Изв.вузов «ПНД», т.9, № 1, 2001 УДК 532.132

Памяти А.А. Андронова посвящается

СВЕРХТЕКУЧЕСТЬ – БЕЗВЯЗКОЕ ТЕЧЕНИЕ В ВЯЗКОЙ СРЕДЕ

Ю.Л. Климонтович

Несмотря на замечательные успехи теории сверхтекучести, все же до настоящего времени отсутствует физическое объяснение возможности существования безвязкого течения жидкого гелия в вязкой среде. Существование сверхтекучести становится возможным благодаря возникновению фликкер–шума и соответствующих остаточных временных корреляций флуктуаций скорости сверхтекучего гелия.

Введение

В 1932 году В. Кеезом и К. Клаузиус обнаружили в районе температуры T_C=2.19 К аномальную температурную зависимость теплоемкости [1]. По форме она напоминала греческую букву λ. Это дало основание назвать критическую точку «λ–точка». Чтобы подчеркнуть различие состояний гелия выше и ниже точки фазового перехода, были введены названия: «гелий I» для температур $T>T_C$ и «гелий II» для температур $T<T_C$.

В 1938 году П. Капица обнаружил, что гелий II обладает сврхтекучестью – способностью безвязкого течения через тонкие щели и капилляры. Он обнаружил также наличие в капиллярах противотока вязкой – «нормальной» и безвязкой – «сверхтекучей» компонент жидкого гелия. Вязкий поток выходит из бульбочки, наполненной жидким гелием. Поток вызывается подогревом гелия в бульбочке и обнаруживается либо по отклонению мишени, либо по вращению «сегнерова колеса». Существенно, что при этом уровень жидкого гелия остается неизменным. Это и указывает на наличие безвязкого встречного потока – потока сверхтекучего гелия.

В период с 1938 по 1944 годы П. Капица опубликовал четыре работы, посвященных сверхтекучести [2–5]. В последних из них он принимает «двухжидкостную модель» гелия II, предложенную в работе Л. Тиссы [6] и существенно усовершенствованную Л. Ландау [7]. Л. Ландау, однако, предостерегает против «механического» представления двухжидкостной модели [8]: *Еще раз подчеркнем, что понятия «сверхтекучей» и «нормальной» жидкости является лишь удобным способом наглядного описания явления. В действительности надо было бы говорить об одновременно происходящих в одной и той же жидкости двух движений, из которых одно переносит тепло, а другое нет.*

Хотя П. Капица и принял двухжидкостную модель, однако, в итоговой работе [5] он пишет: *Все эти явления, для объяснения которых требуется представить себе сложные взаимодействия между двумя различными* *состояниями одной и той же жидкости и том же объеме, с трудом укладываются в наши привычные рамки даже физического мышления.* ⟨...⟩ *Если бы это теоретическое положение не было так полно подкреплено экспериментальными доказательствами, оно звучало бы как идея, которую очень трудно признать разумной.* В этом же ключе звучат и следующие слова П. Капицы: *Таким образом, двухжидкостная модель даже для физиков столь высокого уровня не представляется достаточно ясной.*

Использование двухжидкостной модели оправдано тем, что на ее основе удается описать наблюдаемые закономерности. В частности, она дает объяснение, почему при протекании гелия II через узкие щели или капилляры возникает разность температур, предсказывает существование второго звука, объясняет результаты опытов Э. Андроникашвили с вращающимся гелием [9].

Несмотря на эти несомненные успехи, физическая картина явления сверхтекучести остается все же не вполне ясной. Остаются без ответа два принципиальных вопроса.

- *Физическая природа фазового перехода гелий I – гелий II.*
- *Физическое объяснение возможности существования безвязкого течения в вязкой среде.*

Основная цель настоящей работы – обсуждение возможных ответов на эти вопросы. Ответы основаны на следующих положениях.

• Сверхтекучесть – макроскопическое явление в сплошной среде, которая по самому определению является диссипативной. При этом существенна конкретизация физически бесконечно малых масштабов, в частности, размера точки сплошной среды. Описание сверхтекучести проводится на основе соответствующих уравнений механики сплошной среды.

• Гелий II – пример квантовой жидкости, поскольку длина волны де Бройля порядка среднего расстояния между атомами. Однако в приближении сплошной среды длина волны де Бройля много меньше размера «точки», в которой по определению содержится много частиц. Благодаря этому условию возможно описание сверхтекучести на основе кинетического уравнения для классической функции распределения.

• Возможность сверхтекучести обусловлена двумя явлениями. Во–первых, фазовым переходом второго рода, в результате которого, наряду с быстрыми релаксационными процессами, возникают медленные (крупномасштабные) процессы. Они обеспечивают пространственную когерентность на масштабах щели или капилляра. Во–вторых, происходит перестройка структуры вязкого трения. Она обусловлена возникновением фликкер–шума флуктуаций гидродинамической скорости. Соответствующее распределение по волновым числам представляет аналог «бозе–конденсации», так как соответствующая дисперия значений волновых чисел становится пропорциональной частоте.

1. Фазовый переход гелий I – гелий II

Наряду с феноменологической теорией, развивалась и микроскопическая теория сверхтекучести. Основополагающей в этом направлении была работа Н. Боголюбова «К теории сверхтекучести» [10]. Объектом исследования при этом служит слабо неидеальный бозе–газ. Существенную роль в построении микроскопической теории сверхтекучести сыграло открытое А. Эйнштейном явление конденсации идеального бозе газа.

1.1. ***Конденсация идеального бозе–газа.*** В работах А. Эйнштейна 1924–1925 годов показано, что непрерывное распределение Бозе – Эйнштейна для среднего числа атомов идеального бозе–газа справедливо лишь при температурах $T \geq 3.14$ K. В соответствующей критической точке распределение частиц по импульсам распадается на два слагаемых: непрерывное распределение с нулевым значением химического потенциала и распределение $\delta(p)$. По мере понижения температуры число частиц с нулевым импульсом (число частиц в «конденсате») растет и при нулевой температуре совпадает с полным числом частиц. При критической температуре число частиц в «конденсате» равно нулю.

Предпринимались попытки [6, 11] объяснить сверхтекучесть гелия на основе явления бозе–конденсации.

1.2. ***Слабо неидеальный бозе–газ. Теория Боголюбова.*** В идеальном газе конденсат не образует связанного коллектива и поэтому не обладает свойством сверхтекучести. Если он движется как целое, то возможно замедление отдельных частиц, например, в результате столкновений со стенкой, и они выпадают из конденсата.

В слабо неидеальном газе Бозе – Эйнштейна из–за взаимодействия частиц гелия, как показал Н. Боголюбов [10], конденсат образует коллектив и при его движении, как целого, замедление возможно лишь при рождении коллективного элементарного возбуждения. При малых импульсах энергия возбуждений ε определяется классическим выражением

$$\varepsilon(p)=\left[\frac{n\nu(\mathbf{p}=0)}{m}\right]^{1/2} p=v_S p. \qquad (1)$$

которое отвечает фононной части спектра Ландау. Здесь $\nu(k)$ – фурье–компонента потенциала взаимодействия атомов жидкого гелия; n – плотность числа атомов гелия; m –масса атома гелия; $\mathbf{p}$ – импульс; p –величина импульса. Скорость звука v_S можно выразить через амплитуду вероятности борновского рассеяния при $\mathbf{p}=0$. Спектр Боголюбова справедлив при условии превалирования сил отталкивания над силами притяжения. Поскольку для жидкости среднее расстояние r_{av} порядка размера атома, то можно ввести своеобразный малый «параметр плотности» в теории сверхтекучести. При нулевой температуре число частиц неидеального газа в конденсате, в отличие от идеального бозе–газа, меньше полного числа частиц. Эта разница мала и определяется тем же малым параметром. Таким образом, для слабо неидеального газа основная часть атомов конденсата имеет нулевой импульс.

Обобщение теории Боголюбова на случай жидкого гелия невозможно, поэтому необходимо использовать феноменологические уравнения сплошной среды.

1.3. ***Связь энергии элементарных возбуждений и пространственной корреляционной функции.*** Р. Фейнман [12, 13] установил при $T=0$ более общую связь спектра элементарных возбуждений в жидком гелии со статическим форм–фактором $S(p)$ жидкости

$$\varepsilon(p)=\frac{\mathbf{p}^2}{2mS(p)}, \qquad \mathbf{p}=\hbar\mathbf{k}. \qquad (2)$$

Статический форм–фактор определяется через пространственную компоненту Фурье двухточечной корреляционной функции или, что эквивалентно, через пространственную спектральную функцию флуктуаций плотности числа частиц. Статический форм–фактор может быть установлен на основе экспериментов по рассеянию рентгеновских лучей или нейтронов.

В работе Н. Боголюбова и Д. Зубарева [14] соотношение Фейнмана было установлено на примере слабо неидеального бозе–газа в рамках теории коллективных переменных. При этом удается получить одновременно выражения как для спектра элементарных возбуждений, так и для форм–фактора.

1.4. ***Кинетический вывод соотношения Фейнмана для слабо неидеального бозе–газа. Вклад от области прозрачности.*** Основываясь на кинетическом уравнении для функции Вигнера [15], но с источником Ланжевена, можно произвести расчет флуктуаций плотности числа частиц $\delta n(\mathbf{R},t)=\int \delta f(\mathbf{R},\mathbf{p},t)d\mathbf{p}$, где δf – функция распределения.

При нулевой температуре (T=0) получаем следующее выражение для искомой спектральной плотности

$$(\delta n\delta n)_{\omega,\mathbf{k}}=\frac{\hbar}{v(\mathbf{k})}\,\frac{\mathrm{Im}\chi\,(\omega,\mathbf{k})}{|\chi(\omega,\mathbf{k})|^2},\tag{3}$$

где $\chi(\omega,\mathbf{k})$ – восприимчивость. Интегрированием по частоте находим пространственную спектральную плотность, которая связана со статическим форм–фактором. Выделим в интеграле по частоте область прозрачности. В результате получаем соотношение Фейнмана для слабо неидеального бозе–газа

$$\frac{(\delta n\delta n)_k}{n}\equiv S(k)=\frac{\hbar^2k^2}{2m\hbar\omega(k)},\qquad k=|\mathbf{k}|.\tag{4}$$

Общее же соотношение Фейнмана (2), установленное на основе микроскопической теории, справедливо и для жидкого гелия.

Соотношение Фейнмана было установлено при условии T=0. Этот результат, однако, недостаточен для описания фазового перехода в сверхтекучее состояние, который происходит при отличной от нуля температуре. По этой причине соотношение Фейнмана и, соответственно, спектр Ландау не могут быть использованы, например, для объяснения аномального поведения теплоемкости в критической области температур.

1.5. ***Соотношение Фейнмана в классическом пределе.*** Обратимся к соотношению Фейнмана. Перепишем его в виде:

$$\omega(k)=\frac{\hbar k^2}{2m}\,\frac{n}{(\delta n\delta n)_k}.\tag{5}$$

В левой части выделим фононный вклад. Классический предельный переход в правой части оказывается невозможным. Это связано с тем, что формуле (3) был учтен лишь вклад нулевых колебаний. Теперь вместо (3) используем следующее выражение:

$$(\delta n\delta n)_{\omega,\mathbf{k}}=\frac{2}{\omega v(k)}\,\frac{\mathrm{Im}\chi\,(\omega,\mathbf{k})}{|\chi(\omega,\mathbf{k})|^2}k_{\mathrm{B}}T,\tag{6}$$

где k_{B} – постоянная Больцмана. Интегрированием по ω получим выражение для пространственной спектральной плотности флуктуаций. При этом нет необходимости выделять вклад от области прозрачности, так как можно провести интегрирование без дополнительных упрощений (см. например, [16, гл.15, (7.8)]). В результате получаем соотношение между пространственной спектральной плотностью флуктуаций и статической восприимчивостью $\chi\,(0,k)$

$$\frac{(\delta n\delta n)_k}{n}=\frac{k_{\mathrm{B}}T}{nv\,(k)}\left(1-\frac{1}{\chi(0,k)}\right).\tag{7}$$

Выражение для статической восприимчивости имеет следующий вид:

$$\chi(0,k)=1+\frac{nv(k)}{k_{\mathrm{B}}T}.\tag{8}$$

Из последних двух формул следует соотношение между пространственным коррелятором $(\delta n\delta n)_k$ и компонентой Фурье потенциала взаимодействия атомов

$$\frac{(\delta n\delta n)_k}{n}=\frac{1}{1+\dfrac{nv(k)}{k_B T}}. \tag{9}$$

Это выражение является классическим аналогом формулы Фейнмана, полученное в приближении слабой неидеальности бозе–системы. На феноменологическом уровне описания используем его и для жидкого состояния при высоких температурах вне критической области. Полагая в последнем соотношении k=0, будем использовать его для определения эффективного потенциала взаимодействия атомов жидкого гелия

$$1+\frac{nv_{\mathrm{eff}}(0)}{k_B T}=\frac{1}{nk_B T\beta_T}=\frac{n}{(\delta n\delta n)_{k=0}}, \tag{10}$$

где β_T – коэффициент изотермической сжимаемости. Ниже установим связь эффективного потенциала с коэффициентами стационарного уравнения Гинзбурга–Ландау.

При приближении к критической точке фазового перехода со стороны высоких температур коэффициент изотермической сжимаемости β_T возрастает по закону Кюри и, следовательно, эффективный потенциал $v_{\mathrm{eff}}(0)$ пропорционален разности температур. Такая температурная зависимость указывает на приближение к критической точке. При этом прослеживается аналогия с теорией Орнштейна – Цернике.

1.6. ***Физическое определение констант в уравнении Гинзбурга – Ландау.*** В конденсате бозе–системы в одном состоянии находится много частиц. По этой причине соответствующая комплексная локальная эффективная волновая функция является классической и наблюдаемой [17, 20]. Представим ее в виде

$$\psi_0(\mathbf{R},t)=|\psi_0|\exp(i\theta). \tag{11}$$

$|\psi_0|^2=N_0/V=n_0$ – плотность числа частиц в конденсате. Эффективная волновая функция удовлетворяет стационарному уравнению Гинзбурга – Ландау [17]. Одна из возможностей описания временной эволюции в теории Гинзбурга – Ландау заключается в переходе к соответствующему уравнению Хартри – обратимому уравнению квантовой механики. Чтобы выявить физическй смысл коэффициентов уравнения Гинзбурга – Ландау сопоставим два способа расчета восприимчивости: по уравнению Гинзбурга – Ландау и по квантовому кинетическому уравнению в самосогласованном приближении для неидеального бозе–газа. В результате получаем соотношения для коэффициентов уравнения Гинзбурга – Ландау

$$\frac{\alpha_L}{b}=n\,,\qquad \alpha_L=n|v_{\mathrm{eff}}(0)|,\qquad \text{где } n=\frac{N}{V}. \tag{12}$$

При переходе в сверхтекучее состояние меняется не только термодинамика, но и гидродинамика – возникают «двухжидкостные течения» нормальной и сверхтекучей компонент гелия. Это ставит вопрос о физической природе возникновения «двухжидкостного» состояния. Для ответа на него необходимо использование эволюционных уравнений с учетом диссипации.

2. Кинетическое описание фазового перехода

2.1. ***Релаксационное уравнение Гинзбурга – Ландау.*** Уравнению Хартри отвечает релаксационное уравнение Гинзбурга – Ландау

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\gamma\left[\frac{T-T_C}{T_C} + \frac{|\psi|^2}{n}\right]\psi + D\frac{\partial^2\psi}{\partial R^2}. \qquad (13)$$

Если переход к релаксационному уравнению производится по формальной схеме путем замены t на мнимое время it, то коэффициенты D и γ следует определить формулами

$$D=\frac{\hbar}{2m}, \quad \gamma=\frac{\alpha_L}{\hbar}, \quad \alpha_L=n|v_{\mathrm{eff}}(0)|. \qquad (14)$$

Однако вместо (13) следует использовать кинетическое уравнение для локальной функции распределения плотности числа атомов сверхтекучей компоненты $f(n_S,\mathbf{R},t)$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 2\frac{\partial}{\partial n_S}\left[\gamma D_{n_S} n_S \frac{\partial f}{\partial n_S}\right] + \frac{\partial}{\partial n_S}\left\{2\gamma\left[\frac{T-T_C}{T_C} + \frac{n_S}{n}\right]n_S f\right\} + D\frac{\partial^2 f}{\partial R^2}, \qquad (15)$$

где n_S – плотность числа сверхтекучих атомов. Коэффициент диффузии $D_{n_S}=n/N_{ph}$ определяется числом частиц в точке сплошной среды. В равновесном состоянии

$$f_0(n_S) = C\exp(-\frac{h_{\mathrm{eff}}}{D_{n_S}}), \quad h_{\mathrm{eff}} = \gamma\left[\frac{T-T_C}{T_C}n_S + \frac{n_S^2}{2n}\right]. \qquad (16)$$

Здесь введено обозначение для эффективной функции Гамильтона h_{eff} в расчете на одну частицу. В приближении первого момента функция распределения приобретает вид

$$f(n_S,t) = \delta(n_S - \langle n_S\rangle_{\mathbf{R},t}), \qquad (17)$$

и имеет место замкнутое уравнение для первого момента

$$\frac{\partial\langle n_S\rangle_{\mathbf{R},t}}{\partial t} = 2\gamma\left\{D_{n_S} - \left[\frac{T-T_C}{T_C} + \frac{\langle n_S\rangle_{\mathbf{R},t}}{n}\right]\langle n_S\rangle_{\mathbf{R},t}\right\} + D\frac{\partial^2\langle n_S\rangle_{\mathbf{R},t}}{\partial R^2}. \qquad (18)$$

Это пример реакционно–диффузионного уравнения. Для стационарного и однородного состояния оно сводится к алгебраическому уравнению

$$D_{n_S} - \left[\frac{T-T_C}{T_C} + \frac{\langle n_S\rangle_{\mathrm{st}}}{n}\right]\langle n_S\rangle_{\mathrm{st}} = 0, \quad D_{n_S} = \frac{n}{N_{\mathrm{ph}}}, \quad \gamma = \frac{n|v_{\mathrm{eff}}(0)|}{\hbar}. \qquad (19)$$

Его решение позволяет найти среднее значение числа сверхтекучих атомов при всех значениях температуры. В частности, в критической точке

$$\langle n_S\rangle_{\mathrm{st}}^{(2)} = (nD_{n_S})^{1/2} = \frac{n}{N_{\mathrm{ph}}^{1/2}} \ll n. \qquad (20)$$

В термодинамическом пределе среднее число сверхтекучих атомов равно нулю. Ниже критической точки

$$\langle n_S\rangle_{\mathrm{st}}^{(3)} = n. \qquad (21)$$

В кинетическом уравнении для функции $f(n_S,t)$ отсутствует информация о распределении значений фазы θ эффективной волновой функции.

2.2. ***Кинетическое уравнение для функции распределения значений амплитуды и фазы.*** Вместо комплексной эффективной волновой функции $\psi(\mathbf{R},t)$ введем две действительные полевые функции $X(\mathbf{R},t), Y(\mathbf{R},t)$

$$\psi(\mathbf{R},t) = X(\mathbf{R},t) + iY(\mathbf{R},t), \quad n_S(\mathbf{R},t) = X^2(\mathbf{R},t)+Y^2(\mathbf{R},t). \tag{22}$$

Соответствующее кинетическое уравнение для функции распределения $f(X,Y,\mathbf{R},t)$ с учетом пространственной диффузии имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \left\{\frac{\partial}{\partial X}\left[\frac{1}{2}\gamma D_{n_S}\frac{\partial f}{\partial X}\right] + \frac{\partial}{\partial Y}\left[\frac{1}{2}\gamma D_{n_S}\frac{\partial f}{\partial Y}\right]\right\} +$$
$$+\left\{\frac{\partial}{\partial X}\left[\gamma\left(\frac{T-T_C}{T_C}+\frac{X^2+Y^2}{n}\right)Xf\right] + \frac{\partial}{\partial Y}\left[\gamma\left(\frac{T-T_C}{T_C}+\frac{X^2+Y^2}{n}\right)Yf\right]\right\} + D\frac{\partial^2 f}{\partial R^2}. \tag{23}$$

Уравнение для функции распределения значений n_S

$$f(n_S,\mathbf{R},t)=\int \delta(n_S-(X^2+Y^2))f(X,Y,\mathbf{R},t)dXdY \tag{24}$$

в самосогласованном приближении по n_S следует из общего уравнения (23) и совпадает, естественно, с уравнением (15).

Релаксационные процессы при фазовом переходе ниже критической точки можно разделить на быстрые (для плотности числа частиц или амплитуды) и медленные (для фазы или соответствующей комбинации переменных X, Y).

Для описания медленной релаксации в уравнении (23) возможна замена

$$\frac{T-T_C}{T_C}+\frac{X^2+Y^2}{n} \to \frac{T-T_C}{T_C}+\frac{n_S}{n}. \tag{25}$$

В результате получаем кинетическое уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial X}\left\{\left[\frac{1}{2}\gamma D_{n_S}\frac{\partial f}{\partial X}\right] + \frac{\partial}{\partial Y}\left[\frac{1}{2}\gamma D_{n_S}\frac{\partial f}{\partial Y}\right]\right\} + \left\{\frac{\partial}{\partial X}\left[\gamma\frac{D_{n_S}}{\langle n_S\rangle_{st}}Xf\right] + \frac{\partial}{\partial Y}\left[\gamma\frac{D_{n_S}}{\langle n_S\rangle_{st}}Yf\right]\right\} + D\frac{\partial^2 f}{\partial R^2}, \tag{26}$$

$$D_{n_S} = n/N_{ph}.$$

Равновесным решением этого уравнения является распределение Гаусса по двум переменным

$$f_0(X,Y)=C\exp\left[-\frac{X^2+Y^2}{\langle n_S\rangle_{st}}\right], \quad \int f_0(X,Y)dXdY=1. \tag{27}$$

Средние значения X, Y равны нулю. Вся информация о фазовом переходе содержится в выражении для средней плотности числа сверхтекучих атомов. При всех значениях температуры она определяется решением уравнения (19).

2.3. ***Релаксации быстрых процессов.*** Вернемся к эволюционному уравнению (18). Рассмотрим малое отклонение от стационарного и пространственно-однородного решения $\langle n_S\rangle_{st}$. Соответствующее время релаксации τ_{n_S} и полуширина Δn_S спектральной линии определяются выражениями

$$\frac{1}{\tau_{n_S}(k)} = \Delta_{n_S}(k) = 2\gamma\left[\frac{T-T_C}{T_C}+2\frac{\langle n_S\rangle}{n}\right]+Dk^2, \qquad \gamma=\frac{k_B T_C}{\hbar}. \tag{28}$$

Для нулевого значения волнового числа время релаксации возрастает по закону Кюри с приближением к критической точке. В критической точке оно имеет максимальное конечное значение $2\gamma(1/N_{ph})^{1/2}$.

Из уравнения (18) находим выражение для комплексного отклика $\langle n_S\rangle^{(1)}$ на внешнее воздействие

$$\chi_{n_S}(\omega,k) = \frac{1}{-i\omega + D_{n_S}(k)}, \qquad \Delta_{n_S}(k) = 2\frac{k_B T_C}{\hbar}\left[\frac{T-T_C}{T_C} + 2\frac{\langle n_S\rangle_{st}}{n}\right] + Dk^2. \tag{29}$$

Используем связь функции $\chi_{n_S}(0,0)$ и изотермической сжимаемости β_T [16]

$$\chi_{n_S}(0,0) = \frac{1}{\Delta_{n_S}(0)} = 2\frac{k_B T_C}{\hbar} n k_B T_C \beta_T, \quad \text{где } n k_B T_C \beta_T = \frac{1}{\dfrac{T-T_C}{T_C} + 2\dfrac{\langle n_S\rangle_{st}}{n}}. \tag{30}$$

Для области Ландау при приближении к критической точке параметры β_T и τ_{nS} растут по закону Кюри. В критической точке сжимаемость и время релаксации (при k=0) конечны, например,

$$n k_B T_C \beta_T = (N_{ph})^{1/2}. \tag{31}$$

2.4. ***Релаксация медленных процессов.*** Из кинетического уравнения (26) находим уравнения для средних значений $\langle X\rangle_{R,t}$ $\langle Y\rangle_{R,t}$ и с их помощью выражения для времен релаксации и ширин спектральных линий для медленных процессов

$$\frac{1}{\tau_{X|Y}(k)} = \Delta_{X|Y}(k) = \gamma\frac{D_{n_S}}{\langle n_S\rangle_{st}} + Dk^2, \qquad D_{n_S} = \frac{n}{N_{ph}}. \tag{32}$$

Величина $\langle n_S\rangle_{st}$ – решение уравнения (19) при всех температурах. Выражение для комплексной восприимчивости имеет вид

$$\chi_{X|Y}(\omega,k) = \frac{1}{-i\omega + \gamma\dfrac{D_{n_S}}{\langle n_S\rangle_{st}}(1 + r_{cor}^2 k^2)}, \qquad r_{cor}^2 = D\frac{\langle n_S\rangle_{st}}{\gamma D_{n_S}}, \tag{33}$$

Здесь введено обозначение для квадрата радиуса корреляции r_{cor}. Изотермическая сжимаемость определяется теперь выражением

$$n k_B T_C \beta_T = \frac{\langle n_S\rangle_{st}}{D_{n_S}}. \tag{34}$$

Для области применимости теории Ландау при приближении к критической точке со стороны высоких температур изотермическая сжимаемость растет по закону Кюри. В самой критической точке она также конечна и определяется выражением

$$n k_B T_C \beta_T = (N_{ph})^{1/2}, \quad T = T_C. \tag{35}$$

Однако, для области температур, ниже критической

$$n k_B T_C \beta_T = N_{ph}\frac{T_C - T}{T_C}, \quad T < T_C \tag{36}$$

изотермическая сжимаемость продолжает расти по мере понижения температуры.

2.5. ***Быстрые и медленные флуктуации.*** Задача расчета флуктуаций при фазовом переходе в сверхтекучее состояние аналогична задаче, решенной в [18, гл. 24, разд. 24.3].

2.5.1. ***Быстрые флуктуации параметра порядка.*** Расчет быстрых флуктуаций параметра порядка аналогичен проведенному в [18, гл. 19, разд. 19.6].

Вводим в уравнение (18) для функции $\langle n_S\rangle_{R,t}$ ланжевеновский источник, который отражает атомарную структуру жидкого гелия. Время релаксации флуктуаций параметра порядка совпадает с выражением (28).

Комплексный отклик на случайный источник определяется приведенными выше выражениями (29)–(30) при всех значениях температуры. Величина $\langle n_S\rangle_{st}$ определяется решением уравнения (19). При достаточной удаленности от критической точки отклик $\chi_{n_S}(0, 0)=0$ меняется по закону Кюри. В критической точке изотермическая сжимаемость имеет конечное значение (31). Квадрат радиуса корреляции r_{cor} при приближении к критической точке в области теории Ландау меняется по закону Кюри, но конечен в самой критической точке.

2.5.2. ***Медленные флуктуации параметра порядка.*** Покажем, что существование сверхтекучести возможно благодаря медленным флуктуациям .

Обратимся к кинетическому уравнению (26). Введем в него источник Ланжевена $y_{X|Y}(\mathbf{R},t)$, интенсивность которого определяется двумя диссипативными характеристиками («интегралами столкновений»). В самосогласованном приближении уравнения для первых моментов – функций $X(\mathbf{R},t)$, $Y(\mathbf{R},t)$ – имеют следующий вид:

$$\frac{\partial X}{\partial t}+\gamma\frac{D_{n_S}}{\langle n_S\rangle_{st}}X=D\frac{\partial^2 X}{\partial R^2}+y_X,\qquad \frac{\partial Y}{\partial t}+\gamma\frac{D_{n_S}}{\langle n_S\rangle_{st}}Y=D\frac{\partial^2 Y}{\partial R^2}+y_Y. \tag{37}$$

Ширины спектральных линий $\Delta_X(k)$, $\Delta_Y(k)$ и динамическая восприимчивость определяются прежними выражениями (32)–(33) .

Для области теории Ландау при приближении к критической точке со стороны высоких температур квадрат корреляционного радиуса растет по закону Кюри

$$r_{cor}^2=\frac{D}{\gamma}\frac{T_C}{T-T_C},\qquad T>T_C. \tag{38}$$

В критической точке квадрат радиуса корреляции конечен

$$r_{cor}^2=(N_{ph})^{1/2}\frac{D}{\gamma},\quad T=T_C. \tag{39}$$

При понижении температуры от критической

$$r_{cor}^2=N_{ph}\frac{D}{\gamma}\,\frac{T_C-T}{T_C}\sim N_{ph}\lambda_S^2\frac{T_C-T}{T_C},\quad \lambda_S=\frac{\hbar}{mv_S},\qquad T<T_C. \tag{40}$$

Здесь использована следующая оценка параметра D/γ :

$$\frac{D}{\gamma}\sim\frac{\hbar^2}{mn|v_{eff}(0)|}\sim\frac{\hbar^2}{mv_S^2}\sim\lambda_S^2, \tag{41}$$

где v_S – скорость звука, λ_S– соответствующая длина волны де Бройля.

Таким образом, значения изотермической сжимаемости и квадрата радиуса корреляции для медленных флуктуаций при температурах ниже критической ($T\le T_C$) определяются числом атомов в точке сплошной среды N_{ph}. Проведем оценку этой величины для гидродинамического описания.

2.5.3. ***Физически бесконечно малые масштабы.*** Поскольку описание сверхтекучести проводится на гидродинамическом уровне, то следует использовать и соответствующее определение физически бесконечно малых масштабов. При этом искомые масштабы зависят от внешнего параметра длины L – одного из характерных размеров сосуда с жидким гелием. На основании предложенного в работах [16, 19, 18] формулу для r_{cor}^2 при низких температурах можно переписать в виде

$$r_{cor}^2=(nL^3)^{2/5}\lambda_S^2\,\frac{T_C-T}{T_C}\sim(nL^3)^{2/5}\lambda_S^2,\quad T<T_C. \tag{42}$$

Чтобы обеспечить пространственную когерентность сверхтекучего потока по капилляру диаметра d, надо ограничить эту величину условием

$$d<r_{cor}=(nL^3)^{1/5}\lambda_S. \tag{43}$$

2.5.4. ***Спектральная плотность медленных флуктуаций.*** Расчет аналогичен изложенному в монографии [18, гл. 19]. Указанная глава посвящена кинетической теории флуктуаций при фазовых переходах в сегнетоэлектриках и в системе Ван дер Ваальса.

Используем выражение для источников Ланжевена в уравнениях для первых моментов в виде

$$(y_{X|Y}y_{X|Y})_{\omega,\mathbf{k}}=2\Delta_{X|Y}(k)\,\frac{1}{2}\frac{\langle n_S\rangle_{st}}{n}. \tag{44}$$

Соответствующие выражения для спектральных плотностей медленных флуктуаций имеют вид

$$\begin{aligned}(\delta X\delta X)_{\omega,\mathbf{k}}&=\frac{2\Delta_X(k)}{\omega^2+\Delta_X^2(k)}\frac{\langle(\delta X)^2\rangle}{n},\quad \langle(\delta X)^2\rangle=\frac{1}{2}\langle n_S\rangle_{st},\\ (\delta Y\delta Y)_{\omega,\mathbf{k}}&=\frac{2\Delta_Y(k)}{\omega^2+\Delta_Y^2(k)}\frac{\langle(\delta Y)^2\rangle}{n},\quad \langle(\delta Y)^2\rangle=\frac{1}{2}\langle n_S\rangle_{st}.\end{aligned} \tag{45}$$

Пространственная спектральная плотность не зависит от волнового числа («пространственный белый шум»); пространственные корреляторы δ –коррелированы

$$(\delta X\delta X)_{\mathbf{R}-\mathbf{R}'}=(\delta Y\delta Y)_{\mathbf{R}-\mathbf{R}'}=\frac{1}{2}\frac{\langle n_S\rangle_{st}}{n}\,\delta(\mathbf{R}-\mathbf{R}'). \tag{46}$$

Таким образом, пространственные корреляции отличны от нуля лишь в пределах точки сплошной среды (в физически бесконечно малом объеме V_{ph}), так как функция $\delta(\mathbf{R}-\mathbf{R}')|_{\mathbf{R}=\mathbf{R}'}=V_{ph}^{-1}$. В результате для одноточечного коррелятора медленных (крупномасштабных) флуктуаций $\langle\delta X\delta X\rangle_{\mathbf{R}=\mathbf{R}'}$ имеем следующее выражение:

$$\langle\delta X\delta X\rangle_{\mathbf{R}=\mathbf{R}'}=\langle\delta Y\delta Y\rangle_{\mathbf{R}=\mathbf{R}'}=\frac{1}{2}\frac{\langle n_S\rangle_{st}}{N_{ph}},\quad N_{ph}=nV_{ph}. \tag{47}$$

Дисперсия флуктуаций, сглаженных по объему точки сплошной среды, в N_{ph} раз меньше флуктуаций одноточечного распределения – распределения Больцмана.

2.5.5. ***Промежуточные итоги.*** Проведенный анализ выявил наличие аномалии температурной зависимости ряда термодинамических характеристик и подтвердил наличие фазового перехода второго рода в жидком гелии.

Этот переход в значительной мере аналогичен фазовому переходу сегнетоэлектрического типа, переходу через критическую точку в системе Ван дер Ваальса, а также фазовому переходу расслоения в бинарных жидких растворах.

Распространенная гипотеза о связи фазового перехода в сверхтекучее состояние с явлением конденсации Бозе – Эйнштейна в идеальном газе атомов гелия не имеет достаточных физических оснований.

Теория сверхтекучести Боголюбова проясняет в значительной мере вопросы о спектре элементарных коллективных возбуждений теории Ландау и о структуре «конденсата», но все же оставляет открытым вопрос о физической природе сверхтекучести.

Основой гидродинамики сверхтекучего гелия остается двухжидкостная модель Тиссы и Ландау. В настоящее время лишь на ее основе можно пояснить ряд наблюдаемых в опытах Капицы и Андроникашвили особенностей сверхтекучего гелия.

Явление безвязкого течения гелия через тонкие каналы–щели и капилляры до сих пор вызывает удивление, как и у очевидцев первых опытов Капицы. *Сам не пойму: из маленькой бульбочки бьет струя беспрерывно, а бульбочка не пустеет* ⟨...⟩ *И опять, сколько ни свети, паучок вращается, из его изогнутых ножек бьет невидимая струя, но наперсток не пустеет. Чудо и чудо!* ⟨...⟩ *Во всех этих опытах оставалось непонятным только одно: почему бульбочки и паучок, из которых все время вытекает струя жидкого гелия–II, никогда не пустели? Каким образом туда проникал жидкий гелий?* (Из книги Э.Л.Андроникашвили «История жидкого гелия».)

Удивление вызывало и обнаруженное в экспериментах Капицы наличие «критической» скорости безвязкого течения гелия. Оно оказалось примерно 100 см/с, что на два–три порядка меньше скорости звука в гелии. Сам Капица делал разные попытки физического объяснения наблюдаемых им явлений и все же в своей итоговой работе [5] он принял двухжидкостную модель Ландау. Об этом уже говорилось выше. Напомним его слова: *Таким образом, несмотря на несомненную плодотворность двухжидкостной модели сверхтекучего гелия, физическое содержание этой модели едва ли можно считать достаточно ясным.*

Изложенное позволяет сделать еще один шаг в физическом представлении фазового перехода в сверхтекучее состояние и в интерпретации двухжидкостного состояния сверхтекучего гелия.

Было показано, что при температурах ниже критической в жидком гелии имеются два флуктуационных процесса «быстрый» и «медленный». Поведение быстрых флуктуаций близко к тому, которое предписывается теорией фазовых переходов, развитой Ландау. Термодинамические и флуктуационные характеристики быстрых процессов демонстрируют аномальные зависимости от температуры – закон Кюри для изотермической сжимаемости, статической восприимчивости и квадрата радиуса корреляции.

Основное отличие в поведении быстрых флуктуаций от предсказания теорией Ландау и более общей так называемой «флуктуационной теорией фазовых переходов» состоит в отсутствии «проблемы бесконечностей». Именно в отличие от традиционной теории здесь изотермическая сжимаемость, статическая восприимчивость и квадрат радиуса корреляции имеют конечные значения в самой критической точке!

Поскольку в теории Ландау при удалении от критической точки как всторону высоких температур, так и в сторону низких температур значения этих характеристик убывают по закону Кюри до их «нормальных» значений, то в «нормальном» состоянии радиус корреляции порядка среднего расстояния между атомами. По этой причине корреляции быстрых флуктуаций не могут обеспечить пространственную и временную когерентность более упорядоченного несимметричного состояния, которое существует при температурах $T<T_C$.

Напротив, поведение медленных флуктуаций при температурах $T<T_C$ существенно иное. По мере удаления вниз от критической температуры значение радиуса корреляции продолжает нарастать и стремится к макроскопическому значению. В термодинамическом пределе это значение, формально, равно бесконечности. Однако, такой предельный переход противоречит модели

сплошной среды. В проведении такого перехода и нет необходимости. Достаточно, чтобы радиус корреляции был макроскопическим, в частности, превышал бы диаметр капилляра в установках Капицы.

Основные особенности явления сверхтекучести проявляются все же не в термодинамике, а в гидродинамике. Это подчеркивается и самим термином, который ввел Капица – «сверхтекучесть». Основная задача теории сводится здесь к двум вопросам.

- *Почему возможно безвязкостное течение в диссипативной среде?*
- *Каково физическое различие сверхтекучей и нормальной компонент в гидродинамике гелия?*

Попытаемся дать ответ на эти принципиальные вопросы.

3. Безвязкое течение в вязкой среде

3.1. ***Введение.*** В предыдущих разделах рассмотрены две возможности временного обобщения стационарного уравнения Гинзбурга – Ландау для эффективной волновой функции. Первое приводит к уравнению типа Хартри. На его основе возможен вывод соответствующих гидродинамических уравнений, но без учета диссипации. Это не дает возможности объяснить существование безвязкого течения в вязкой среде.

Была рассмотрена и другая возможность временного обобщения стационарного уравнения Гинзбурга – Ландау – релаксационное уравнение для «комплексной эффективной волновой функции». Последние слова поставлены в кавычки, поскольку здесь уже нет связи с квантовой механикой.

На основе соответствующих кинетических уравнений при пространственно-однородном распределении (k=0), когда «диффузионный» вклад в диссипацию равен нулю, было проведено описание как релаксационных, так и флуктуационных процессов при всех возможных значениях температуры в критической области. При температурах ниже критической (при k=0) существуют два типа релаксационных и флуктуационных процессов: быстрые – мелкомасштабные, и медленные – крупномасштабные.

Аномалии при быстрых процессах, как и в теории фазовых переходов, развитой Ландау, сосредоточены лишь в критической области и поэтому не могут определять существование когерентной несимметричной фазы. Существенное отличие от теории Ландау, а также и более общей «флуктуационной теории фазовых переходов», состоит в отсутствии здесь «проблемы бесконечности». Это означает, что при описании релаксационных и флуктуационных процессов на основе уравнений сплошной среды все характеристики фазового перехода конечны и в самой критической точке.

Для медленных процессов корреляционный радиус при температурах ниже критической становится макроскопической характеристикой – не возвращается при удалении от критической точки к своему микроскопическому значению! Это и определяет возможность существования пространственной когерентности в жидком гелии при температурах, меньших критической.

Есть, таким образом, основания связать с двухжидкостным состоянием сверхтекучего гелия наличие при температурах $T \leq T_C$ двух типов (быстрых и медленных) релаксационных и диффузионных процессов. Сверхтекучей компоненте отвечают медленные процессы, нормальной – быстрые процессы. При температурах $T \leq T_C$ одновременно могут существовать медленные и быстрые процессы – «двухжидкостное» состояние. Напротив, при температурах $T \leq T_C$ все процессы релаксации являются быстрыми – «нормальное» состояние.

Выше предполагалось, что распределение гелия является пространственно однородным. При этом, однако, остается без ответа основной вопрос. Ведь среда же является вязкой, поэтому при пространственно неоднородном распределении вступает в игру «диффузионное» трение, в частности, в гидродинамическом уравнении для скорости – вязкое трение. *Надо показать, что проведенное (при $k=0$) разделение на «нормальную» и «сверхтекучую» компоненты сохраняет силу и при учете «диффузионного», в частности, вязкого трения.* В этом и состоит основная задача настоящего раздела.

Поскольку необходимо учесть как динамические, так и диссипативные составляющие, то необходимо, как это и было сделано в теории сверхпроводимости, использовать соответствующее обобщенное кинетическое уравнение с учетом как динамики, так и реакционно–диффузионной диссипации.

3.2. ***Реакционно–диффузионно–динамические уравнения в теории сверхтекучести.*** В жидком гелии длина волны де Бройля $\lambda_B(T)$ порядка среднего расстояния между атомами r_{av}. Однако, в сплошной среде обе эти величины много меньше физически бесконечно малого масштаба l_{ph}, поскольку в точке сплошной среды находится много атомов. По этой причине как в кинетическом уравнении, так и в соответствующих уравнениях гидродинамики вклады, определяемые постоянной Планка, не являются существенными.

Соответствующее диссипативное кинетическое уравнение для локальной функции распределения $f(X,Y,\mathbf{R},\mathbf{V},t)$ значений реальной и мнимой частей «эффективной волновой функции» и положений атомов в шестимерном пространстве $\mathbf{R},\mathbf{V}$, как и в теории сверхпроводимости, имеет структуру

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\mathbf{V}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{R}}+\mathbf{F}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{V}}=I_V+\left\{\frac{\partial}{\partial X}\left[\frac{1}{2}\gamma D_{n_S}\frac{\partial f}{\partial X}\right]+\frac{\partial}{\partial Y}\left[\frac{1}{2}D_{n_S}\gamma\frac{\partial f}{\partial Y}\right]\right\}+$$

$$+\left\{\frac{\partial}{\partial X}\left[\gamma\frac{D_{n_S}}{\langle n_S\rangle_{st}}Xf\right]+\frac{\partial}{\partial Y}\left[\gamma\frac{D_{n_S}}{\langle n_S\rangle_{st}}Yf\right]\right\}+D\frac{\partial^2 f}{\partial R^2}, \tag{48}$$

где $\mathbf{F}(\mathbf{R},t)$ – внешняя сила. Коэффициенты диффузии и трения определяются прежними выражениями:

$$D=\frac{\hbar}{2m},\qquad D_{n_S}=\frac{n}{N_{ph}},\qquad \gamma=\frac{n|v_{eff}(0)|}{\hbar}. \tag{49}$$

3.3. ***Переход к гидродинамическим уравнениям.***

3.3.1. ***Уравнение непрерывности.*** Используем определение гидродинамических функций

$$\langle n_S\rangle_{\mathbf{R},t}=\int(X^2+Y^2)f(X,Y,\mathbf{R},\mathbf{V},t)\,\frac{\mathbf{V}md\mathbf{V}}{(2\pi\hbar)^3}\,dXdY, \tag{50}$$

$$\langle n_S\rangle_{\mathbf{R},t}\mathbf{u}_S(\mathbf{R},t)=\int\mathbf{V}f(X,Y,\mathbf{R},\mathbf{V},t)\frac{\mathbf{V}md\mathbf{V}}{(2\pi\hbar)^3}\,dXdY. \tag{51}$$

В самосогласованном приближении по первым моментам получим для $\langle n_S\rangle_{\mathbf{R},t}$ уравнение непрерывности

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle n_S\rangle_{\mathbf{R},t}+\frac{\partial}{\partial \mathbf{R}}\mathbf{j}_S(\mathbf{R},t)=2\left\{D_{n_S}-\gamma\left[\frac{T-T_C}{T_C}+\frac{\langle n_S\rangle_{\mathbf{R},t}}{n}\right]\langle n_S\rangle_{\mathbf{R},t}\right\}. \tag{52}$$

Здесь использовано обозначение для потока вещества с учетом как конвективного переноса, так и пространственной диффузии

$$\mathbf{j}_S(\mathbf{R},t) = \langle n_S\rangle_{\mathbf{R},t}\,\mathbf{u}_S(\mathbf{R},t) - D\,\frac{\partial\langle n_S\rangle_{\mathbf{R},t}}{\partial\mathbf{R}}. \qquad (53)$$

Правая часть уравнения непрерывности описывает «химическую реакцию» – рождение и уничтожение средней плотности сверхтекучей фазы. В стационарном состоянии уравнение непрерывности можно свести к двум уравнениям. Первое позволяет выразить величину конвективного потока в капилляре длины l через перепад плотностей гелия на концах капилляра. При пространственно-однородном течении

$$\frac{\partial\mathbf{u}_S(\mathbf{R},t)}{\partial\mathbf{R}} = 0. \qquad (54)$$

3.3.2. ***Уравнение Навье – Стокса для сверхтекучего гелия.*** Используем определение (51) средней скорости. Примем во внимание, что релаксация плотности числа сверхтекучей компоненты является быстрой. Это дает основание находить уравнение для сверхтекучей компоненты при условии постоянства величины $\langle n_S\rangle_{\mathbf{R},t}$. Она определяется решением уравнения (19) при всех значениях температуры.

В результате получаем уравнение Навье – Стокса для скрости сверхтекучей компоненты

$$\frac{\partial\mathbf{u}_S}{\partial t} + (\mathbf{u}_S\frac{\partial}{\partial\mathbf{R}})\,\mathbf{u}_S = \frac{\mathbf{F}}{m} + \nu\frac{\partial^2\mathbf{u}_S}{\partial\mathbf{R}^2}, \qquad \mathbf{j}_S(\mathbf{R},t) = \langle n_S\rangle_{\mathbf{R},t}\,\mathbf{u}_S(\mathbf{R},t). \qquad (55)$$

Уравнение движения в явном виде не зависит от температуры. Поток же сверхтекучего гелия через плотность $\langle n_S\rangle_{\mathbf{R},t}$ явно зависит от температуры по уравнению (см. (18)). Здесь предполагается, что кинетические коэффициенты диффузии, кинематической вязкости и теплопроводности одинаковы, то есть $D=\nu=\chi$. Это и дало основание в этом уравнении для замены $D\to\nu$.

При скоростях $\mathbf{u}_S$, много меньших критической скорости $\mathbf{u}_C$, можно пренебречь нелинейным членом. В результате при $\mathbf{F}=0$ приходим к уравнению диффузии для скорости $\mathbf{u}_S$

$$\frac{\partial\mathbf{u}_S}{\partial t} = \nu\,\frac{\partial^2\mathbf{u}_S}{\partial\mathbf{R}^2}, \qquad \mathbf{j}_S(\mathbf{R},t)=\langle n_S\rangle_{\mathbf{R},t}\,\mathbf{u}_S(\mathbf{R},t). \qquad (56)$$

Наличие вязкости должно, казалось бы, препятствовать сверхтекучести. Ситуация аналогичная той, которая имеет место в теории сверхпроводимости. Аналогичным будет и соответствующее объяснение.

4. Безвязкое движение в вязкой среде и фликкер–шум

4.1. ***Фликкер–шум.*** Приведем лишь минимум необходимых сведений из теории фликкер–шума [19, гл. 20].

Фликкер–шум со стороны высоких частот ограничен временем диффузии $\tau_\nu=L^2/\nu$, L– минимальный характерный масштаб образца (здесь это будет диаметр капилляра d).

Область существования фликкер–шума по частотам определяется неравенствами

$$\frac{1}{\tau_{\text{life}}} \le \frac{1}{\tau_{\text{obs}}} << \omega << \frac{1}{\tau_\nu} = \frac{\nu}{d^2}, \qquad (57)$$

где τ_{obs} – время наблюдения, τ_{life} – время жизни установки. В области фликкер–шума имеет место новый масштаб и соответствующий объем

$$L_\omega=(\nu/\omega)^{1/2}>>L,\quad V_\omega=L_\omega^3>>V. \tag{58}$$

Приведем соответствующую цепочку неравенств для объемов

$$V<<V_\omega<<V_{\mathrm{obs}}\le V_{\mathrm{life}}. \tag{59}$$

Равновесный (естественный) фликкер–шум возникает при диффузии в ограниченном объеме. Здесь это диффузия скорости $\mathbf{u}_S$.

Для расчета пространственно–временного спектра флуктуаций скорости $\mathbf{u}_S$ используем ее связь со спектральной плотностью соответствующего источника Ланжевена

$$(\delta\mathbf{u}_S\delta\mathbf{u}_S)_{\omega,\mathbf{k}}=\frac{(\mathbf{yy})_{\omega,\mathbf{k}}}{\omega^2+(\nu k^2)^2},\quad (\mathbf{yy})_{\omega,\mathbf{k}}=2\nu k^2AV_\omega\langle\delta\mathbf{u}_S\delta\mathbf{u}_S\rangle_V\exp\left(-\frac{\nu k^2}{2\omega}\right). \tag{60}$$

Здесь $\langle\delta\mathbf{u}_S\delta\mathbf{u}_S\rangle_V$ – коррелятор флуктуаций, усредненных по объему образца. Постоянный множитель A будет определен ниже из условия нормировки. Из последней формулы следует, что имеет место сильная зависимость от частоты и от волнового числа. При этом дисперсия по волновым числам пропорциональна частоте ω

$$\langle(\delta\mathbf{k})^2\rangle\sim\frac{1}{L_\omega^2}=\frac{\omega}{\nu}, \tag{61}$$

поэтому в области фликкер–шума имеет место своеобразная «бозе–конденсация». Это наличие в области фликкер–шума пространственной когерентности.

В выражении для пространственно–временной спектральной плотности

$$(\delta\mathbf{u}_S\delta\mathbf{u}_S)_{\omega,\mathbf{k}}=\frac{2\nu k^2}{\omega^2+(\nu k^2)^2}AV_\omega\langle\delta\mathbf{u}_S\delta\mathbf{u}_S\rangle_V\exp\left(-\frac{\nu k^2}{2\omega}\right) \tag{62}$$

можно выполнить интегрирование по $\mathbf{k}$. В результате получаем выражение для соответствующей временной спектральной плотности

$$(\delta\mathbf{u}_S\delta\mathbf{u}_S)_\omega=\frac{\pi\langle\delta\mathbf{u}_S\delta\mathbf{u}_S\rangle_V}{\ln(\tau_{\mathrm{life}}/\tau_\nu)}\frac{1}{\omega},\qquad \frac{1}{\tau_{\mathrm{life}}}\le\frac{1}{\tau_{\mathrm{obs}}}<<\omega<<\frac{1}{\tau_\nu}. \tag{63}$$

Постоянный множитель A определен из условия нормировки

$$\int_{1/\tau_{\mathrm{life}}}^{1/\tau_\nu}(\delta\mathbf{u}_S\delta\mathbf{u}_S)_\omega\frac{d\omega}{\pi}=\langle\delta\mathbf{u}_S\delta\mathbf{u}_S\rangle_V. \tag{64}$$

Предполагается, тем самым, что основной вклад в коррелятор $\langle\delta\mathbf{u}_S\delta\mathbf{u}_S\rangle_V$ приходится на область фликкер–шума.

4.2. Временная корреляция. Временная корреляция связана с временной спектральной плотностью соотношением

$$\langle\delta\mathbf{u}_S\delta\mathbf{u}_S\rangle_\tau=\int_{1/\tau_{\mathrm{life}}}^{1/\tau_\nu}(\delta\mathbf{u}_S\delta\mathbf{u}_S)_\omega\frac{d\omega}{\pi}. \tag{65}$$

Отсюда следует, что

$$\langle\delta\mathbf{u}_S\delta\mathbf{u}_S\rangle_\tau=\left(C-\frac{\ln(\tau/\tau_\nu)}{\ln(\tau_{\mathrm{life}}/\tau_\nu)}\right)\langle\delta\mathbf{u}_S\delta\mathbf{u}_S\rangle_V\quad\text{при }\tau_\nu<<\tau<<\tau_{\mathrm{life}},$$

$$C=1-\frac{\gamma}{\ln(\tau_{\mathrm{life}}/\tau_\nu)},\quad \gamma=0.577. \tag{66}$$

Здесь использованы постоянные Эйлера.

В области фликкер–шума зависимость логарифмическая от τ при больших значениях аргумента. Это дает основание говорить о наличии остаточных корреляций.

Характерное время корреляции, не связанное со временем наблюдения, определяется выражением

$$\tau_{cor} = \int_{\tau_D}^{\tau_{life}} \frac{\langle \delta \mathbf{u}_S \delta \mathbf{u}_S \rangle_\tau d\tau}{(\delta \mathbf{u}_S \delta \mathbf{u}_S)_\tau}. \tag{67}$$

В результате находим, что

$$\tau_{cor} \sim \tau_{life} / \ln \frac{\tau_{life}}{\tau_\nu}. \tag{68}$$

Время корреляции при неограниченном времени жизни τ_{life} стремится к бесконечности.

Изложенное в настоящем разделе показывает, что в области фликкер–шума имеет место как пространственная, так и временная когерентность. Это и дает основание для определения связи двух когерентных явлений: фликкер–шума и сверхтекучести.

4.2.1. ***Фликкер–шум и сверхтекучесть.*** Вернемся к уравнению (56) для скорости сверхтекучего гелия. Расчет флуктуаций скорости в области низких частот приводит для пространственно–временной спектральной плотности флуктуаций скорости к выражению (62), а после интегрирования по значениям волнового числа – к формуле (63) для временного спектра флуктуаций сверхтекучей компоненты скорости жидкого гелия.

Для выявления сути явления используем простейшее приближение вида «$1/\tau_{rel}$». В результате для скорости сверхтекучей компоненты получаем релаксационное уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{u}_S}{\partial t} = -\frac{1}{\tau_{rel}} \mathbf{u}_S. \tag{69}$$

Поскольку время релаксации порядка времени жизни установки, то в нулевом приближении по безразмерному параметру

$$\frac{\tau_{obs}}{\tau_{life}} \quad \text{при } \tau_{life} >> \tau_{obs} >> \tau_D \tag{70}$$

в уравнении (69) можно пренебречь диссипацией. Приходим, таким образом, к уравнению

$$\partial \mathbf{u}_S / \partial t = 0, \quad \mathbf{u}_S = \text{const}. \tag{71}$$

Величина постоянной скорости определяется граничными условиями на концах капилляра, например, перепадом плотности.

Оценим время диффузии τ_ν. Оно определяет верхнюю по частотам границу области фликкер–шума: $\omega_{max} \sim 1/\tau_\nu$. Диаметр капилляра в опытах Капицы порядка 10^{-4}–10^{-5} см. Коэффициент диффузии D можно оценить по одной из двух формул: $\hbar/2m^*$ или $v_T l$ (l – эффективная длина свободного пробега атомов гелия). Из них следует, что коэффициент вязкости $\nu \sim 10^{-3} - 10^{-4}$ см/с^2. Таким образом, нижняя граница значений времени наблюдения фликкер–шума и сверхтекучести

$$(\tau_{obs})_{min} \geq \tau_\nu = d^2/\nu \sim 10^{-5} - 10^{-6}\,\text{с}. \tag{72}$$

Обратимся к определению понятия «сверхтекучесть – безвязке течение в вязкой среде».

Одно из определений этого понятия – «измерительное». Оно связано с временем наблюдения. За пределами времени наблюдения нельзя гарантировать постоянство скорости сверхтекучей компоненты.

Однако, поскольку по мере увеличения времени наблюдения не удается обнаружить уменьшения скорости, то естественно предположить, что постоянство скорости имеет место в пределах наибольшего временного интервала τ_{life}, то есть «времени жизни» установки.

Заключение

Термодинамика гелия II. Основным вопросом является выяснение физической природы фазового перехода через критическую точку, «λ–точку».

В статье получены аргументы в пользу представления перехода в сверхтекучее состояние по аналогии с фазовым переходом второго рода в сегнетоэлектриках, с переходом через критическую точку в системе Ван дер Ваальса, с фазовым переходом расслоения в бинарном жидком растворе.

Основой термодинамического описания служит феноменологическая стационарная модель теории сверхпроводимости Гинзбурга – Ландау. Для описания гелия II она использована в работах В. Гинзбурга и А. Собянина [20].

На основе приведенных выше кинетических уравнений показано, что для пространственно однородных состояний (k=0), когда диффузионные процессы «выпадают», при температурах $T<T_C$ существуют два вида релаксационных и флуктуационных процессов: быстрые и медленные.

Для быстрых процессов радиус корреляции и изотермическая сжимаемость при приближении к критической точке «сверху» растут по закону Кюри, но в самой критической точки имеют конечные значения! При удалении от критической точке «вниз» радиус корреляции снова становится порядка среднего расстояния между атомами. По этой причине быстрые флуктуации не могут обеспечить когерентность несимметричной фазы на макроскопических масштабах.

Напротив, медленные флуктуации при $T<T_C$ становятся макроскопическими. Соответствующие радиусы корреляции больше диаметра капилляров. Обеспечивается, тем самым, пространственная когерентность сверхтекучей компоненты в опытах Капицы.

Гидродинамика гелия II. При гидродинамических течениях гелий становится пространственно неоднородным и необходимо объяснить, почему пространственная диффузия – вязкое трение – не нарушает когерентность медленных флуктуаций, определяемых лишь реакционными вкладами.

Показано, что безвязкое – сверхтекучее – движение в вязкой среде возможно благодаря возникновению на низких частотах когерентного распределения по волновым числам. При этом дисперсия распределения по волновым числам пропорциональна частоте. Это приводит к перестройке гидродинамической диссипации – в уравнениях для компонент Фурье происходит замена гидродинамического трения $\nu k^2 \to \omega$. Соответственно этому возникают «остаточные» (долгоживущие) временные корреляции, ограниченные по длительности лишь временем жизни установки.

Благодаря этому открывается новая возможность физической трактовки двухжидкостной модели, введенной в работах Л. Тиссы и Л. Ландау. Выделение двух движений возможно лишь в линейном приближении. Приэтом нормальное движение описывается уравнением Навье – Стокса. Характерные частоты спекра флуктуаций и процесса релаксации определяются вязкостью $\omega \sim \nu k^2$. Характерные частоты сверхтекучего движения лежат в области фликкер–шума. Нижняя граница области частот определяется обратным временем жизни установки. Это дает основание говорить о безвязком течении. Разделение на два независимых течения возможно лишь в линейном приближении. Сверхтекучее течение нарушается, когда оно начинает порождать вихревое движение нормальной компоненты. Соответствующая наибольшая скорость безвязкого течения, критическая скорость, $u_C \sim \hbar/md$. Это согласуется с известной оценкой критической скорости [13].

Можно надеяться, что представленная в этой статье физическая трактовка сверхтекучести, в частности двухжидкостной модели, позволяет лучше понять сущность явления сверхтекучести, открытого П. Капицей и детально исследованного им в ряде замечательных работ.

Библиографический список

1. *Кеезом В.* Гелий. М.: ИЛ, 1949.

2. *Капица П.Л.* Вязкость жидкого гелия при температурах ниже точки λ // ДАН СССР. 1938. Т. 18. С. 21; Nature. 1938.Vol. 141. P. 74.

3. *Капица П.Л.* Исследование теплопереноса в гелии II // ЖЭТФ. 1941.Т. 11. С. 1.

4. *Капица П.Л.* Теплоперенос и сверхтекучесть гелия II // ЖЭТФ. 1941. Т. 11. С. 581.

5. *Капица П.Л.* О сверхтекучести жидкого гелия II // УФН. 1944. Т. 20. С.2.

6. *Tisza L.* // Nature. 1938. Vol. 171. P. 913; Journ.Phys.Rad. 1940. Vol. 1(8) P. 913.

7. *Ландау Л.Д.* Теория сверхтекучести гелия II // ЖЭТФ. 1941. Т. 11. С.592.

8. *Ландау Л.Д.* К гидродинамике гелия II // ЖЭТФ. 1944. Т. 14. С. 112.

9. *Андроникашвили Э.Л.* // ЖЭТФ. 1940. Т. 18. С. 424.

10. *Боголюбов Н.Н.* К теории сверхтекучести // Изв. АН СССР. Сер.физ. 1947. Т. 11. С. 77.

11. *London F.* Superfluids. Vol. I. Superconductivity. NY: Wiley, 1954.

12. *Feynman R.P.* Application of quantum mechanics to liquid helium. In Progress in low temperature physics. Vol. 1 // Ed. C.J.Gorter. NY: 1955.

13. *Фейнман Р.* Статистическая механика. М.: «Мир», 1974.

14. *Боголюбов Н.Н., Зубарев Д.Н.* // ЖЭТФ. 1955. Т. 28. С. 131.

15. *Климонтович Ю.Л., Силин В.П.* О спектрах систем взаимодействующих частиц // ЖЭТФ. 1952. Т. 23. С. 151; *Климонтович Ю.Л., Силин В.П.* О спектрах систем взаимодействующих частиц и коллективных потерях при прохождении заряженных частиц через вещество // УФН. 1960. Т. 70. С. 247.

16. *Климонтович Ю.Л.* Статистическая физика. М.: Наука, 1982; NY: Harwood Academic Publisher, 1986.

17. *Гинзбург В.Л., Ландау Л.Д.* К теории сверхпроводимости // ЖЭТФ. 1950. Т. 20. С. 106.

18. *Климонтович Ю.Л.* Статистическая теория открытых систем. М.: Янус-К, 1999. Т. 2.

19. *Климонтович Ю.Л.* Статистическая теория открытых систем. М.: «Янус», 1995.Т. 1.

20. *Гинзбург В.Л., Собянин А.А.* Сверхтекучесть гелия II // УФН. 1976. Т. 120. С. 153.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию 01. 11. 2000

SUPERFLUIDITY - VISCOUSLESS FLOW IN VISCOUS MEDIUM

Yu.L. Klimontovich

Despite of remarkable successes the theory of superfluidity, until now we have no a physical explanation of an opportunity of existence of viscousless flow of liquid helium in viscous medium. The existence of superfluid flow becomes possible due to occurence of flicker noise and appropriate residual temporary correlations of the superfluid velocity fluctuations.