

Изв. вузов «ПНД», т. 12, № 6, 2004

УДК 517.938; 523.98

## ВРЕМЕННЫЕ РЯДЫ ИЗ ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОГО ХАОСА\*

Н.Г. Макаренко

В работе рассматриваются методы преобразования геометрии и топологии 2D-паттернов в скалярные временные ряды на основе формализма математической морфологии и вычислительной топологии. Методы иллюстрируются на примере динамики магнитного поля Солнца.

Подходите к вашим задачам с правильного конца и начинайте с ответов. Тогда в один прекрасный день вы, возможно, найдете правильный вопрос.

*P. van Гулик. «Отшельник  
в журнальных перьях»*

### Введение

Наиболее удачная попытка решения обратной задачи – получения модели *непосредственно из данных* принадлежала Иоганну Кеплеру из Вюртенберга (1571–1630). Три знаменитых закона эллиптического движения планет были получены им в результате чудовищных по объему ручных вычислений, проделанных над наблюдениями пражского астронома Тихо Браге (1546–1601). Модель Кеплера – не только замечательный пример получения *явных знаний из таблиц данных*. Она имела предсказательные возможности, реализованные в так называемых *Рудольфовых таблицах* – наперед рассчитанных эфемеридах нескольких планет.

Исторический контекст современных подходов к реконструкции модели из наблюдений можно найти в известной аллегории *пещеры Платона* [1]. В VII главе

\*Статья написана по материалам доклада на VII Международной школе «Хаотические автоколебания и образование структур», 1–6 октября 2004, Саратов, Россия

трактата «Государство» Платон описал узников, которые видят в отблесках костра на стенах пещеры лишь тени внешнего мира, по которым они и должны восстановить реальность. Эвристическая реконструкция аттрактора из скалярных временных рядов, которые рассматривались как типичные «течения» фазовой траектории на первую координату, была предложена в 1980-м группой *Паккарда* [2]. Формализм появился год спустя, когда *Такенс* [3] обобщил теорему Уитни о вложении дифференцируемых многообразий в  $R^n$  на динамические потоки и каскады. Предположим, что для динамической системы  $\varphi^t(x) : M \rightarrow M$  на некотором компактном  $n$ -мерном многообразии  $M$  определена наблюдаемая<sup>1</sup> как непрерывная нелинейная функция фазовой точки  $h(x(t)) : M \rightarrow R$  и выполняется *Кредо идеального экспериментатора* [4]. Тогда теорема Такенса [3, 5] утверждает, что отображение  $\Phi : M \rightarrow R^{2n+1}$  запаздывающих координат

$$\Phi(x) = (h(x), h(\varphi^t(x)), \dots, h(\varphi^{2n+1}(x))) \quad (1)$$

– вложение в  $R^{2n+1}$  с точностью до предположения о типичности. Полученный образ будет диффеоморфной копией реального аттрактора и наследует все его динамические характеристики [6]. Копия содержит даже топологию аттрактора, поскольку существует связь между структурой множества  $C(h) = \{x \in M | dh(x) = 0\}$  критических точек функции  $h$  и топологией многообразия  $M$  [7].

Новый способ построения модели из наблюдаемого сигнала называют эмбедологией, как производное от английского слова *embedding* – вложение [5, 8]. Техническая сторона эмбедологии основана на богатом арсенале разработанных *ad hoc* методов для численных оценок динамических инвариантов аттрактора [9-13] и его гомологий [14]. На базе алгоритма Такенса возникли новые нелинейные методы анализа временных рядов [15, 16] и многомерная техника их прогноза [17-19]. Существенным ограничением является, однако, то обстоятельство, что эмбедология адаптирована к точечному источнику сигнала, динамика которого не зависит от пространственной сложности.

Хаотические сценарии распределенных динамических систем принято называть пространственно-временным хаосом [20-22]. При экспериментальном анализе такого хаоса приходится иметь дело с двумя видами сложности: временной и пространственной. Последняя кодируется геометрией и топологией пространственной структуры системы. Проекциями такой динамики в «Мир Экспериментатора» являются мгновенные снимки (*snapshots*), то есть матричные данные, такие как фотографические и цифровые изображения, сцены или карты. В качестве сориентированного термина такого разнообразия удобно использовать термин *паттерн*.

Немногочисленные попытки прямого обобщения эмбедологии на матричные данные [22, 23] привели к интересным результатам. Для последовательности мгновенных снимков пространственного поля скоростей динамической системы градиентного типа определялась фрактальная размерность в матричном пространстве вложений. Оказалось, что снимкам с ламинарным режимом соответствует целочислен-

<sup>1</sup> То есть сигнал или реализация – то, что наблюдается. В общем случае, может зависеть от параметров, так что может и не наблюдаться при некоторых их значениях. Чтобы избежать катастроф при проекции, предположим, что наблюдаемая является гладкой функцией Морса, то есть ее критические точки изолированы и невырождены.

ная размерность, а снимки, предшествующие бифуркациям, описываются ее дробными значениями [22]. К сожалению, «матричная эмбедология» связана с огромным объемом вычислений. Однако существует другая возможность. Комфорт скалярной эмбедологии можно сохранить, если преобразовать геометрию и топологию паттерна в скалярные величины. Это можно сделать с помощью некоторых дескрипторов, определенных на изображении. Их можно найти в методах математической морфологии и вычислительной топологии.

### Математическая морфология и геометрия случайных полей

Пусть  $K \in R^d$  – выпуклое замкнутое ограниченное множество<sup>2</sup> и  $B_\varepsilon(x)$  – замкнутый шар с центром в  $x$  и радиусом  $\varepsilon$ . Тогда тело  $K_\varepsilon$ , *параллельное*  $K$  на расстоянии  $\varepsilon$ , определяется как объединение шаров

$$K_\varepsilon = \bigcup_{x \in K} B_\varepsilon(x). \quad (2)$$

Очевидно, что  $K_\varepsilon$  состоит из всех точек  $K$  и точек,  $\varepsilon$ -близких к его границе  $\partial K$ .  $K_\varepsilon$  называют часто *дилатацией* или «раздуванием»  $K$ . Объем параллельного тела дается *формулой Штейнера* [24, 25] как точный полином по степеням  $\varepsilon$

$$Vol K_\varepsilon = \sum_{i=0}^d \binom{d}{i} W_i \varepsilon^i. \quad (3)$$

Коэффициенты  $W_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, d$  называют *функционалами Минковского*. Пусть, например,  $K$  – квадрат со стороной  $a$ . Тогда

$$Vol K_\varepsilon = a^2 + 4a\varepsilon + \pi\varepsilon^2 = F(K) + P(K)\varepsilon + \pi\varepsilon^2,$$

где  $F$  и  $P$  – площадь и периметр  $K$ ; последний коэффициент с точностью до  $\pi$  равен *характеристике Эйлера*  $\chi(K) = 1$ , которая определена ниже.

В общем случае рассмотрим класс  $\mathbf{B}$  подмножеств  $\{A\} \in R^d$ , которые можно представить как *конечное* объединение компактных, выпуклых подмножеств, и пусть пустое множество  $\emptyset \in \mathbf{B}$ . Определим функционал  $\chi : \mathbf{B} \rightarrow R$  соотношениями

$$\chi(A) = \begin{cases} 1, & A \neq \emptyset \\ 0, & A = \emptyset \end{cases} \quad \text{для выпуклого } A \text{ и} \quad (4)$$

$$\forall A, B \in \mathbf{B}, \quad \chi(A \cup B) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B),$$

где вторая строка (4) выражает свойство аддитивности  $\chi$ . *Функционалы Минковского*  $W_\alpha$  над  $\mathbf{B}$  определяются как интегралы [25]

$$W_\alpha(A) = \int \chi(A \cap E_\alpha) d\mu[E_\alpha], \quad \alpha = 0, \dots, d-1; \quad W_d(A) = \omega_d(1) \chi(A), \quad (5)$$

где  $\omega_d(1) = \pi^{d/2} / [\Gamma(d/2 + 1)]$  – объем  $d$ -мерного единичного шара<sup>3</sup>,  $E_\alpha$  –  $\alpha$ -мерная гиперплоскость в  $R^d$ . Символом  $d\mu[E_\alpha]$  обозначена плотность геометрической меры:

<sup>2</sup>Такое множество называют *компактом*.

<sup>3</sup>Например, для  $d = 1, 2, 3$  имеем  $\omega_1(1) = 2$ ;  $\omega_2(1) = \pi$ ;  $\omega_3(1) = 4\pi/3$ , соответственно.

$\alpha = 0, 1, 2$  соответствует случайным точкам, линиям и плоскостям. Мера  $\int d\mu [E_\alpha]$  инвариантна относительно группы  $G$  твердотельных движений<sup>4</sup>, поэтому ее плотность называют *кинематической* [26]. Она нормирована так, что для шара  $\omega_d(r)$  с радиусом  $r$

$$W_\alpha(\omega_d(r)) = \omega_d(1) r^{d-\alpha}.$$

Согласно (5) в  $R^d$  существует  $d+1$  функционал.

Рассмотрим бинарное изображение  $I(x, y) = [0 \wedge 1]$ ,  $x, y \in Z^2$ , образованное черными ( $I = 0$ ) или белыми ( $I = 1$ ) пикселями на квадратной решетке  $Z^2 \in R^2$ . Для любого кластера  $A \subseteq I(x, y)$ , согласно (5),  $W_2(A) = \pi\chi(A)$ , где  $\chi(A)$  определяется согласно (4) и называется *характеристикой Эйлера*  $A$ . Легко убедиться, что  $\chi$  не меняется при гомотопиях  $A$ .

Для  $W_0(A)$  гиперплоскость  $E_\alpha$  вырождается в точку  $E_0 = \mathbf{x} \equiv (x, y)$ ; выражение  $\chi(A \cap \mathbf{x}) = 1$  для любой  $\mathbf{x} \in A$ , и равно нулю в противном случае. Плотность меры случайных точек на плоскости определяется бивектором  $d\mu[E_0] = dx \wedge dy$ , где внешнее умножение  $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$  автоматически учитывает якобиан при изменении координат, в отличие от обычного  $-dxdy$ . Таким образом,  $W_0(A)$  – *Лебегова мера точек* в  $A$ , то есть его площадь  $F(A)$ :

$$W_0(A) = \int \chi(A \cap E_0) d\mu(E_0) = \int_A dx \wedge dy = F(A). \quad (6)$$

Наконец,  $W_1(A) = \int \chi(A \cap E_1) d\mu(E_1)$ , где  $E_1$  – случайная прямая в  $R^2$ . Нам необходима кинематическая плотность случайных прямых на плоскости, пересекающих  $A$ . Введем подходящую систему координат, определив любую прямую в  $R^2$  парой  $(p, \phi)$ , где  $p$  – длина нормали, опущенной в начало координат, и  $\phi$  – угол между нормалью и положительным направлением оси  $x$ . Можно показать [26], что  $d\mu(E_1) = dp \wedge d\phi$  – инвариант относительно группы  $G$ . Поэтому

$$W_1(A) = \int \chi(A \cap E_1) dp \wedge d\phi = \int_{A \cap E_1} dp \wedge d\phi = \int_0^{2\pi} p d\phi = P(A), \quad (7)$$

где  $P(A)$  – периметр области  $A$ . Таким образом, все функционалы Минковского имеют простой геометрический смысл: это периметр, площадь и связность бинарного изображения. Кроме того,  $W_i$  обладают *морфологическими свойствами*: они аддитивны, инвариантны относительно группы  $G$ , непрерывны в метрике Хаусдорфа [24, 25]. Интересно, что два первых функционала можно выразить через  $W_2(A) \sim \chi(A)$ .

Пусть  $A$  – геометрическое тело в  $R^2$  с кусочно-гладкой границей  $\partial A$ ;  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  – внешние углы в вершинах линейных участков  $\partial A$ ;  $ds$  – элемент длины дуги и  $k$  – ее кривизна. Тогда локальные ( $k$ ) и глобальные ( $\chi$ ) свойства  $A$  связаны *теоремой Гаусса – Бонне* [27]:

$$\sum_{i=1}^n (\pi - \alpha_i) + \int_{\partial A} k ds = 2\pi\chi(A). \quad (8)$$

<sup>4</sup>Поскольку группа  $G$  транзитивна, то есть переводит любую точку  $A$  в  $B$ , существует одна инвариантная мера с точностью до масштабной константы. Если группа сильно транзитивна, так что несколько преобразований могут перевести  $A \rightarrow B$ , может случиться, что такой меры нет вообще.

Рассмотрим теперь случай «серого» изображения, где  $I(x, y) \in [a, b]$ . Его легко свести к бинарному варианту, если определить множество уровней<sup>5</sup> высоты  $h$ :  $B_h = \{(x, y) | I = h\}$ ,  $a \leq h \leq b$ , или множество выбросов за уровень  $h$ :  $A_h = \{(x, y) | I \geq h\}$ ,  $a \leq h \leq b$  графика функции  $I(x, y)$ .

В геометрии случайных полей [28]

имеют дело с контурными картами, образованными множествами выбросов  $A_u(F, Z) = \{t | F(t) \geq u\}$  непрерывного случайного поля  $F(t)$ ,  $t \in Z \subset R^N$ ,  $F \in R^M$  за уровень  $u$ . Предположим, что компакт  $Z$  и его граница  $\partial Z$  являются достаточно простыми. Пусть поле  $F(t)$  достаточно регулярно в некотором определенном смысле [28]. На рис. 1, например, множеством  $A_u$  являются серые области;  $\partial Z$ -прямоугольник и  $A_u \cap \partial Z = \emptyset$ . Выберем в качестве основного направления ось ординат  $t_2$ . Будем двигаться вдоль  $t_2$  и изучать точки, в которых  $\partial F / \partial t_2 > 0$  и  $\partial A_u$  имеет горизонтальную касательную. В этих критических точках граница  $\partial A_u$  может быть выпуклой или вогнутой. Припишем каждой «выпуклой» точке границы индекс  $k = 0$ , а «вогнутой» – индекс  $k = 1$ ; пусть  $m_k$  – число точек индекса  $k$ . Тогда дифференциально-топологическая характеристика Эйлера  $\chi_{DT}(A)$  выражается через число критических точек на границах компонент  $\partial A$  [28]:

$$\chi_{DT}(A) = \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k m_k. \quad (9)$$

Для компонент  $A_u$  на рис. 1 существует 5 критических точек. Из них вклад, равный  $(+1)$ , в  $\chi_{DT}$  дают три выпуклые точки  $A, C, D$  с индексом  $k = 0$ , а вклад, равный  $(-1)$ , – две вогнутые точки  $B, E$  с индексом  $k = 1$ . Таким образом, имеем  $\chi_{DT} = 3 - 2 = 1$ .

Другой способ оценки  $\chi$  основан на алгоритме Сеппа [25]. Покроем множество  $A_u$  достаточно регулярного поля квадратной решеткой. Пусть  $V, E, F$  – число узлов, ребер и граней решетки, соответственно, целиком содержащихся в  $A_u$  (см. рис. 1). Тогда, согласно известной формуле Эйлера:  $\chi(A) = V - E + F$ .

Описанная техника является основной в морфологическом анализе изображений [24, 25] и геометрии случайных полей [28-31]. Функционалы  $W_i$  можно вычислить, например, в *Image Processing Toolbox* пакета *MatLab*. Оператор дилатации [24, 25, 32], который используется для получения параллельного тела, позволяет вычислить для изображения еще один полезный скаляр. Он связан со скейлинговыми свойствами паттерна и называется *размерностью Минковского – Булигана* [33].

Рассмотрим кривую  $\Gamma$  на плоскости и  $\forall x \in \Gamma$ , определим открытый диск радиусом  $\varepsilon$  с центром в точке  $x$ :  $B_\varepsilon(x) = \{y | \|x - y\| < \varepsilon\}$ . Тогда  $\varepsilon$ -покрытием или *шарфом Минковского* называется множество точек  $\Gamma(\varepsilon) = \{y | y \in B_\varepsilon(x), x \in \Gamma\}$ . Пусть  $\mu(\Gamma(\varepsilon))$  – Лебегова мера  $\varepsilon$ -покрытия. Тогда *размерность Минковского – Булигана* определяется как скорость изменения  $\mu(\Gamma(\varepsilon))$  при изменении радиуса  $\varepsilon$

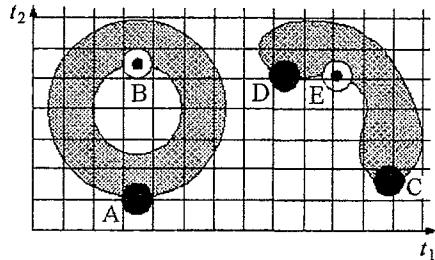


Рис. 1. Пример определения  $\chi_{DT}$  согласно (9)

<sup>5</sup>То есть областей, на которых изображение имеет «тональность» окраски  $I(x, y) = h$ .

$$d_M = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{2 - \log \mu(\Gamma(\varepsilon)) / \log \varepsilon\} \quad (10)$$

и является одной из множества фрактальных размерностей [33, 34]. Для компактов дилатация получается лишь за счет граничных точек, вдоль которых «прокатываются» диски. При работе с цифровыми изображениями возникает проблема выбора *дискретно-непрерывной последовательности* [32] радиусов на ортогональной решетке  $Z_2$ . Введенная в [35] концепция *точной дилатации*, основанная на точном решении *уравнения эйконала* из геометрической оптики, позволяет избежать проблемы искажения расстояний и определить подходящее множество радиусов. При этом граница области дилатации растет с постоянной скоростью вдоль нормали к границе множества.

Морфологический анализ позволяет описать геометрию паттерна. Однако одной и той же геометрии могут соответствовать совершенно различные топологии. Так, два фрактала могут иметь одинаковую *бокс-размерность* [33, 34], но отличаться «пористостью», то есть числом «дыр». Методы вычислительной топологии [36-38] дополняют морфологический анализ в том смысле, что позволяют описывать «форму» изображения и его области, в которых мера отсутствует.

### Вычислительная топология

Наиболее простой способ изучения топологии изображения заключается в простом приеме: оценке изменения связности паттерна, то есть числа его отдельных компонент при изменении разрешения. Для этого необходимо формализовать понятие *разделимости* фрагментов. Топологическое пространство<sup>6</sup>  $X$  называют *связным*, если оно не может быть разложено на объединение двух непустых, несвязных и замкнутых множеств [39]. Если  $X$  *несвязно*, то существуют два замкнутых множества  $U$  и  $V$  таких, что  $U \cap V = \emptyset$  и  $U \cup V = X$ . Это понятие было адаптировано Робинс [40, 41] для использования в компьютерном эксперименте, где всегда приходится иметь дело с конечным разрешением  $\varepsilon$ . Основная идея, восходящая к Кантору<sup>7</sup>, заключается в определении некоторых свойств паттерна, меняющихся при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Подмножество  $X$  метрического пространства с метрикой  $d$  называется  *$\varepsilon$ -несвязным*, когда оно может быть разложено на два множества, *которые разделены расстоянием, по меньшей мере, равным  $\varepsilon$* . Формально существуют два замкнутых подмножества  $U$  и  $V$  такие, что  $U \cup V = X$  и

$$d(U, V) = \inf_{x \in U, y \in V} d(x, y) > \varepsilon. \quad (11)$$

В противном случае  $X$  является  *$\varepsilon$ -связным*. При заданном разрешении  $\varepsilon$ ,  $X$  имеет обычное разбиение в виде несвязного объединения его  $\varepsilon$ -компонент. Основной вопрос заключается в том, какую информацию о связности множества  $X$  несет изменение несвязности разбиения при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Пусть  $C(\varepsilon)$  – число  $\varepsilon$ -компонент множества.

<sup>6</sup>Грубо говоря, топологическим пространством называют множество объектов, снабженное понятием *окрестности* или *близости*.

<sup>7</sup>По Кантору,  $X$  связно, если любые его две точки могут быть связаны с помощью  $\varepsilon$ -цепи, то есть последовательности точек  $x_0, \dots, x_n$ , таких что  $d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$  для  $i = 1, \dots, n$ .

Определим величину, которую называют *индексом несвязности* [40], как

$$\gamma = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log C(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)}. \quad (12)$$

Для самоподобного фрактала  $\gamma$  совпадает с его бокс-размерностью. В [40, 41] используется подсчет компонент связности, основанный на так называемом минимальном натянутом дереве – МОД. Этот граф не содержит циклов и соединяет конечное множество точек так, что суммарная длина всех его ребер минимальна [42, 43]. Если упорядочить длины ветвей МОД по возрастанию, то удаление ветвей с фиксированным значением  $\varepsilon$  разбивает точки на  $\varepsilon$ -несвязные компоненты (кластеры).

Дальнейшую информацию о топологии паттернов можно получить методами алгебраической топологии [36-38, 43-46]. В наиболее общей постановке, пусть  $X$  – топологическое или метрическое *пространство скрытых параметров*,  $R^D$  – *пространство наблюдателя* и  $f : X \rightarrow R^D$  – вложение. Пусть, например,  $U \subset X$  – конечное множество точек окружности  $X$ , выбранных случайно, и  $Y = f(U) \subset R^2$  – его образ, наблюдаемый на дисплее компьютера. Какие свойства  $X$  наследуются в его конечно-точечном приближении  $Y$ ? Как следует соединить точки  $Y$ , чтобы полученная структура сохраняла форму  $X$  или, точнее, его гомологии [44, 45]? Однако эта тема превышает возможности одной статьи. Вместо этого полезно показать, как работают уже описанные выше методы на примере реальной физической системы.

### Морфология и топология глобального магнитного поля Солнца

Наиболее известным проявлением детерминизма в солнечной активности является циклическое изменение числа солнечных пятен с периодом около 11 лет, установленное в 1843 году астрономом-любителем *Генрихом фон Швабе*, с 1848 года регистрируемое так называемыми *числами Вольфа* [47]. Кроме 11-летней цикличности (закон *Швабе – Вольфа*) наблюдается пространственное изменение количества пятен в течение каждого цикла по гелиоширотам, описываемое *законом Шлэрера*. Следующей важной характеристикой солнечной активности является *закон Хэйла*, который в 1908 г. установил, что солнечные пятна обладают сильными магнитными полями<sup>8</sup>. Пятна обычно образуют биполярные группы, в которых ведущие, по вращению Солнца, *p*-пятна в северном полушарии имеют полярность северного полюса Солнца до его *переполюсовки*<sup>9</sup> в период максимума 11-летнего цикла, а ведомые *f*-пятна имеют полярность южного полюса. В южном полушарии порядок полярности *p*- и *f*-пятен – обратный. Эта ситуация сохраняется в течение 11 лет и меняется на обратную в следующем цикле, так что через каждые 22 года порядок полярности повторяется.

Крупномасштабные структуры (с пространственным разрешением более  $5^\circ$ ) принято называть *глобальным* или *фоновым* магнитным полем Солнца. Динамика для этих масштабов проявляется в распределении униполярных областей, которые эволюционируют в течение приблизительно 11 лет [49]. Нейтральные магнитные линии, разделяющие эти области, изображают в форме так называемых *H<sub>a</sub>* синоптиче-

<sup>8</sup>Общий магнитный поток в пятнах достигает  $10^{21}$  максвелл.

<sup>9</sup>Инверсии знака глобального магнитного поля [48].

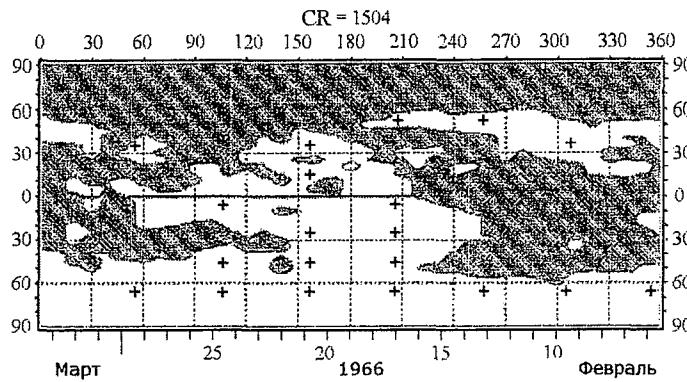


Рис. 2. Синоптическая  $H_\alpha$  магнитная карта Солнца для CR1504.  $N$ -полярность показана серым

ских карт, которые показывают топографию распределения знака фонового магнитного поля, усредненного на масштабе одного кэррингтоновского оборота<sup>10</sup>, в цилиндрической проекции (рис. 2). Последовательность таких карт покрывает интервал времени 1915–2002 гг. [50]. Магнитограммы, содержащие топографию радиальной компоненты магнитного поля, существуют<sup>11</sup> с 1976 г. Синоптические карты отображают реальные структуры, по меньшей мере, гомеоморфно, так что топологические свойства сохраняются. Именно поэтому они интересны для приложения описанных выше методов [43, 51–53].

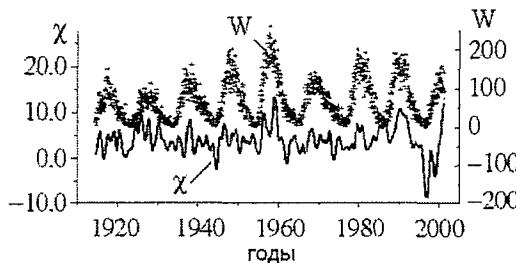


Рис. 3. Сравнение поведения сглаженных значений Эйлеровой характеристики  $\chi$  с числами Вольфа  $W$  для CR 815 (1972)

функционалов сглаживались. На рис. 3 в качестве примера приведен график характеристики Эйлера  $\chi$ , вычисленной для объединенной выборки магнитограмм и  $H_\alpha$ -карт (циклы № 15–23) [53], после сглаживания фильтром Уиттекера<sup>12</sup>, вместе со значениями чисел Вольфа.

Вложение этих двух временных рядов в  $R^3$  показано на рис. 4. Фазовые портреты по пятнам и глобальному полю существенно различаются. Для реконструкции по  $\chi$  оценки корреляционной размерности  $v$  и  $K$  – энтропии с использованием Гауссовского ядра [54] дали  $v = 2.309 \pm 0.023$ ,  $K = 0.06 \text{ bit/CR}$ . Известные оценки  $v$  для реконструкций по числам Вольфа варьируются в пределах  $v \approx 2.1 \dots 3.5$  [55, 56]. Размерность Минковского – Булигана  $d_M$ , вычисленная для трех солнечных циклов и показанная на рис. 5, меняется в диапазоне [1.17 … 1.37].

Для оценок морфологических характеристик использовались два типа карт. Для магнитограмм функционалы  $W_i$ ,  $i = 0, 1, 2$  оценивались для сечения, которое соответствовало линии разделя полярности. Любая пара смежных карт не согласована по геометрии нейтральной линии: напомним, что карты отображают долгоживущие структуры, усредненные во временном окне одного CR. Поэтому полученные временные ряды

в качестве примера приведен график характеристики Эйлера  $\chi$ , вычисленной для объединенной выборки магнитограмм и  $H_\alpha$ -карт (циклы № 15–23) [53], после сглаживания фильтром Уиттекера<sup>12</sup>, вместе со значениями чисел Вольфа.

<sup>10</sup>Один кэррингтоновский оборот – 1CR  $\approx 27$  дней.

<sup>11</sup>Wilcox Solar Observatory Synoptic Charts: <http://quake.stanford.edu/~wso/synoptic.html>

<sup>12</sup>Этот фильтр сохраняет статистические моменты до второго порядка.

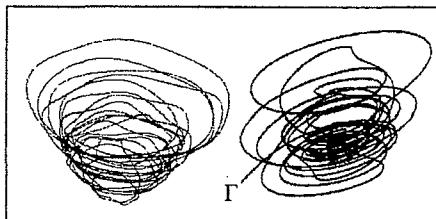


Рис. 4. Вложения в  $R^3$  временного ряда чисел Вольфа (слева) и  $\chi$  (справа)

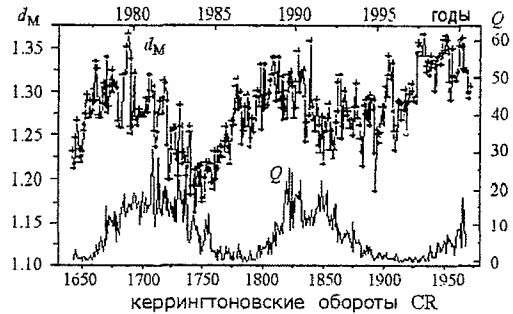


Рис. 5. Сравнение поведения ежемесячных значений вспышечного индекса  $Q$  и размерности Минковского  $d_M$

Нижний график на рис. 5 показывает изменение так называемого вспышечного индекса  $Q$ , который был введен чешским астрономом Я. Клечеком в 1957 г. Этот индекс приближенно характеризует общую энергию, излучаемую вспышками по всему спектру наблюдаемого электромагнитного излучения (от радиоволн до рентгеновских и гамма лучей) за день<sup>13</sup>. Максимальная корреляция между двумя кривыми наблюдается при сдвиге  $d_M$  вперед приблизительно на 12CR. Таким образом, изменению вспышечной активности предшествует перестройка геометрии нейтральной линии [57].

Размерность  $d_M$  не единственная фрактальная характеристика, которую можно получить из синоптических карт. Оказывается, все морфологические функционалы демонстрируют мультифрактальный скейлинг. Мультифрактальные свойства мелкозернистого магнитного поля Солнца были обнаружены впервые по магнитограммам малых областей, полученным с высоким разрешением [58]. Оказалось, что сингулярная мера присутствует и для крупномасштабного поля.

Будем рассматривать график функции как некоторую меру. Ее можно определить либо как нормированную сумму ординат в некотором интервале или боксе  $C_\delta$  размером  $\delta$ , либо как вариацию графика в этом боксе. Пусть  $C = \{C_\delta\}$  – множество всех таких боксов. Определим *крупнозернистый гельдеровский показатель меры* в боксе выражением [59]

$$\alpha(C_\delta) = \frac{\log \mu(C_\delta)}{\log \delta}. \quad (13)$$

Пусть  $N_\delta(\alpha, \varepsilon) = \#\{C_\delta : \alpha(C_\delta) \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)\}$ , где  $(\#)$  – число непустых боксов, содержащих меру с показателем  $\alpha \pm \varepsilon$ . Тогда *крупнозернистый мультифрактальный спектр больших отклонений* определяется выражением [58]

$$f_g(\alpha) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup \frac{\log N_\delta(\alpha, \varepsilon)}{\log(1/\delta)}. \quad (14)$$

На рис. 6 приведен пример такого спектра для  $\chi$ . Асимметричная форма спектра на рисунке, возможно, связана с существованием двух различных мер<sup>14</sup>.

<sup>13</sup>На графике приведены ежемесячные значения  $Q$  из базы данных <http://www.koeri.boun.edu.tr/astromony/>

<sup>14</sup>Лежандровский мультифрактальный спектр [33] не позволяет выявить такие детали – он всегда является выпуклой кривой.

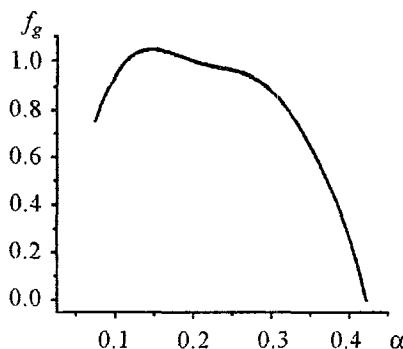


Рис. 6. Спектр больших отклонений для временного ряда  $\chi$

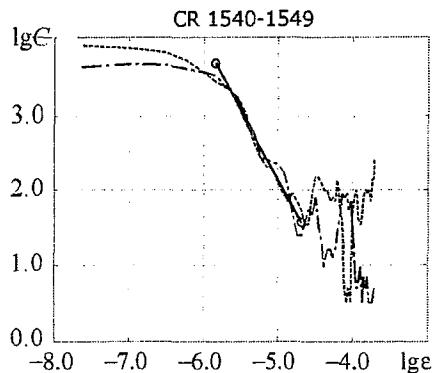


Рис. 7. Определение индексов несвязности  $\gamma_{(+)} = 1.8$  и  $\gamma_{(-)} = 2.0$  полей разной полярности для кортежа с переполюсовкой: CR1540 – CR1549

Индекс несвязности (12) вычислялся отдельно для областей северной  $\gamma_{(+)}$  и южной  $\gamma_{(-)}$  полярностей по кортежам, образованным «склейкой» десяти  $H_\alpha$ -карт, как наклон зависимости числа несвязных областей  $C$  от  $\epsilon$  по графику, построенному в двойном логарифмическом масштабе. Оказалось, что для кортежей, содержащих переполюсовки глобального поля, существует хорошо выраженный скейлинговый участок, общий для обеих полярностей (рис. 7). Наклон прямолинейного участка меняется в диапазоне от  $\gamma_{(+)} = 1.8 \pm 0.1$  до  $\gamma_{(-)} = 2.0 \pm 0.1$ . Для наборов  $H_\alpha$ -карт, не содержащих инверсий глобального поля, прямолинейный участок отсутствует вообще, а кривые  $\lg C$  от  $\lg \epsilon$  расходятся для областей разной полярности. Таким образом, переполюсовки сопровождаются «стиранием» выделенных масштабов для магнитных структур Солнца. Аналогичные эффекты возникают обычно вблизи точек фазовых переходов физических систем и интерпретируются в рамках теории самоорганизующейся критичности [18]. Подтверждение этого результата по магнитограммам имело бы большое значение для физики инверсий магнитного поля Солнца. Дальнейшие результаты, основанные на вычислении гомологий синоптических карт, можно найти в [60].

Приведенные примеры показывают, что «арифметизация» изображений может быть весьма полезна при интеллектуальном анализе матричных данных.

## Библиографический список

1. Платон. Государство // Собр. соч. М., 1971. Т. 3. Ч. 1.
2. Packard N.H., Crutchfield J.P., Farmer J.D., Shaw R.S. Geometry from a time series // Phys. Rev. Lett. 1980. Vol. 45. P. 712-716.
3. Takens F. Detecting strange attractors in turbulence // Lecture Notes in Math. 1981. Vol. 898. P. 366-381.
4. Афраймович В.С., Рейман А.М. Размерности и энтропии в многомерных системах // Нелинейные волны. Динамика и эволюция. М.: Наука, 1989. С. 238-262.
5. Sauer T., Yorke J.A., Casdagli M. Embedology // J. Statist. Phys. 1991. Vol. 65. P. 579-616. URL:<http://math.gmu.edu/~tsauer/>

6. *Eckmann J.P., Ruelle D.* Ergodic theory of chaos and strange attractors // *Rev. Mod. Phys.* 1985. Vol. 57. P. 617-656.
7. *Gilmore R., Lefranc M.* The Topology of Chaos: Alice in Stretch and Squeezeland. Wiley, New York. 2002. 495 p.
8. *Rapp P.E., Shah T.I., Mees A.I.* Models of knowing and the investigation of dynamical systems // *Physica D*. 1999. Vol. 132. P. 133-149.
9. *Grassberger P., Procaccia I.* On the characterization of strange attractors // *Phys. Rev. Lett.* 1983. Vol. 50. P. 346-349.
10. *Parker T.S., Chua L.O.* Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems. Springer, 1989. 348 p.
11. *Ott E., Sauer T., Yorke J.A.* Coping with chaos: Analysis of chaotic data and the exploitation of chaotic systems. John Wiley and Sons. 1994. 432 p.
12. *Schreiber T.* Interdisciplinary application of nonlinear time series methods // *Phys. Rep.* 1999. Vol. 308, № 2. URL:<http://xyz.lanl.gov/chaodyn/980700>.
13. *Small M., Tse C.K.* Optimal embedding: A modelling paradigm // *Physica D*. Vol. 194. 2004. P. 283-296.
14. *Muldoon M., MacKay R.S., Broomhead D.C., Huke J.P.* Topology from time series // *Physica D*. 1993. Vol. 65. P. 1-16.
15. *Lay Ying-Cheng, Ye N.* Recent developments in chaotic time series analysis // *Int. J. Bifurcation and Chaos*. 2003. Vol. 13, № 6. P. 1383-1422.
16. *Ruelle D.* Chaotic evolution and strange attractors // The statistical analysis of time series for deterministic nonlinear systems. Cambridge University Press, 1989.
17. *Farmer J.D., Sidorovich J.J.* Predicting chaotic time series // *Phys. Rev. Lett.* 1987. Vol. 59. P. 845-848.
18. *Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б.* Современные проблемы нелинейной динамики. М.: УРСС, 2002. 358 с.
19. *Макаренко Н.Г.* Эмбедология и нейропрогноз // Лекции по нейроинформатике. Ч. 1, Нейроинформатика-2003, V Всерос. научн.-тех. конф. Москва, 2003. С. 86-148.
20. *Crutchfield J. P., Kaneko K.* Phenomenology of Spatiotemporal Chaos // *Directions in Chaos*, World Scientific. 1987. P. 272-353.
21. *Mayer-Kress G., Kaneko K.* Spatiotemporal Chaos and Noise // *J. Stat. Phys.* 1989. Vol. 54, №5-6. P. 1489-1508.
22. *Рабинович М.И., Фабрикант А.П., Цимринг Л.Ш.* Конечномерный пространственный беспорядок // УФН. 1992. Т. 42. С. 1-42.
23. *Parlitz U., Merkwirth Ch.* Time series Analysis of spatially extended systems // Intern. Symp. on Nonlinear Theory and its Applications NOLTA'98, Crans-Montana, Switzerland, Sept.14-17, 1998. P. 775-778.  
<http://WWW.DPI.Physik.Uni-Goettingen.DE/~ulli/>
24. *Michielsen K., De Raedt H.* Morphological Image Analysis // *Comp. Phys. Commun.* 2000. Vol. 132. P. 94-103.
25. *Serra J.* Image analysis and mathematical morphology. Academ.Press, 1988. 610 p.

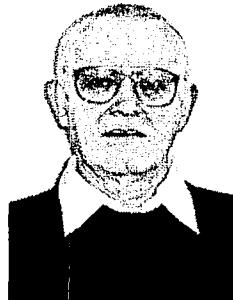
26. Сантало Л. Интегральная геометрия и геометрические вероятности. М.: Наука, 1983. 358 с.
27. Торп Дж. Начальные главы дифференциальной геометрии. М.: Мир, 1982. 360 с.
28. Adler R.J. The geometry of random fields. // J.Wiley & Sons, N.Y., 1981. 280 p.
29. Stoyan D., Kendall W.S., Mecke K. Stochastic Geometry and its applications. J.Wiley & Sons, 1995. 436 p.
30. Worsley K.J. The geometry of random images // Chance. 1996. Vol. 9, № 1. P. 27-40.
31. Worsley K.J. Estimating the number of peaks in a random field using the Hadwiger characteristic of excursion sets, with applications to medical images // Annals of Statistics. 1995. Vol. 23. P. 640-669.
32. Rosenfeld A., Klette R. Digital geometry // Information Sciences. 2002. Vol. 148. P. 123-127. <http://www.tcs.auckland.ac.nz/~rklette/>
33. Falconer K. Fractal geometry. Mathematical foundations and applications. John Wiley & Sons, 1990. 288 p.
34. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. М.: ИКИ, 2002. 654 с.
35. Costa L. da F., Kaye B.H. and Montagnoli C. Accurate Fractal Estimation using Exact Dilations // Electronic Letters. 1999. Vol. 35. P. 1829-1836.
36. Dey T. K., Edelsbrunner H., Guha S. Computational Topology // Advances in Discrete and Computational Geometry / Eds B. Chazelle, J. E. Goodman and R. Pollack. Contemporary Mathematics, AMS, Providence. 1998. <http://www.cse.ohio-state.edu/tamaldey/papers.html>
37. Kaczynski T., Mischaikow T., Mrozek M., Computing Homology // Homology, Homotopy and Applications. 2001. Vol. 5. P. 233-256.
38. Carlsson E., Carlsson G., de Silva V. An algebraic topological method for feature identification // Preprint. August 12, 2003. <http://math.Stanford.EDU/comptop/preprints/>
39. Келли Дж.Л. Общая топология. М.: Наука, 1968. 432 с.
40. Robins V., Meiss J.D., Bradley E. Computing connectedness: Disconnectedness and discreteness // Physica D. 2000. Vol. 139. P. 276-300.
41. Robins V., Meiss J.D., Bradley E. Computing connectedness: An exercise in computational topology // Nonlinearity. 1998. Vol. 11. P. 913-922.
42. Препарата Ф., Шеймос М. Вычислительная геометрия. Введение. М.: Мир, 1989. 478 с.
43. Макаренко Н.Г. Как получить временные ряды из геометрии и топологии пространственных паттернов // Лекции по нейроинформатике. Ч. 2. Нейроинформатика-2004, VI Всерос. науч.-тех. кон. М., 2004. С. 140-199.
44. Шапиро И.С., Ольшанецкий М.А. Лекции по топологии для физиков. Москва-Ижевск: РХД, 2001. 128 с.
45. Robins V. Computational Topology for Point Data: Betti Numbers of Alpha-Shapes // Morphology of Condensed Matter: Physics and Geometry of Spatially Complex Systems, K. Mecke and D. Stoyan (Eds), Lecture Notes in Physics 600, Springer. 2002. P. 261-275.

46. Gameiro M., Kalies W. D., Mischaikow K. Topological Characterization of Spatial Temporal Chaos. <http://www.math.gatech.edu/~mischaik/papers/>
47. Витинский Ю.И., Копецкий М., Куклин Г.В. Статистика пятнообразовательной деятельности Солнца. Москва, 1986. 296 с.
48. Макаров В.И., Тавастшерна К.И. Глобальные особенности процесса солнечной активности // сб. Вариации глобальных характеристик Солнца. Киев, 1992. С. 270-301.
49. Mouradian Z., Soru-Escaut I. On the dynamics of the large-scale magnetic fields of the Sun and the sunspot cycle // Astron. & Astroph. 1991. Vol. 251. P. 649-654.
50. Айманова Г.К., Макаренко Н.Г., Макаров В.И., Тавастшерна К.С. Оценка параметров порядка фоновых магнитных полей Солнца по Н-альфа картам. Период: 1914-1984 // Солнечные данные. 1982, № 2. С. 97-102.
51. Макаренко Н.Г., Каримова Л.М., Макаров В.И., Тавастшерна К.С. Контурная статистика крупномасштабных солнечных полей // сб. Современные проблемы солнечной цикличности. Санкт-Петербург, 1997. С. 139-143.
52. Makarenko N.G., Karimova L.M., Novak M. Dynamics of Solar magnetic fields from Synoptic charts // Emergent Nature. Patterns, Growth and Scaling in the Sciences. World Scientific, 2001. P. 197-207.
53. Макаренко Н.Г. Геометрия и топология случайных полей в физике Солнца // Исследования по геомагнетизму, аэрономии и физике Солнца. 2001. Вып. 113. С. 202-213.
54. Dics C. Estimating invariants of noisy attractors // Phys.Rev. E. 1996. Vol. 53, № 5. P. R4263-R4266.
55. Mundt M.D. Maguire II W.B., Chase R.P.R. Chaos in the sunspot Cycles: analysis and prediction // J.Geophys.Res. Vol.96, № A2. P. 1705-1716.
56. Serre T., Nesme-Ribes E. Nonlinear analysis of solar cycles // Astron. Astrophys. 2000. Vol. 360. P. 319-330.
57. Mordvinov A.V., Salakhutdinova I.I., Plyusnina L.A., Makarenko N.G., Karimova L.M. The topology of background magnetic fields and solar flare activity // Solar Physics. 2002. Vol. 211. P. 241-253.
58. Lawrence J.K., Cadavid A.C., Ruzmaikin A.A. On the multifractal distribution of Solar magnetic fields // Astrophys.J. 1996. Vol. 465. P. 425-435.
59. Riedi R.H. Multifractal Processes // Long range dependence: theory and applications. Eds. Doukhan, Oppenheim and Taqqu, Birkhauser. 2002. P. 625-715.
60. Макаренко Н.Г., Каримова Л. Анализ глобального магнитного поля Солнца методами математической морфологии и вычислительной топологии // Физика Солнца и звезд. Элиста, 2003. С. 1-59.

# TIME SERIES FROM GEOMETRY AND TOPOLOGY OF SPATIO-TEMPORAL CHAOS

*N.G. Makarenko*

The transformation of geometry and topology of 2D patterns into scalar time series with the help of the mathematical morphology and computational topology methods are considered. The approaches are illustrated by the example of the solar magnetic field investigation.



*Макаренко Николай Григорьевич – 1945 года рождения. Окончил Свердловский государственный университет по специальности «астрономия», кандидат физико-математических наук. Ведущий научный сотрудник, руководитель группы в лаборатории компьютерного моделирования Института математики (Алматы, Казахстан). Член правления Российской Ассоциации по нейроинформатике. Область научных интересов: фрактальная геометрия, вычислительная топология, детерминированный хаос, нейронные сети, физика Солнца. Имеет более 50 научных публикаций.*  
E-mail: [chaos@math.kz](mailto:chaos@math.kz)