Изв. вузов «ПНД», т.9, № 4,5, 2001 УДК 517.51+517.52

МЕТОД ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА В ИССЛЕДОВАНИИ УСТОЙЧИВОСТИ И СТАБИЛИЗАЦИИ ДВУМЕРНОГО ИНВАРИАНТНОГО ТОРА

Л.Б.Ряшко

На основе введенной конструкции – тороидально квадратичной функции Ляпунова – вопрос об экспоненциальной устойчивости инвариантного 2–тора нелинейной системы сводится к анализу разрешимости краевой задачи для соответствующего матричного дифференциального уравнения Ляпунова. В связи с некоторым проектором P вводится понятие P–устойчивости линейной системы. При этом P–устойчивость системы первого приближения является необходимым и достаточным условием устойчивости 2–тора. В трехмерном случае матричное дифференциальное уравнение Ляпунова вырождается в скалярное, а его решение сводится к решению некоторого линейного функционального уравнения. Анализ разрешимости этого функционального уравнения приводит к интегральному параметрическому критерию устойчивости. Полученные результаты используются для построения стабилизирующего регулятора.

Разнообразие в поведении нелинейных динамических систем, возникающее при переходе от порядка к хаосу, часто связано с цепью последовательных бифуркаций: стационарный режим (точка покоя) – периодический режим (цикл) – квазипериодический режим (тор) – хаотический режим (странный аттрактор). Каждый такой переход сопровождается потерей устойчивости простого аттрактора и рождением нового, более сложного. Анализ устойчивости соответствующих многообразий является здесь ключевым моментом в понимании механизма сложных явлений нелинейной динамики [1,2]. Если циклы и, тем более, точки покоя являются достаточно подробно исследованными объектами современной теории устойчивости [3,4], то соответствующий анализ тороидальных инвариантных многообразий по многим важным направлениям еще не завершен.

Одним из таких направлений является метод функций Ляпунова (МФЛ). В исследовании устойчивости точки покоя как детерминированных, так и стохастических систем в настоящее время этот метод представляет собой достаточно глубоко разработанную теорию.

Соответствующие аналоги – орбитальные ФЛ – использовались в анализе устойчивости предельных циклов (см. [5] и библиографию к ней). Конструкция орбитальных ФЛ применялась в [6] при построении асимптотического разложения квазипотенциала стохастического нелинейного осциллятора. Метод вращающих ФЛ использовался в [7] для получения достаточных признаков существования периодических решений внутри торов. Общий вариант МФЛ для получения достаточных условий устойчивости торов представлен в [8]. В данной статье разработка МФЛ позволила получить необходимые и достаточные условия экспоненциальной устойчивости двумерных тороидальных многообразий.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(x), \qquad (*)$$

где x – n–мерный вектор, f – достаточно гладкая вектор–функция. Предполагается, что система (*) имеет инвариантное двумерное тороидальное многообразие Г.

Поведение фазовых траекторий на тороидальной поверхности в общем случае может быть весьма сложным. В данной работе предполагается следующее. На Г нет точек покоя. Фазовые траектории системы (*) полностью покрывают тор Г. При этом тороидальная поверхность может целиком составляться как из замкнутых фазовых траекторий-циклов и траекторий к ним сходящихся (периодическая обмотка), так и состоять из семейства незамкнутых траекторий, лежащих всюду плотно на Г (квазипериодическая обмотка).

В формальных построениях будем исходить из возможности следующей параметризации 2–тора Г. Пусть на Г лежит некоторая замкнутая достаточно гладкая кривая α (экватор), задаваемая функцией $\alpha(s)$ на интервале $0 \le s \le 1$ с условием $\alpha(0)=\alpha(1)$ (рис.). Из каждой точки $\alpha(s)$ кривой α как начальной выходит решение $x(t,s)$ системы (*) с условием $x(0,s)=\alpha(s)$. Предполагается, что траектория $x(t,s)$, совершив оборот вокруг тора Г, через некоторое время вновь пересечет кривую α. Пусть $T(s)=\min\{t>0 | x(t,s) \in \alpha\}$ – момент первого возвращения траектории $x(t,s)$ на кривую α, при этом $x(T(s),s)$ есть точка возвращения. Пусть $\tau(s)$ такова, что $\alpha(\tau(s))=x(T(s),s)$. Здесь $\tau(s)$ есть функция последования сечений Пуанкаре кривой α фазовыми траекториями системы (1). Естественная область изменения переменной s – окружность. При рассмотрении функции $\tau(s)$ на полуинтервале $[0,1)$ неизбежно возникают разрывы. Для того, чтобы обеспечить непрерывность $\tau(s)$, принято считать областью изменения s всю числовую ось. При этом функции $\alpha(s)$ и $\tau(s)$ являются периодическими $\alpha(s)=\alpha(s+1)$, $\tau(s)=\tau(s+1)$. Равенства $x(t,s)=x(t,s+1)$, $x(T(s)+t,s)=x(t,\tau(s))$ позволяют распространить функцию $x(t,s)$ на всю плоскость $\Pi=\{(t,s)| -\infty<t<+\infty, -\infty<s<+\infty\}$.

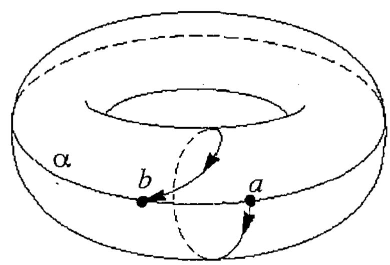


Рис. α – замкнутая кривая (экватор); $a=x(0,s)=\alpha(s)$ – начальная точка решения $x(t,s)$; $b=x(T(s),s)=\alpha(\tau(s))$ – точка первого возвращения решения $x(t,s)$ на кривую α

Функция $x(t,s)$ устанавливает взаимно–однозначное соответствие между точками 2–тора Г и точками множества $D=\{(t,s)|0 \le t<T(s),\ 0 \le s<1\}$. Вектор–функции $\partial x(t,s)/\partial t$, $\partial x(t,s)/\partial s$ – линейно независимы. При этом для каждой точки γ на торе Г можно указать $t=t(\gamma)$, $s=s(\gamma)$ такие, что $x(t,s)=\gamma$.

В разделе 1 в связи с аппроксимацией функции Ляпунова в окрестности двумерного тороидального многообразия рассматривается конструкция тороидальной квадратичной формы. Данная форма задается некоторой матрицей, параметрически связанной с точками тороидальной поверхности. Вопрос об устойчивости 2–тора сводится (*теорема 2*) к анализу разрешимости некоторой краевой задачи для соответствующего матричного линейного дифференциального уравнения Ляпунова.

В разделе 2 вводится понятие P–устойчивости линейной системы для некоторого проектора P. При этом P–устойчивость системы первого приближения является (*теорема 3*) необходимым и достаточным условием разрешимости краевой задачи. Результаты разделов 1 и 2 позволяют придать критерию устойчивости 2–тора (*теорема 4*) традиционную форму теоремы об устойчивости по первому приближению.

Раздел 3 посвящен детальному анализу трехмерного случая. Здесь матричное дифференциальное уравнение Ляпунова вырождается в скалярное, а его решение сводится к решению некоторого функционального уравнения. Анализ разрешимости этого функционального уравнения приводит к интегральному параметрическому критерию, известному [9, 10] как достаточное условие устойчивости 2–тора. Техника, представленная в данной работе, позволила доказать его необходимость.

В разделе 4 для построения стабилизирующего регулятора используется метод тороидально квадратичных ФЛ, разработанный в разделах 1, 2 применительно к задаче анализа устойчивости.

В разделе 5 приводится иллюстрирующий пример.

1. Устойчивость. Тороидально–квадратичные функции Ляпунова

Рассмотрим в некоторой окрестности U тороидальной поверхности Γ функцию $\gamma(x)$, где $\gamma(x)$ – ближайшая к x точка 2–тора Γ. Функция $\gamma(x)$ в общем случае может быть многозначной. Однако вблизи достаточно гладкой поверхности $\Gamma(x)$ все обстоит просто. При рассмотрении вопросов устойчивости окрестность U можно считать достаточно малой. При этом вектор отклонения x от Γ, $\Delta(x)=x-\gamma(x)$, будет в U однозначной и гладкой функцией.

Определение 1. Тор Γ называется экспоненциально устойчивым (Э–устойчивым) в U, если при некоторых $K>0$, $l>0$ выполняется условие

$$\|\Delta(x(t))\| \le Ke^{-lt}\|\Delta(x_0)\|,$$

где $x(t)$ – решение системы (*) с начальным условием $x(0)=x_0\in U$, $\|\cdot\|$ – евклидова норма.

Э–устойчивость тороидальных многообразий исследовалась в работах [8–12]. Рассмотрим в окрестности U функцию Ляпунова $v(x)$

$$v|_U \ge 0, \quad v|_\Gamma = 0, \quad v|_{U\setminus\Gamma} > 0. \tag{1.1}$$

При доказательстве теорем об устойчивости точки покоя в качестве функций Ляпунова берут квадратичные формы, в случае орбит используют орбитальные квадратичные формы [5]. Соответствующий аналог для тороидальных многообразий дается следующим определением.

Определение 2. Функция $v(x)$ называется тороидально квадратичной (Γ–квадратичной), если при некоторых $K_1>0, K_2>0$ в U выполняются неравенства

$$K_1\|\Delta(x)\|^2 \le v(x) \le K_2\|\Delta(x)\|^2. \tag{1.2}$$

Справедлив следующий критерий, представляющий собой распространение на случай тора классических результатов [3].

Теорема 1. Для Э–устойчивости тора Γ системы (*) необходимо, чтобы для любой, и достаточно, чтобы для некоторой Γ–квадратичной функции Ляпунова $w(x)$ существовала Γ–квадратичная функция Ляпунова $v(x)$ такая, что в U справедливо равенство

$$Lv(x) = -w(x), \quad Lv(x)=\left(\frac{\partial v}{\partial x}, f(x)\right). \tag{1.3}$$

Для исследования разрешимости уравнения Ляпунова (1.3) необходимо связать локальное поведение функций $v(x)$, $Lv(x)$ и $\dot{w}(x)$ вблизи 2–тораΓ.

Рассмотрим разложение $v(x)$ в ряд Тейлора в точке $\gamma\in\Gamma$

$$v(x) = v(\gamma) + \left(\frac{\partial v}{\partial x}(\gamma), x-\gamma\right) + {}^1\!/_2\left(x-\gamma, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\gamma)\ (x-\gamma)\right) + O(|x-\gamma|^3).$$

В этом разложении, благодаря (1.1), первым отличным от нуля будет квадратичный член. Здесь для каждой фиксированной точки $x\in U$ естественно взять $\gamma=\gamma(x)$. В результате получим

$$v(x) = \varphi(x) + O(|\Delta(x)|^3), \quad \varphi(x) = {}^1\!/_2\left(\Delta(x), \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\gamma(x))\ \Delta(x)\right),$$

где $\varphi(x)$ есть первое приближение функции $v(x)$ в окрестности U тора Γ. Для фиксированного тора Γ функцию $\varphi(x)$ однозначно определяет заданная на Γ функция

$$\Phi(\gamma) = {}^1\!/_2\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\gamma),$$

значения которой при каждом $\gamma\in\Gamma$ есть симметрическая $n\times n$ –матрица. Функцию

$$\varphi(x)=(\Delta(x),\Phi(\gamma(x))\Delta(x))$$

естественно назвать тороидальной квадратичной формой.

Проведем через точку γ поверхности Γ произвольную гладкую кривую β, задаваемую параметрически функцией $\beta(\tau)$. Дифференцируя очевидное тождество $\frac{\partial v}{\partial x}(\beta(\tau))\equiv 0$ по τ, получим тождество $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\beta(\tau))\frac{d\beta(\tau)}{d\tau}\equiv 0$, означающее

$$\Phi(\gamma)r(\gamma) \equiv 0, \tag{1.4}$$

где $r(\gamma)$ – произвольный вектор, касательный к торуΓ в точке γ.

Воспользовавшись параметризацией 2–тора, связанной с семейством решений $x(t,s)$, перейдем от функции $\Phi(\gamma)$, заданной на Γ, к функции

$$V(t,s) = \Phi(x(t,s)), \tag{1.5}$$

заданной на D. Равенства $x(t,s+1)=x(t,s)$, $x(T(s)+t,s)=x(t,\tau(s))$ позволяют распространить функцию $V(t,s)$ на всю плоскость $\Pi=\{(t,s)|-\infty<t<+\infty,-\infty<s<+\infty\}$. При этом должны выполняться условия

$$V(t,s+1) = V(t,s), \qquad V(T(s)+t,s) = V(t,\tau(s)). \tag{1.6}$$

Равенство $\Phi(\gamma)=V(t(\gamma),s(\gamma))$ позволяет по функции $V(t,s)$ однозначно восстановить $\Phi(\gamma)$. При этом равенство (1.4), определяющее характер вырождения матриц $\Phi(\gamma)$, эквивалентно системе

$$V(t,s)\frac{\partial x(t,s)}{\partial t}\equiv 0, \qquad V(t,s)\frac{\partial x(t,s)}{\partial s}\equiv 0,$$

которую, в свою очередь, можно записать в форме

$$V(t,s)y(t,s) = 0, \qquad V(t,s)z(t,s) = 0, \tag{1.7}$$

где

$$y(t,s) = f\,(x(t,s)), \tag{1.8}$$

а $z(t,s)$ - решение системы

$$\frac{\partial z}{\partial t} = F(t,s)z, \quad \text{где } F(t,s) = \frac{\partial f}{\partial x}\,(x(t,s)) \tag{1.9}$$

с начальным условием $z(0,s) = \dfrac{d\alpha(s)}{ds}$. Установленное таким образом соответствие функций $\Phi(\gamma)$ и $V(t,s)$ позволяет конструировать функции Ляпунова $v(x)$ с помощью функций $V(t,s)$ - элементов пространства Σ. Пространство Σ составляют функции $V(t,s)$, определенные и достаточно гладкие на плоскости Π со значениями - симметрическими $n\times n$-матрицами, для которых справедливы условия (1.6), (1.7). Каждому элементу $V(t,s)$ пространства Σ может быть поставлена в соответствие функция

$$v(x) = (\Delta(x),\, V(t(\gamma(x)),\, s(\gamma(x)))\Delta(x)). \tag{1.10}$$

Положительная определенность (1.1) этой функции связана со следующим свойством P-положительной определенности элемента $V(t,s)$.

Рассмотрим матрицу $P_{y,z}$, задающую оператор проектирования на подпространство, ортогональное плоскости, натянутой на векторы y и z. Введем матрицу $P(t,s)=P_{y(t,s),z(t,s)}$, где $y(t,s)$ и $z(t,s)$ определены в (1.8), (1.9) и задают плоскость касательную к 2-тору Γ в точке $x(t,s)$.

Отметим, что

$$P_{y,z} = P_y - \frac{P_y z z^T P_y}{z^T P_y z}, \qquad P_y = I - \frac{yy^T}{y^T y}, \qquad r\,(P_{y,z}) = n - 2.$$

Определение 3. Матрицу $V(t,s)$ из Σ будем называть $P(t,s)$-положительно определенной в точке (t,s), если для любого вектора u такого, что $P(t,s)u\neq 0$, справедливо неравенство $(u,V(t,s)u)>0$. Матрицу $V(t,s)$, являющуюся $P(t,s)$-положительно определенной при любых $(t,s)\in\Pi$, будем называть P-положительно определенной.

В пространстве Σ рассмотрим конус матриц $\mathcal{K} = \{V\in\Sigma | V(t,s)$ - неотрицательно определенная при любых $(t,s)\in\Pi\}$ и множество $\mathcal{K}_p = \{V\in\Sigma | V$ - P-положительно определенная$\}$.

Отметим, что выбор $V(\cdot,\cdot)$ из $\mathcal{K}_p$ гарантирует положительную определенность (1.1) для $v(x)$ из (1.10). Пусть $\lambda_1(t,s)\leq\lambda_2(t,s)\leq\ldots\leq\lambda_n(t,s)$ - упорядоченный набор собственных значений матрицы $V(t,s)$. Условие $V\in\mathcal{K}_p$ означает, что $\lambda_1(t,s)=\lambda_2(t,s)\equiv 0$, $\lambda_3(t,s)>0$. При этом в качестве констант K_1 и K_2 неравенства (1.2) можно взять

$$K_1=\min_D\lambda_3, \qquad K_2=\max_D\lambda_n.$$

Завершив анализ локального поведения функции Ляпунова $v(x)$ в окрестности тора Γ, перейдем к локальному описанию функции $Lv(x)$. Рассмотрим разложение функции $l(x)=Lv(x)=\left(\dfrac{\partial v(x)}{\partial x}\right)^T f(x)$ в ряд Тейлора в точке $\gamma\in\Gamma$

$$l(x) = l(\gamma) + \left(\frac{\partial l}{\partial x}(\gamma),\, x-\gamma\right) + {}^1\!/_2\left(x-\gamma,\, \frac{\partial^2 l}{\partial x^2}(\gamma)(x-\gamma)\right) + O(|x-\gamma|^3). \tag{1.11}$$

Здесь

$$\left(\frac{\partial l}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^T f + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T \frac{\partial v}{\partial x}, \tag{1.12}$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right)^T f + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^T \frac{\partial f}{\partial x} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^T \frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1.13}$$

В разложении (1.11), благодаря тождествам $\frac{\partial v}{\partial x}(\gamma)\equiv 0$, $\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\gamma)\right)^T f(\gamma)\equiv 0$ (см. (1.1), (1.4), (1.12)), первым отличным от нуля будет квадратичный член. Положив в (1.11) $\Psi(\gamma) = {}^1/_2 \frac{\partial^2 l}{\partial x^2}(\gamma)$, $\gamma=\gamma(x)$, получим

$$Lv(x) = \psi(x) + O(|\Delta(x)|^3), \tag{1.14}$$

где

$$\psi(x) = (\Delta(x), \Psi(\gamma(x))\Delta(x)). \tag{1.15}$$

Рассмотрим $Q(t,s)=\Psi(x(t,s))$. Для $Q(t,s)$ из (1.13) с учетом равенств

$$\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(x(t,s))\right)^T f(x(t,s)) \equiv \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x(t,s))\right),$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x(t,s)) = 2V(t,s), \qquad \frac{\partial v}{\partial x}(x(t,s)) \equiv 0$$

следует представление

$$Q(t,s) = \frac{\partial V(t,s)}{\partial t} + F^T(t,s)V(t,s) + V(t,s)F(t,s). \tag{1.16}$$

Взяв в уравнении (1.3) наряду с разложением (1.14)-(1.16) функции $Lv(x)$ соответствующее разложение для функции $w(x)$

$$w(x) = {}^1/_2\left(\Delta(x), \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(\gamma(x))\Delta(x)\right) + O(|\Delta(x)|^3), \qquad W(t,s) = {}^1/_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x(t,s)),$$

получим соотношение

$$\frac{\partial V(t,s)}{\partial t} + F^T(t,s)V(t,s) + V(t,s)F(t,s) = -W(t,s). \tag{1.17}$$

Уравнение (1.17) устанавливает связь между матрицами V и W - основными локальными характеристиками функций $v(x)$ и $w(x)$ в окрестности тора Г. При этом из *теоремы 1* вытекает следующий матричный критерий.

Теорема 2. Для Э-устойчивости тора Г системы (*) необходимо, чтобы для любой, и достаточно, чтобы для некоторой матрицы $W(t,s)\in\mathcal{K}_p$ существовало решение $V(t,s)\in\mathcal{K}'_p$ уравнения (1.17).

Доказательство необходимости по существу содержится в уже проведенных выкладках, приводящих от уравнения (1.3) к уравнению (1.17). Для доказательства достаточности следует по матрице V - решению уравнения (1.17) - построить функцию $v(x)$ (см.(1.10)) и показать, что $v(x)$ и является ФЛ (удовлетворяет (1.3)) для системы (*) в малой окрестности U тора Г.

2. Система первого приближения и ее *P*-устойчивость

Свяжем с семейством решений $x(t,s)$ уравнения (*) семейство систем первого приближения

$$\dot{u} = F(t,s)u, \qquad F(t,s) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t,s)). \tag{2.1}$$

Система (2.1) имеет решения

$$y(t,s) = \frac{\partial x(t,s)}{\partial t} = f(x(t,s)) \quad \text{и} \quad z(t,s) = \frac{\partial x(t,s)}{\partial s},$$

являющиеся по t либо периодическими, либо квазипериодическими функциями. Поэтому точка покоя u=0 системы (2.1) не может быть экспоненциально устойчивой в традиционом смысле. Здесь рассматривается более слабый аналог такой устойчивости, определяемый с помощью проектора $P(t,s)$ (см. раздел 1), сопровождающего решения $y(t,s)$ и $z(t,s)$.

Определение 4. Тривиальное решение u=0 системы (2.1) будем называть экспоненциально P-устойчивым, если существуют такие K>0, l>0, что

$$\|P(t,s)u(t,s)\| \le Ke^{-lt} \, \|P(0,s)u_0(s)\|$$

при любых t>0, $s \in [0,1]$ и любых начальных условиях $u(0,s)=u_0(s)$ решения $u(t,s)$ системы (2.1).

При этом для краткости систему (2.1) будем называть P-устойчивой. Понятие P-устойчивости было введено в [5] для периодического случая.

Оператор Ляпунова системы (2.1)

$$L_1 v(t,s,u) = \frac{\partial v}{\partial t}(t,s,u) + \left(\frac{\partial v}{\partial u}(t,s,u), F(t,s)u\right)$$

для $v(t,s,u)=u^T V(t,s)u$ (квадратичной формы, задаваемой матричной функцией $V(t,s)$) имеет вид

$$L_1(u^T V(t,s)u) = u^T \mathcal{L}[V]u, \tag{2.2}$$

где

$$\mathcal{L}[V] = \frac{\partial V}{\partial t} + F^T V + VF.$$

Отметим, что дифференциально-матричный оператор $\mathcal{L}$ определял (см. (1.14)-(1.16)) аппроксимацию оператора Ляпунова L исходной системы (*).

Теорема 3. Пусть система (2.1) является P-устойчивой. Тогда:
(*а*) при любой матрице $W \in \mathcal{K}$ уравнение

$$\mathcal{L}[V] = -W \tag{2.3}$$

имеет в $\mathcal{K}$ единственное решение - матрицу $V \in \mathcal{K}$;
(*б*) если $W \in \mathcal{K}_p$, то $V \in \mathcal{K}_p$.

Пусть для некоторой матрицы $W\in\mathcal{K}_p$ уравнение (2.3) имеет решение $V\in\mathcal{K}_p$. Тогда система (2.1) является P–устойчивой.

Доказательство. Необходимость. Для W – произвольного элемента $\mathcal{K}$ – рассмотрим $V_\theta(\tau,s)$ – решение уравнения (2.3) на интервале $t\le\tau\le\theta$ с условием $V_\theta(\theta,s)=0$.

Пусть $u(\tau,s)$ – решение уравнения (2.1) с условием $u(t,s)=u$. Из (2.2) и (2.3) следуют равенства

$$\frac{d}{d\tau}\left[u^T(\tau,s)V_\theta(\tau,s)u(\tau,s)\right] = u^T(\tau,s)\mathcal{L}\left[V_\theta(\tau,s)\right]u(\tau,s) = -u^T(\tau,s)W(\tau,s)u(\tau,s),$$

интегрируя которые по отрезку $[t,\theta]$, получим

$$u^T(\theta,s)V_\theta(\theta,s)u(\theta,s) - u^T(t,s)V_\theta(t,s)u(t,s) = \int_t^\theta u^T(\tau,s)W(\tau,s)u(\tau,s)d\tau.$$

Откуда, учитывая $u(t,s)=u$, $V_\theta(\theta,s)=0$, имеем

$$u^TV_\theta(t,s)u = \int_t^\theta u^T(\tau,s)W(\tau,s)u(\tau,s)d\tau. \tag{2.4}$$

Интеграл в (2.4) монотонно возрастает по θ и, благодаря P–устойчивости (2.1), сходится. Это означает, что $V_\theta(t,s)$ по θ монотонно возрастает и имеет предел

$$V(t,s) = \lim_{\theta\to\infty}V_\theta(t,s).$$

При этом из (2.4) следует

$$u^TV(t,s)u = \int_t^\infty u^T(\tau,s)W(\tau,s)u(\tau,s)d\tau. \tag{2.5}$$

Матрица $V(t,s)$ является решением уравнения (2.3). Докажем, что $V\in\Sigma$. Подставив в (2.5) поочередно $u(\tau,s)=y(\tau,s)$ и $u(\tau,s)=z(\tau,s)$, с учетом $W(\tau,s)y(\tau,s)=0$ и $W(\tau,s)z(\tau,s)=0$ сразу получим условия (1.7).

Пусть $u_1(\tau,s)$ – решение уравнения (2.1) на интервале $[t+T(s),\infty)$ с условием $u_1(t+T(s),s)=u$. Из (2.5) с последующей заменой $\tau=\xi+T(s)$, $W(\xi+T(s),s)=W(\xi,\tau(s))$, $u_1(\xi+T(s),s)=u(\xi,\tau(s))$ следует равенство

$$u^TV(t+T(s),s)u = \int_{t+T(s)}^\infty u^T_1(\tau,s)W(\tau,s)u_1(\tau,s)d\tau = u^TV(t,\tau(s))u,$$

означающее, что $V(t+T(s),s)=V(t,\tau(s))$. Поскольку в (2.5) матрица W неотрицательно определенная, то и V будет также неотрицательно определенной матрицей. Таким образом, матрица $V\in\mathcal{K}$ и является решением (2.3).

Докажем его единственность. Пусть $V_1\in\mathcal{K}$ и $V_2\in\mathcal{K}$ – два решения уравнения (2.3). Разность $\Delta=V_1-V_2$ удовлетворяет уравнению $\mathcal{L}[\Delta]=0$. Тогда из (2.2), (2.3) следует, что

$$u^T(\theta,s)\Delta(\theta,s)u(\theta,s) = u^T\Delta(t,s)u. \tag{2.6}$$

Левая часть (2.6), благодаря P–устойчивости (2.1), при $\theta\to\infty$ стремится к нулю. Переходя в (2.6) к пределу, получим равенство $u^T\Delta(t,s)u=0$, из которого следует $\Delta(t,s)=0$. Доказательство утверждения (a) завершено.

Пусть $W\in\mathcal{K}_p$, тогда для любого u такого, что $P(t,s)u\ne0$, выполняется неравенство $u^TW(t,s)u>0$, откуда с учетом (2.5) следует неравенство $u^TV(t,s)u>0$, означающее, что $V\in\mathcal{K}_p$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $V\in\mathcal{K}_p$ и $W\in\mathcal{K}_p$ связаны соотношением (2.3). Это означает, что для произвольного решения $u(t,s)$ уравнения (2.1) справедливо соотношение

$$\frac{d}{dt}\left(u^T(t,s)V(t,s)u(t,s)\right) = -u^T(t,s)W(t,s)u(t,s). \tag{2.7}$$

Поскольку $V,W \in \mathcal{K}_p$, то найдутся такие $k_i>0$ (i=1,2,3), что

$$k_1V(t,s) \le W(t,s), \tag{2.8}$$

$$k_2P(t,s) \le V(t,s) \le k_3P(t,s). \tag{2.9}$$

Из (2.7) и (2.8) следует неравенство

$$u^T(t,s)V(t,s)u(t,s)) \le e^{-k_1t}u^T(0,s)W(0,s)u(0,s), \tag{2.10}$$

а из (2.9) и (2.10) - неравенство

$$\|P(t,s)u(t,s)\|^2 \le (k_3/k_2)e^{-k_1t}\|P(0,s)u(0,s)\|^2,$$

означающее P-устойчивость системы (2.1).

Из *теорем 2* и *3* следует теорема об устойчивости по первому приближению.

Теорема 4. Для Э-устойчивости 2-тора Г системы (*) необходима и достаточна P-устойчивость системы первого приближения (2.1).

3. Устойчивость 2-тора в трехмерном пространстве

Рассмотрим систему (*) при n=3. Матрица проектирования $P(t,s)$ имеет в этом случае ранг, равный единице, и может быть представлена в виде $P(t,s)=p(t,s)p^T(t,s)$, где $p(t,s)$ - вектор единичной длины, ортогональный векторам $y(t,s)$ и $z(t,s)$. При этом входящие в (2.3) матрицы V, $W \in \mathcal{K}_p$, также имея ранг, равный единице, могут быть выражены $V(t,s)=v(t,s)P(t,s)$, $W(t,s)=w(t,s)P(t,s)$ через скалярные функции $v(t,s)>0$ и $w(t,s)>0$ - собственные значения матриц $V(t,s)$ и $W(t,s)$.

В итоге, при n=3 решение матричного уравнения Ляпунова (2.3) на множестве $\mathcal{K}_p$ сводится к решению скалярного уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,s) + a(t,s)v(t,s) = -w(t,s),$$

$$a(t,s) = p^T(t,s)[F^T(t,s) + F(t,s)]p(t,s) \tag{3.1}$$

с условиями

$$v(t,s+1) = v(t,s), \qquad v(T(s)+t,s) = v(t,\tau(s)). \tag{3.2}$$

Общее решение уравнения (3.1) имеет вид

$$v(t,s) = [c(s) - h(t,s)]/q(t,s), \tag{3.3}$$

где $q(t,s)$ и $h(t,s)$ - известные функции

$$q(t,s) = \exp(\int_0^t a(\tau,s)d\tau), \quad h(t,s) = \int_0^t q(\tau,s)w(\tau,s)d\tau, \tag{3.4}$$

а $c(s)$ - неизвестная функция, играющая для $v(t,s)$ роль начальной: $v(0,s)=c(s)$. Подставляя v из (3.3) в соотношения (3.2), получим для $c(s)$ функциональное уравнение

$$c(s)=q(T(s),s)\cdot c(\tau(s))+h(T(s),s) \tag{3.5}$$

с условием

$$c(s+1) = c(s). \tag{3.6}$$

Таким образом, решение дифференциального уравнения (3.1) с краевыми условиями (3.2) сведено к решению функционального уравнения (3.5) с условием (3.6).

Лемма. Для того, чтобы система (3.1), (3.2) имела решение $v(t,s)>0$ при любой функции $w(t,s)>0$, удовлетворяющей (3.2), необходимо и достаточно, чтобы при любом $s\in[0,1)$ выполнялось неравенство

$$\sigma(s) = \lim_{T\to\infty}(1/T)\int_0^T a(t,s)dt < 0. \tag{3.7}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть для $v>0$ и $w>0$ выполняется (3.1), (3.2). Разделив (3.1) на произведение $Tv(t,s)$ и проинтегрировав от 0 до T, получим

$$\frac{1}{T}\ln\frac{v(T,s)}{v(0,s)} + \frac{1}{T}\int_0^T a(t,s)dt = -\frac{1}{T}\int_0^T \frac{w(t,s)}{v(t,s)}dt. \tag{3.8}$$

Из ограниченности $v(T,s)$ следует

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln\frac{v(T,s)}{v(0,s)} = 0.$$

Поскольку функция $w(t,s)/v(t,s)>0$ и является по t периодической или квазипериодической равномерно относительно $s\in[0,1]$, то

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \frac{w(t,s)}{v(t,s)}dt > 0.$$

Переходя в (3.8) к пределу при $T\to\infty$, получим неравенство (3.7).

Достаточность. Рассмотрим пространство C непрерывных и периодических ($c(s+1)=c(s)$) на $(-\infty,+\infty)$ функций с нормой $\|c\|=\max_{[0,1]}|c(s)|$ и оператор A уравнения (3.5), переводящий C в C по правилу

$$Ac(s) = q(s)c(\tau(s)).$$

При этом уравнение (3.5) запишем в виде

$$c = Ac + h(s).$$

Здесь

$$q(s) = q(T(s),s), \quad h(s) = h(T(s),s).$$

Для A^m справедливо

$$A^m c = q_m(s)c(\tau^m(s)), \qquad \|A^m\| = \|q_m\|,$$

где

$$q_m(s) = \Pi_{k=0}^{m-1}q(\tau^k(s)), \qquad \tau^k(s) = \tau[\tau^{k-1}(s)], \qquad \tau^0(s) = s. \tag{3.9}$$

Выразим $q_m(s)$ через $a(t,s)$. Для этого рассмотрим последовательность функций

$$t_k(s) = T(\tau^{k-1}(s)), \qquad T_k(s) = \Sigma_{i=1}^{k}t_i(s).$$

Здесь $t_k(s)$ – время, за которое траектория $x(t,s)$ совершает очередной k–й виток вокруг тора, а $T_k(s)$ – время, необходимое для прохождения по спирали, состоящей из k витков.

Из (3.9) и соотношений

$$q(\tau^k(s)) = \exp\left(\int_0^{t_{k+1}(s)} a(\tau,\tau^k(s))d\tau\right) = \exp\left(\int_{T_k(s)}^{T_{k+1}(s)} a(\tau,s)d\tau\right)$$

следует, что

$$q_m(s) = \exp\left(\int_0^{T_m(s)} a(\tau,s)d\tau\right), \quad \|q_m(x)\|^{1/m} = e^{\lambda_m}, \quad \lambda_m = \max_{[0,1]}1/m\int_0^{T_m(s)} a(\tau,s)d\tau.$$

Из соотношений $\rho(A)=\lim_{m\to\infty}\|A^m\|^{1/m}=\lim_{m\to\infty}\|q_m(x)\|^{1/m}=\lim_{m\to\infty}e^{\lambda_m}=e^{\lambda}$ (где $\lambda=\lim_{m\to\infty}\lambda_m$) и условия (3.7) следует, что $\lambda<0$ и $\rho(A)<1$. Полученная оценка спектрального радиуса оператора A гарантирует существование единственного решения $c\in C$ системы (3.5), (3.6). При этом $c(s)=\lim_{m\to\infty}c_m(s)=\Sigma_{m=0}^{\infty}A^m h$, где последовательность функций $c_m(s)$ строится рекуррентно

$$c_{m+1}(s)=q(s)c_m(\tau(s))+h(s),\qquad c_0(s)\equiv 0. \tag{3.10}$$

Из положительности $q(s)$ и $h(s)$ следует, что предельная функция $c(s)$ удовлетворяет неравенству

$$c(s)>h(s). \tag{3.11}$$

Поскольку $h(t,s)\le h(s)$ при $t\in[0,T(s)]$, то функция $v(t,s)$, связанная с найденной $c(x)$ равенством (3.3), является в D строго положительным решением системы (3.1), (3.2). Лемма доказана.

Из этой леммы и доказанных ранее теорем следует, что неравенство (3.7) представляет собою параметрический критерий, дающий необходимое и достаточное условие как Э–устойчивости 2–тора в трехмерном пространстве, так и P–устойчивости, соответствующей системы первого приближения.

Замечание. Можно показать, что

$$\sigma(s)=\lim_{T\to\infty}2/T\int_0^T \mathrm{Tr}F(t,s)dt,$$

где Tr – след матрицы. При любом m справедливо

$$\sigma(s)=\sigma(\tau^m(s)). \tag{3.12}$$

Здесь удобно считать, что функция $\tau(s)$ отображает интервал [0,1) в себя. В квазипериодическом случае [1] при любом s значения $\tau^m(s)$ ($m=1,2,\ldots$) лежат всюду плотно на интервале [0,1). При этом из (3.12) следует, что функция $\sigma(s)$ есть константа

$$\sigma(s)\equiv\sigma_0=2/S\int_\Gamma \mathrm{div}f(x)dx,$$

где S – площадь тора Γ.

Неравенство $\sigma_0<0$ в качестве достаточного условия устойчивости 2–тора имеется в работах [9,10]. При этом в [10] случай $\sigma_0=0$ характеризован как критический. Результаты данной работы, опирающиеся на МФЛ, позволяют заключить, что при $\sigma_0=0$ тор Э–устойчивым быть не может.

Если $x(t,s)$ есть цикл с периодом $T_N(s)$ (это означает, что $\tau^N(s)=s$, $\tau^{N+1}(s)=\tau(s),\ldots$), то

$$\sigma(s)=2/T_N(s)\int_0^{T_N(s)}\mathrm{Tr}F(\tau,s)d\tau.$$

Для тора, целиком состоящего из циклов, функция $\sigma(s)$ может иметь непрерывный спектр значений (для каждого цикла – свое). Для тора, состоящего из конечного числа чередующихся устойчивых и неустойчивых циклов, $\sigma(s)$ – кусочно постоянна. При этом для s, соответствующего неустойчивому циклу, σ имеет изолированное значение, а на интервале величин s, отвечающих всем траекториям, сходящимся к одному циклу, является константой.

Критерий устойчивости тора $\max_{[0,1]}\sigma(s)<0$ можно рассматривать, как обобщение известного интегрального признака Пуанкаре устойчивости цикла на плоскости [4].

4. Стабилизация

МФЛ является основным инструментом построения стабилизирующих управлений. Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x} = f(x,u) \tag{4.1}$$

(где x - n-мерный вектор состояния, u - m-мерный вектор управления), имеющую при $u \equiv 0$ инвариантное тороидальное многообразие Г, задаваемое однопараметрическим семейством решений $x(t,s)$. Требуется найти закон управления $u=u(x)$, при котором тор Г, оставаясь инвариантным многообразием системы (4.1), является Э-устойчивым.

Будем предполагать, что данная задача разрешима, то есть тор Г в системе (4.1) является стабилизируемым. В этом случае в качестве стабилизирующего регулятора можно взять обратную связь

$$u = H(t(\gamma(x)), s(\gamma(x)))\Delta(x),$$

где матрица коэффициентов обратной связи $H(t,s)$ находится из решения следующей задачи оптимальной стабилизации.

Рассмотрим для (4.1) в окрестности решения $x(t,s)$ систему первого приближения

$$\dot{z} = F_0(t,s)\, z + B(t,s)w, \tag{4.2}$$

$$F_0(t,s) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t,s),0), \quad B(t,s) = \frac{\partial f}{\partial u}(x(t,s),0)$$

с регулятором вида

$$w = H(t,s)z \tag{4.3}$$

и критерием

$$\int_0^\infty (z^T G z + w^T R w)dt \to \min. \tag{4.4}$$

Здесь $G \in \mathcal{K}_p$, $R(t,s)$ - симметрическая $m\times m$-матрица, положительно определенная при всех $(t,s)\in\Pi$ и удовлетворяющая условию (1.6).

Систему (4.2) будем называть P-стабилизируемой, если при некоторой матрице $H(t,s)$ замкнутая система является P-устойчивой. Отметим, что P-стабилизируемость системы (4.2), благодаря *теореме 3*, эквивалентна стабилизируемости тора Г в системе (4.1). Функция Ляпунова - Беллмана $v=z^T W(t,s)z$ задачи (4.2)-(4.4) определяется матрицей $W(t,s)$ - решением уравнения

$$\partial W/\partial t + F_0^T W + WF_0 - WBR^{-1}B^T W = -G.$$

При этом матрица H_0 оптимального регулятора имеет вид $H_0=-R^{-1}B^T W$. Регулятор $w_0=H_0(t,s)z$ стабилизирует систему (4.2). Одновременно регулятор $u_0=H_0(t(\gamma(x)), s(\gamma(x)))\Delta(x)$ стабилизирует тор Г. Можно показать, что регулятор u_0 в малой окрестности U тора Г асимптотически эквивалентен регулятору, оптимизирующему критерий

$$\int_0^\infty [\Delta^T(x)G(t(\gamma(x)),\ s(\gamma(x)))\Delta(x) + u^T R(t(\gamma(x)),\ s(\gamma(x)))u]dt$$

для исходной нелинейной системы (4.1).

5. Пример

Рассмотрим в трехмерном пространстве переменных (x,y,z) 2–тор Г, задаваемый уравнением

$$((x^2+y^2)^{1/2}-2)^2+z^2=r_0^2, \qquad 0<r_0<2.$$

В новых переменных r, φ, ψ, связанных со старыми соотношениями

$$x=(2+r\cos\psi)\cos\varphi, \qquad y=(2+r\cos\psi)\sin\varphi, \qquad z=r\sin\varphi,$$

тороидальная поверхность задается совсем просто

$$r=r_0, \qquad 0\le\varphi\le 2\pi, \qquad 0\le\psi\le 2\pi.$$

Рассмотрим в новых переменных систему

$$\begin{aligned} \dot r &= f(r,\varphi,\psi),\\ \dot\varphi &= \alpha,\\ \dot\psi &= \beta, \end{aligned} \tag{5.1}$$

где f – 2π–периодическая функция по переменным φ и ψ. Предполагается, что $f(r_0,\varphi,\psi)=0$ при всех φ и ψ. Данные условия означают, что тор Г является инвариантным многообразием для (5.1) и может быть параметризован семейством решений

$$r(t)\equiv r_0 \qquad \varphi(t,s)=\alpha t+s, \qquad \psi(t)=\beta t,$$

где роль одного из параметров играет время t, а другим является начальное состояние $\varphi(0,s)=s$.

Необходимым и достаточным условием Э–устойчивости тора Г (см. (3.7)) будет неравенство

$$\max_s\gamma(s)<0,$$

где

$$\gamma(s)=\lim_{T\to\infty}{}^2/_T\int_0^T\frac{\partial f}{\partial r}(r_0,s+\alpha t,\beta t)dt.$$

Пусть

$$f(r,\varphi,\psi)=({}^1/_4)\mu(\varphi,\psi)r[(r/r_0)^2-1].$$

Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial r}(r_0,\varphi,\psi)={}^1/_2\mu(\varphi,\psi)$$

и

$$\gamma(s)=\lim_{T\to\infty}1/T\int_0^T\mu(s+\alpha t,\beta t)dt.$$

Исследуем устойчивость тора для функции вида

$$\mu(\varphi,\psi)=\mu_0+\mu_1\sin(k\varphi)\sin(l\psi),$$

где k, l – натуральные числа. Здесь возможны два варианта:

а) если $k\alpha\ne l\beta$, то $\gamma(s)=\mu_0$; б) если $k\alpha=l\beta$, то $\gamma(s)=\mu_0-(\mu_1/2)\sin(ks)$.

При этом условия устойчивости имеют вид

$$\text{а) } \mu_0 < 0; \qquad \text{б) } \mu_0 + |\mu_1|/2 < 0.$$

Как видим, рассматриваемая система наиболее устойчива при иррациональном значении числа вращения $\nu=\alpha/\beta$. В этом случае (имеем вариант «а» $\nu \neq l/k$) параметры μ_1, k, l не влияют на устойчивость. При рациональном ν возможен резонансный случай (имеем вариант «б» $\nu=l/k$), для которого изменять μ_1 можно лишь в определенных пределах. В случаях резонанса свойство устойчивости перестает быть грубым. Сколь угодно малое изменение α и β разрушает резонанс, функция $\gamma(s)$ убывает скачком. При этом запас устойчивости системы резко возрастает.

В заключение автор выражает благодарность Э.Э. Шнолю за полезные обсуждения.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта РФФИ (проект № 00-01-00076).

Библиографический список

1. *Арнольд В.И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.:Наука, 1978. 304с.

2. *Берже П., Помо И., Видаль К.* Порядок в хаосе. М.: Мир,1991. 368с.

3. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211с.

4. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости.М.: Наука, 1967. 472 с.

5. *Ряшко Л.Б.* Об устойчивости стохастически возмущенных орбитальных движений // ПММ. 1996.Т.60, вып.4. С. 582.

6. *Башкирцева И.А., Исакова М.Г., Ряшко Л.Б.* Асимптотическое разложение квазипотенциала для стохастически возмущенного нелинейного осциллятора // Дифференциальные уравнения. 1999. Т.35, № 12. С. 1.

7. *Немыцкий В.В.* О некоторых методах качественного исследования «в большом» многомерных автономных систем // Труды Московского математического общества. 1956. Т. 5. С. 455.

8. *Самойленко А.М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. М.: Наука, 1987. 304 с.

9. *Неймарк Ю.И.* Интегральные многообразия дифференциальных уравнений // Изв. вузов. Радиофизика. 1967. Т.10, № 3. С. 321.

10. *Гуртовник А.С., Неймарк Ю.И.* К вопросу об устойчивости квазипериодических движений // Дифференциальные уравнения. 1969. Т.5, № 5. С. 824.

11. *Колесов А.Ю., Мищенко Е.Ф.* Существование и устойчивость релаксационного тора // Успехи математических наук. 1989. Т.44, вып.3 (365). С. 161.

12. *Колесов А.Ю.* О существовании и устойчивости двумерного релаксационного тора // Математические заметки. 1994. Т. 56, вып. 6. С. 40.

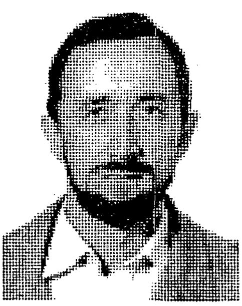
Уральский государственный университет

Поступила в редакцию 13.02.01
после доработки 15.05.01

LYAPUNOV FUNCTIONS TECHNIQUE FOR STABILITY ANALYSIS AND STABILIZATION OF INVARIANT 2-TORUS

L.B. Ryashko

Based on the introduced toroidally quadratic Lyapunov functions technique the exponential stability problem of an invariant 2-torus of nonlinear system is investigated. This problem is reduced to analysis of a boundary value decision problem for appropriate matrix differential Lyapunov equation. In connection with some projector P a concept of P-stability of linear system is introduced. Thus P-stability of the first approximation system is necessary and sufficient condition for 2-torus stability. In a three-dimensional case, the matrix differential Lyapunov equation degenerates into scalar one and its solution is reduced to the solution of some linear functional equation. From analysis of this functional equation the integral parametric stability criterion is deduced. The obtained results are used for construction of the stabilizing regulator.



Ряшко Лев Борисович - родился в 1953 году. Окончил Уральский госуниверситет (1975), кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической физики Уральского госуниверситета, Соросовский доцент (1996, 1998). Область научных интересов - устойчивость, стабилизация и управление стохастическими системами. Автор ряда статей по данной тематике.

E-mail: Lev.Ryashko@usu.ru