный режим предельного цикла  $S_2$ . Этот режим существует в области значений  $\varepsilon_2$  и  $\gamma$  между линиями  $\gamma_{c1}$  и  $\gamma_{c4}$ , линия  $\gamma_{c4}$  отвечает седло-узловой бифуркации предельного цикла  $S_1$ . Отметим, что в области параметров, ограниченной линией  $\gamma_{c4}$  и частями линий  $\gamma_{c1}$  и  $\gamma_s$ , в системе одновременно существуют два квазисинхронных режима, отвечающих циклам  $S_1$  и  $S_2$ . Существование двух квазисинхронных режимов

обнаружено и при других значениях параметров в области  $G_1$ . Переход через границу  $\gamma_{h1}$  (через границу  $\gamma_{h2}$ ) ведет к образованию в фазовом пространстве  $U_2$  хаотического аттрактора вращательного типа  $P_1$  в области  $x > 0$  ( $P_2$  в области  $x < 0$ ). С увеличением  $\gamma$  аттрактор  $P_1$  преобразуется в двумерный тор вращательного типа, который затем исчезает на границе  $\gamma_n$ , стягиваясь к устойчивому вращательному предельному циклу  $L_1$ . Цикл  $L_1$  существует при значениях параметров в области  $G_3 = \{\gamma > \gamma_n\}$ . Хаотический аттрактор  $P_2$  при уменьшении  $\gamma$  преобразуется в устойчивый вращательный предельный цикл  $L_2$  через бифуркации, обратные бифуркациям удвоения периода. Цикл  $L_2$  существует при значениях параметров в области  $G_4$ , расположенной ниже линии  $\gamma_d$ , которая отвечает бифуркации удвоения периода цикла  $L_2$ . При переходе из области  $G_5$  через границы  $\gamma_{c2}$  и  $\gamma_{c3}$  в фазовом пространстве  $U_2$  (в области  $x < 0$ ) возникает устойчивый вращательный предельный цикл  $L_3$ . Асинхронный режим ДСС, соответствующий этому циклу, существует в области  $G_5 = \{\gamma_{c3} < \gamma < \gamma_{c2}\}$ . Таким образом, при значениях  $\gamma > \gamma_{h1}$ ,  $\gamma_{c3} < \gamma < \gamma_{c2}$  и  $\gamma < \gamma_{h2}$  в ДСС существуют регулярные и хаотические асинхронные режимы.

Из приведенного описания динамики ДСС с изменением параметров  $\varepsilon_2$  и  $\gamma$  следует, что в области удержания  $S_{se}$  система может функционировать как в режиме синхронного слежения, так и в различных несинхронных режимах - периодических квазисинхронных режимах, регулярных и хаотических асинхронных режимах, в режиме нарастания фазовых переменных.

**4.3.** Остановимся на особенностях эволюции несинхронных режимов ДСС при изменении параметров  $\varepsilon_2$  и  $\gamma$ , выявленных при численном исследовании системы (4). На рис. 9, а приведена однопараметрическая бифуркационная диаграмма  $\{\varepsilon_2, z\}$  точечного отображения Пуанкаре ( $\gamma = 0.55$ ), которая иллюстрирует переход от квазисинхронного режима предельного цикла  $S_1$  к асинхронному режиму предельного цикла  $L_1$ ; на рис. 9, б, в, з, и даны проекции фазовых портретов, а на рис. 9, г-ж - сечения Пуанкаре аттракторов системы (4). С увеличением  $\varepsilon_2$  вначале цикл  $S_1$  (рис. 9, б) теряет устойчивость и происходит образование тора  $T_0$  (рис. 9, в, г), далее наблюдается чередование «окон» пяти-, шести-, семи-, восьми- и девятиоборотного колебательных предельных циклов, тора и колебательных хаотических аттракторов (рис. 9, д, е, ж). Видно, что внутри окна шестиоборотного цикла реализуются бифуркации удвоения периода с переходом к хаотическому квазисинхронному режиму. После окна девятиоборотного цикла происходит возвращение системы к режиму тора  $T_0$ , а затем к квазисинхронному режиму цикла  $S_1$ . С дальнейшим увеличением  $\varepsilon_2$  наблюдаются: жесткий переход от режима цикла  $S_1$  к квазисинхронному режиму предельного цикла  $S_3$  (рис. 9, з); бифуркации удвоения и обратная удвоению бифуркация цикла  $S_3$ ; жесткие переходы от двухоборотного цикла  $S_3^2$  к четырехоборотному колебательному циклу, далее от этого цикла к хаотическому квазисинхронному режиму (рис. 9, и) и затем к асинхронному режиму цикла  $L_1$ .

Переход к хаотическим квазисинхронным режимам через бифуркации удвоения иллюстрирует рис. 10, на котором приведены бифуркационная диаграмма  $\{\varepsilon_2, z\}$ , построенная при  $\gamma = 0.72$  (а), проекции фазовых портретов (б, г) и сечения Пуанкаре (в, д) аттракторов, соответствующих хаотическим квазисинхронным режимам. Диаграмма на рис. 10, а характеризует процесс перехода от квазисинхронного режима предельного цикла  $S_3$  (см. рис. 9, з) к асинхронному режиму двухоборотного ( $4\pi$ -периодического по  $\varphi$ ) вращательного предельного цикла  $L_1^2$ .

На рис. 11 приведены бифуркационная диаграмма  $\{\gamma, z\}$ , соответствующая  $\varepsilon_2 = 1$  (а), проекции фазовых портретов (б, в, д, е) и сечения Пуанкаре (г, ж) аттракторов, отвечающих асинхронным режимам. Стартовым состоянием системы

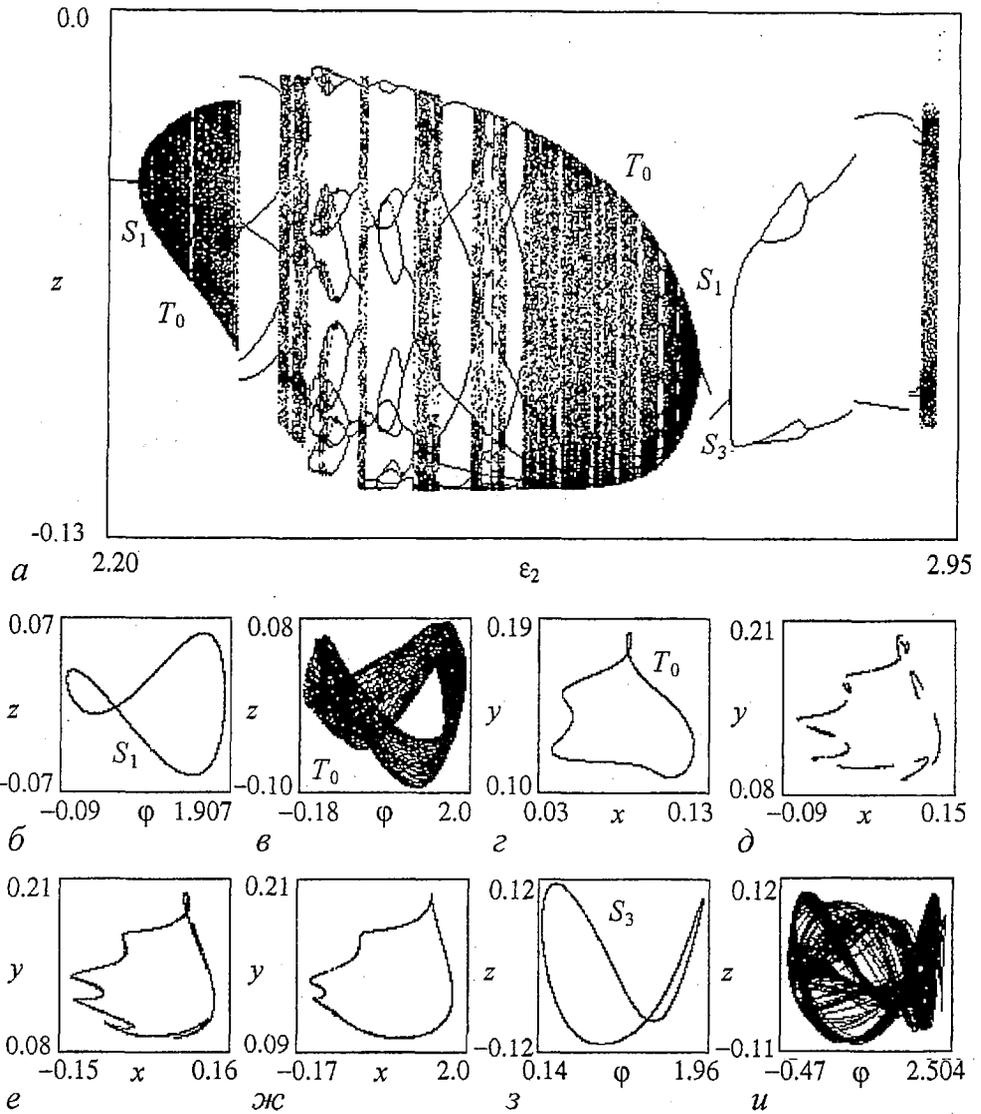


Рис. 9. Эволюция квазисинхронного режима предельного цикла  $S_1$  при увеличении  $\varepsilon_2$  (а) и аттракторы модели (б)

является режим предельного цикла  $L_1$  (б). Диаграмма на рис. 11, а отражает динамические состояния, через которые проходит система при уменьшении  $\gamma$  от 0.48 до 0.46. Для системы характерны: образование двумерного вращательного тора  $T_1$  (рис. 11, в, з) на базе цикла  $L_1$ , жесткие переходы от режима тора  $T_1$  к режимам десятиоборотного ( $20\pi$ -периодического по  $\varphi$ ) и семиоборотного ( $14\pi$ -периодического по  $\varphi$ ) вращательных предельных циклов, далее от режима семиоборотного цикла  $L$  к режиму четырехоборотного ( $8\pi$ -периодического по  $\varphi$ ) вращательного предельного цикла  $L^4$  (рис. 11, д) и затем от режима цикла  $L^4$  к хаотическому асинхронному режиму (рис. 11, е, ж). При дальнейшем уменьшении  $\gamma$  после разрушения этого режима система переходит к режиму синхронизации. Таким образом, диаграмма на рис. 11, а иллюстрирует один из вариантов перехода к режиму синхронного слежения от начального несинхронного состояния. Отметим, что, если продолжать уменьшение расстройки  $\gamma$ , то режим слежения сохраняется в системе до тех пор, пока значение  $\gamma$  не станет меньше  $\gamma_1$ .

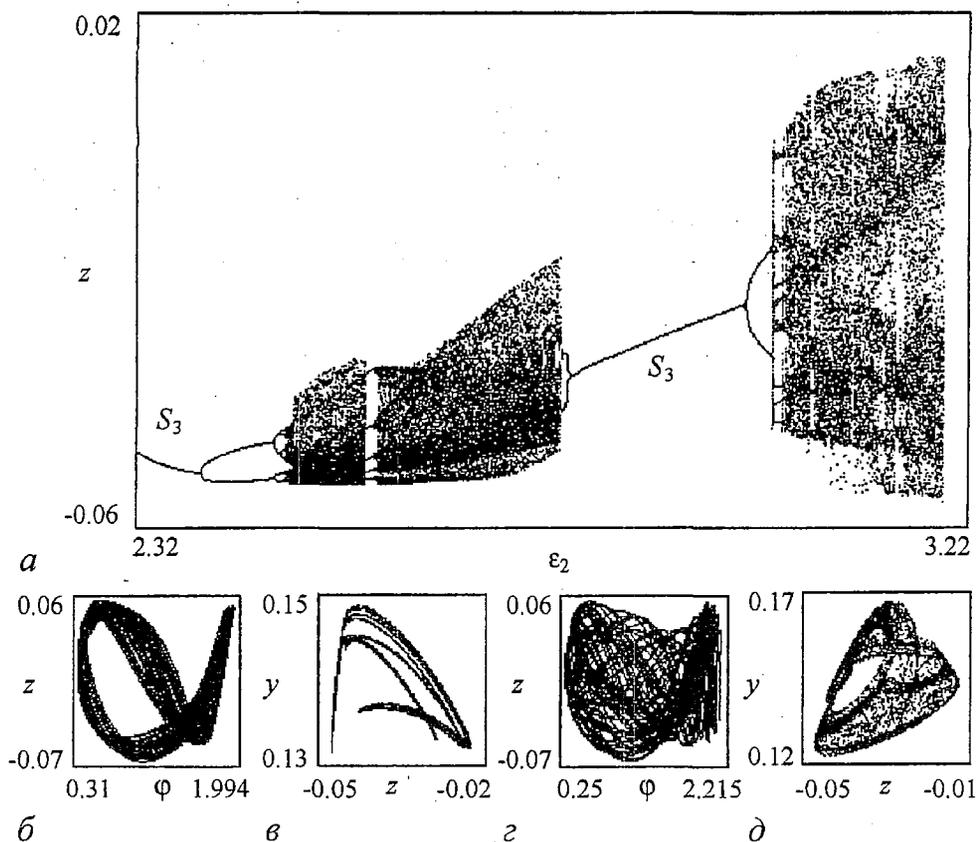


Рис. 10. Эволюция квазисинхронного режима предельного цикла  $S_3$  при увеличении  $\varepsilon_2$  (а) и хаотические аттракторы модели (4)

Если в качестве начального состояния системы определить асинхронный режим предельного цикла  $L_2$  и увеличивать расстройку  $\gamma$ , то на пути к захвату в синхронный режим вначале возникает хаотический асинхронный режим через бифуркации удвоения периода цикла  $L_2$ , затем, когда  $\gamma$  станет больше  $\gamma_{h2}$ , этот режим разрушается. Какой режим установится в системе после этого - зависит от величины параметра  $\varepsilon_2$ . При  $0 < \varepsilon_2 < 1$  система переходит к режиму синхронизации, а при  $\varepsilon_2 > 1$  - к режиму нарастания фазовых переменных. На рис. 12 приведена бифуркационная диаграмма  $\{\gamma, z\}$  (а) и проекции фазовых портретов аттракторов системы (4) (б-ж), соответствующие первому из выделенных случаев ( $\varepsilon_2 = 0.9$ ). Видно, что в процессе перехода к синхронному режиму вращательный хаотический аттрактор образуется в фазовом пространстве как на базе цикла  $L_2$  (см. рис. 12, б-д), так и на базе трехоборотного предельного цикла  $Q^3$  (см. рис. 12, е, ж). И здесь отметим, что в случае захвата в режим синхронизации этот режим будет сохраняться в системе при увеличении  $\gamma$  до тех пор, пока значение  $\gamma$  не превысит  $\gamma_2$ .

Среди других интересных эффектов сложной динамики, обнаруженных в исследуемой модели ДСС, отметим следующие: переход от асинхронного режима предельного цикла  $L_3$  к режиму хаотического аттрактора колебательно-вращательного типа через перемежаемость первого рода, который реализуется, например, когда  $\varepsilon_2 = 2.75$ , при пересечении линии  $\gamma_{c2}$  (см. рис. 8) с увеличением  $\gamma$ , и последующий мягкий переход от этого режима к хаотическому квазисинхронному режиму путем уменьшения числа вращательных витков на колебательно-вращательном хаотическом аттракторе; режимы двумерных торов, образующихся на базе трех- и четырехоборотного вращательных предельных циклов; одновременное существование режима хаотического аттрактора, сформиро-

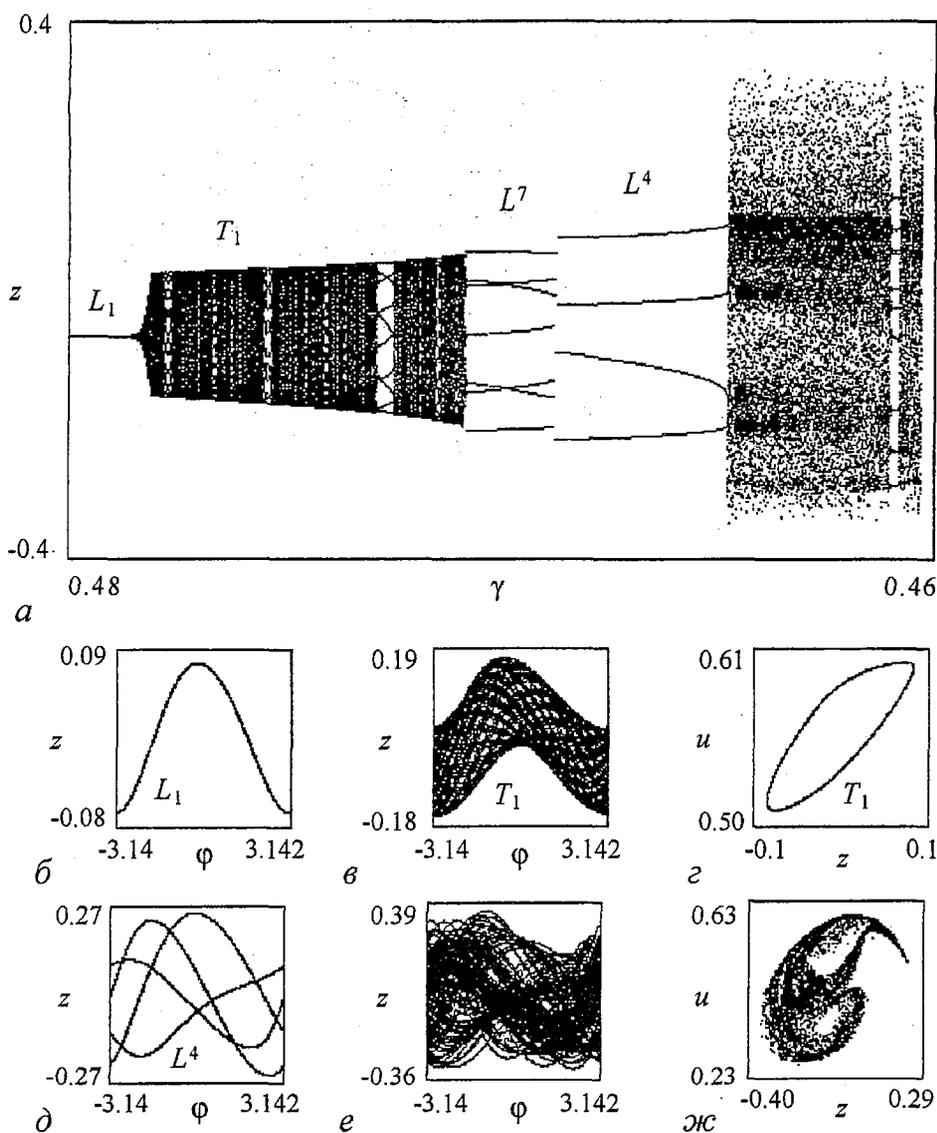
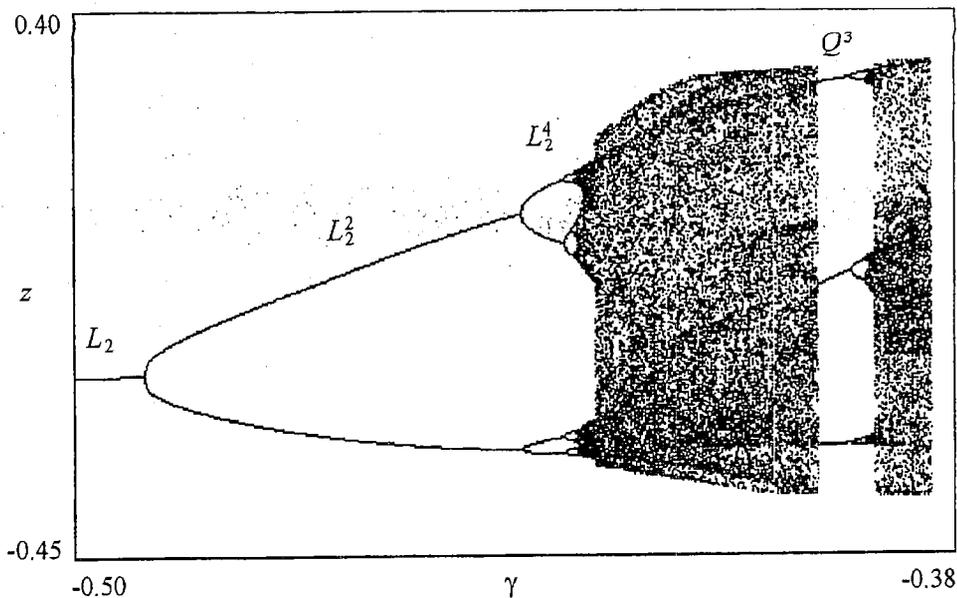


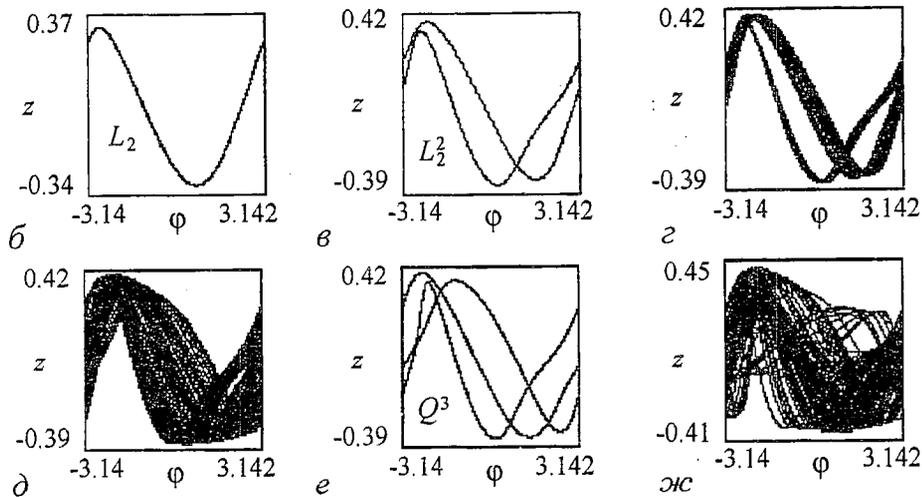
Рис. 11. Диаграмма развития асинхронного режима предельного цикла  $L_1$  при уменьшении  $\gamma$  (а) и аттракторы модели (4)

вавшегося на базе трехоборотного вращательного двумерного тора, и режима однооборотного вращательного тора.

На последнем эффекте остановимся подробнее. Он наблюдается в процессе эволюции трехоборотного вращательного предельного цикла  $Q^3$  при увеличении параметра  $\epsilon_2$ , когда остальные параметры имеют следующие значения  $\alpha=0.9$ ,  $\beta=0.65$ ,  $\gamma=0.465$ ,  $b=4.5$ ,  $\epsilon_1=3$ ,  $\epsilon_3=30$ . На рис. 13, а приведена соответствующая этому процессу бифуркационная диаграмма  $\{\epsilon_2, z\}$ , а на рис. 13, б-ж даны проекции фазовых портретов (б, в, ж) и сечения Пуанкаре (г-е) аттракторов системы (4). Видно, что с увеличением  $\epsilon_2$  на базе цикла  $Q^3$  (см. рис. 13, б) образуется трехоборотный двумерный тор  $T^3$  (см. рис. 13, в, г), далее наблюдается искажение формы замкнутых инвариантных кривых  $\Gamma^3$  точечного отображения, соответствующих тору  $T^3$  (см. рис. 13, д, е), что свидетельствует о постепенном вырождении тора  $T^3$  в хаотический аттрактор типа «тор-хаос». Когда  $\epsilon_2$  становится больше 1.8832, одновременно с режимом тор-хаос возникает режим



a



б

в

г

д

е

ж

Рис. 12. Диаграмма развития асинхронного режима предельного цикла  $L_2$  при увеличении  $\gamma$  (a) и проекции фазовых портретов аттракторов

однооборотного тора  $T_1$  вращательного типа (см. рис. 13, e, ж), которому соответствует замкнутая инвариантная кривая  $G_1$ . Механизмом образования тора  $T_1$  служит образование петли сепаратрисных инвариантных кривых трехкратной седловой неподвижной точки точечного отображения. В интервале  $1.8834 < \epsilon_2 < 2.0744$  одновременно существуют оба режима. При  $\epsilon_2 > 2.0744$  режим тор-хаос разрушается и система жестко переходит к режиму тора  $T_1$  (см. рис. 13, ж), который сохраняется в системе до значения  $\epsilon_2 = 11.23$ . При  $\epsilon_2 > 11.23$  тор  $T_1$  вырождается в устойчивый предельный цикл  $L_1$ .

Таким образом, ДСС с ФНЧ в целях управления обладает существенно большим разнообразием несинхронных режимов. Путем подбора параметров инерционности и начальной расстройки можно перевести систему как в режим синхронного слежения за параметрами входного сигнала, так и в сложные квазисинхронные и асинхронные режимы, соответствующие многооборотным предельным циклам, двумерным инвариантным торам и хаотическим аттракторам.

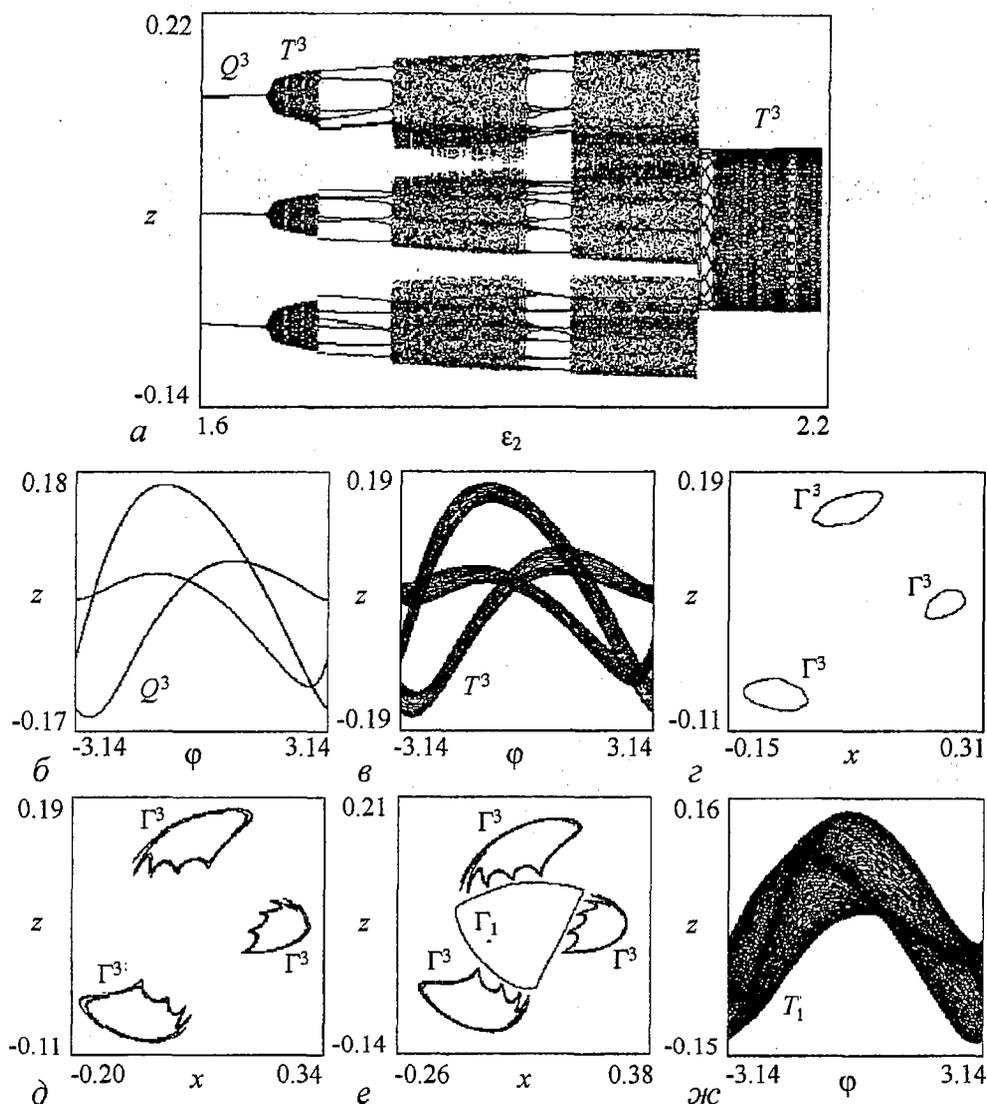


Рис. 13. Бифуркационная диаграмма  $\{\varepsilon_2, z\}$  (а) и проекции фазовых портретов и сечения Пуанкаре аттракторов

5. Результаты качественно-численного исследования моделей (2) и (4) показывают, что системы синхронизации, реализующие некогерентный алгоритм обработки сложного сигнала, независимо от степени сложности фильтров в цепях управления могут обладать различными типами стационарных режимов и иметь сложную структуру областей их притяжения, определяющую финальный результат в зависимости от начального состояния системы. Установленные эффекты нелинейной динамики и полученные данные об областях значений параметров, при которых реализуется режим синхронного слежения и наблюдаются различные несинхронные режимы, о перестройках динамических состояний ДСС при изменении параметров развивают представления о сложном поведении связанных систем с фазовым управлением могут быть учтены при решении задач выбора и сравнительной оценки синтезированных алгоритмов приема и обработки сложных сигналов, задач ввода систем в режим слежения за параметрами принимаемого сигнала, подавления или стимулирования

неустойчивости синхронного режима, управления режимами поведения, а также задач генерации хаотических сигналов для систем передачи информации.

Работа выполнена при поддержке научной программы Университеты России (проект УР.03.01.014) и РФФИ (проект 02-02-17573).

### Библиографический список

1. *Беляев Р.В., Калинин В.И., Колесов В.В.* Формирование шумоподобной несущей в системах связи с расширением спектра // *Радиотехника и электроника*. 2001. Т. 46. № 2. С. 214.
2. *Тузов Г.И.* Статистическая теория приема сложных сигналов. М.: Сов. Радио, 1977.
3. *Тузов Г.И., Сивов В.А., Прытков В.И. и др.* Помехозащищенность радиосистем со сложными сигналами / Под ред. Г.И. Тузова. М.: Радио и связь, 1985.
4. *Бабич О.А.* Обработка информации в радиолокационных комплексах. М.: Машиностроение, 1991.
5. *Шахгильдян В.В., Ляховкин А.А.* Системы фазовой автоподстройки частоты. М.: Связь, 1972.
6. *Тузов Г.И., Прытков В.И.* Системы синхронизации, использующие сложные фазоманипулированные сигналы // В кн. Системы фазовой синхронизации / Под ред. Шахгильдяна В.В. и Белюстиной Л.Н. М.: Радио и связь, 1982. Гл. 7. С.104.
7. *Белюстина Л.Н., Кивелева К.Г., Фрайман Л.А.* Качественно-численный метод в исследовании трехмерных нелинейных СФС // В кн. Системы фазовой синхронизации / Под ред. В.В. Шахгильдяна и Л.Н. Белюстиной. М.: Радио и связь, 1982. Гл.2. С.21.
8. *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990.
9. *Пономаренко В.П., Матросов В.В.* Автоматизация исследований нелинейной динамики систем синхронизации // *Вестник Верхне-Волжского отделения АТН РФ. Высокие технологии в радиоэлектронике*. Вып. 2(4). Н. Новгород, 1997. С.15.
10. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959.
11. *Баутин Н.Н., Леонтович Е.А.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1984.
12. *Барбашин Е.А., Табуева В.А.* Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. М.: Наука, 1969.
13. *Баутин Н.Н.* Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. М.: Наука, 1984.
14. *Белюстина Л.Н., Пономаренко В.П., Шалфеев В.Д.* О динамике системы слежения за задержкой бинарного псевдослучайного сигнала // *Изв. вузов. Радиофизика*. 1970. Т. 13. № 11. С. 1669.
15. *Матросов В.В.* Регулярные и хаотические колебания фазовой системы // *Письма в ЖТФ*. 1996. Т. 22. № 4. С. 4.

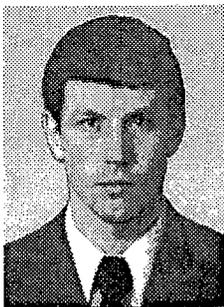
*НИИ Прикладной математики  
и кибернетики Нижегородского  
государственного университета*

*Поступила в редакцию 04.10.04*

# DYNAMICAL REGIMES, BIFURCATIONS AND TRANSITIONS TO CHAOTIC BEHAVIOR IN MODELS OF COUPLED SYNCHRONIZING SYSTEMS FOR COMPLEX SIGNAL

*V.P. Ponomarenko*

Results of investigation of nonlinear dynamics in models of two coupled phase-locked and delay-locked systems are presented. Stability conditions of synchronous regime and the boundaries of locked range are determined. The parameter regions corresponding to various periodic and chaotic nonsynchronous regimes of the systems are found. Peculiarities of the systems behavior in the process of transition to the state of signal parameters synchronous tracking are studied.



*Пономаренко Валерий Павлович* родился в Мурманске (1941), окончил Горьковский государственный университет (1963). С 1968 года работает в Научно-исследовательском институте прикладной математики и кибернетики при Нижегородском университете (НИИ ПМК при ННГУ). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук (1972) и доктора физико-математических наук (1993) в области теории синхронизации, теории колебаний и динамики систем. С 1991 года - заместитель директора НИИ ПМК при ННГУ. Область научных интересов - теория колебаний и волн, применение нелинейной динамики в радиоавтоматике, синхронизация автоколебательных систем, математическое моделирование. Один из авторов монографий «Фазовая синхронизация» и «Системы фазовой синхронизации». Опубликовал много научных статей по направлениям, указанным выше. E-mail: [povp@uic.nnov.ru](mailto:povp@uic.nnov.ru)