

Изв.вузов «ПНД», т.6, № 3, 1998

УДК 517.9

ОТОБРАЖЕНИЕ «КОТ АРНОЛЬДА»: КВАНТОВЫЙ ХАОС И ДИНАМИКА ОПЕРАТОРОВ В ПРЕДСТАВЛЕНИИ ГЕЙЗЕНБЕРГА

С.П. Кузнецов

Рассматривается модельная квантовая система с дискретным временем, классическим аналогом которой является отображение с хаотической динамикой, известное как «кот Арнольда». В силу наложенных на фазовое пространство условий периодичности, состояние квантовой системы представляется векторами конечной размерности N , а операторы – матрицами $N \times N$. Целочисленный параметр N характеризует относительную величину квантовых эффектов; классическому пределу отвечает $N \rightarrow \infty$. Предложено отображение, описывающее эволюцию во времени операторов конечного сдвига по координате и импульсу в представлении Гейзенберга, и установлен явный вид соответствующего оператора эволюции в представлении Шредингера. Приводятся и обсуждаются результаты решения нестационарной задачи с начальными условиями в виде локализованного состояния, двух дельта-пиков, гауссова волнового пакета. Обсуждается представление квантовой динамики в фазовом пространстве в терминах распределения Хусими и функции Вигнера, а также спектр квазиэнергий и структура собственных векторов в свете динамики гейзенберговских операторов.

Введение

Известно, что классические нелинейные системы могут демонстрировать динамический хаос. С другой стороны, описание динамики на фундаментальном уровне подразумевает использование не классической, а квантовой механики. Поэтому возникает принципиальный вопрос – какими особенностями будет характеризоваться динамика квантовых систем, классические аналоги которых обладают хаотическим поведением? Вопрос этот оказался тонким и нетривиальным, а для обозначения соответствующей области исследований привился термин «квантовый хаос» [1–6].

Как и в большинстве работ по квантовому хаосу, будем исходить из того, что имеется некоторая изолированная от остального мира квантовая система. Ее динамика в представлении Шредингера описывается как детерминированная эволюция во времени волновой функции (вектора состояния), а в представлении Гейзенберга – как изменение во времени операторов, которые в квантовой теории занимают место классических динамических переменных [7–10]. Предполагая отсутствие взаимодействия системы с макроскопическим окружением, мы тем самым исключаем из рассмотрения диссиацию, а также весь круг вопросов, касающихся теории измерений («редукция волновой функции»). При этом,

естественно, в поле зрения остаются только консервативные (гамильтоновы) системы.

Казалось бы, очевидные рассуждения приводят к выводу, что хаоса в квантовых системах просто не бывает. Действительно, из-за принципа неопределенности, для квантовой системы нельзя говорить о пребывании в заданной точке фазового пространства, а лишь в ячейке конечного размера, объем которой определяется постоянной Планка \hbar . Поэтому любая ограниченная область фазового пространства содержит лишь конечное число ячеек, и, следовательно, динамика в этой области не может быть хаотической. Другой аргумент основывается, в сущности, на линейности уравнения Шредингера. Для финитного движения это уравнение приводит к дискретному спектру собственных чисел – разрешенных значений энергии или, согласно фундаментальному соотношению $v=E/\hbar$, – дискретных частот. Любое мыслимое состояние представляется как линейная комбинация собственных состояний. В силу дискретности спектра, оно может эволюционировать во времени только периодически или квази-периодически.

С другой стороны, классическая динамика должна получаться из квантовой как результат определенного предельного перехода. На этом основан знаменитый принцип соответствия, сыгравший выдающуюся роль на раннем этапе становления квантовой теории [7,8]. Таким образом, можно сказать, что основная проблема теории «квантового хаоса» состоит в объяснении того, как появляется хаос при переходе к классическому пределу. Можно ли выявить особенности квантовой динамики, которые ассоциировались бы с возникновением хаоса в классике? Заметим, что нетривиальность проблемы квантования и перехода к классическому пределу для систем, не являющихся полностью интегрируемыми, была отмечена еще в 1917 году Эйнштейном [11].

Для понимания классического хаоса общепризнанное значение имеет изучение специально сконструированных простых моделей, подчас не очень реалистичных, но допускающих далеко идущий теоретический анализ. К их числу относятся такие системы с дискретным временем как отображение пекаря или гиперболическое отображение тора «кот Арнольда» [12–14]. Можно думать, что столь же существенную роль в понимании квантового хаоса должны играть квантовые аналоги названных модельных систем.

Разработка этой идеи началась с основополагающей работы Ханнэя и Берри, опубликованной в 1980 году [15]. С тех пор появилось значительное количество работ, исследующих модельные квантовые системы, классическими аналогами которых служат отображения с хаотической динамикой (см. обзор в последнем разделе).

Как уже говорилось, основное содержание проблемы квантового хаоса заключается в выяснении деталей квантово-классического соответствия. Наиболее явно параллель между квантовым и классическим описанием прослеживается при использовании представления Гейзенберга, когда квантовая динамика трактуется как эволюция во времени линейных операторов, сопоставленных динамическим переменным классической системы [7,8,16]. В работах, посвященных квантованию модельных отображений, этому аспекту квантово-классического соответствия не было пока уделено достаточного внимания.

Данная статья имеет целью изложить результаты, которые получаются при квантовании в представлении Гейзенберга отображения «кот Арнольда» – простейшей динамической системы с хаотической динамикой, фазовым пространством которой служит поверхность тора [13,14]. Это своего рода упражнение из элементарной квантовой механики, хотя достаточно нестандартное и акцентирующее внимание на несколько других аспектах квантовой теории, пожалуй это делают традиционные учебные курсы. Уровень изложения рассчитан на широкий круг читателей-физиков, в том числе студентов и аспирантов, знакомых с курсом квантовой механики.

В разделе 1 вводится классическое отображение «кот Арнольда», обсуждаются его свойства и дается механическая интерпретация этой

динамической системы, что подготавливает переход к квантовому рассмотрению.

В разделе 2 определяется гильбертово пространство состояний квантовой системы. Благодаря периодичности на торе по двум переменным, это пространство оказывается конечномерным. Его размерность – целое число N – можно трактовать как параметр, характеризующий относительную величину квантовых эффектов. Этот параметр обратно пропорционален постоянной Планка, так что переход к классическому пределу соответствует $N \rightarrow \infty$.

В разделе 3 производится квантование системы в терминах представления Гейзенберга для случая нечетных N . Построенное в результате операторное (матричное) отображение порождает периодическую во времени динамику матриц $N \times N$, которыми представляются операторы сдвига по координате и импульсу. Наличие хаоса в классике ассоциируется с тем обстоятельством, что период квантовой динамики в зависимости от N ведет себя сложным, нерегулярным образом и притом в среднем растет с увеличением N .

В разделе 4 рассмотрен переход от представления Гейзенберга к представлению Шредингера и получен явный вид унитарной матрицы $N \times N$, задающей оператор эволюции, или пропагатор системы.

В разделе 5 обсуждается порождаемая квантовым отображением на торе динамика волновых функций. Представлены как компьютерные результаты решения нескольких начальных задач, так и аналитическое исследование, проливающее свет на взаимосвязь между характером эволюции волновой функции в представлении Шредингера и динамикой операторов в представлении Гейзенберга.

В разделе 6 рассматривается квантовый аналог классической функции распределения – функция Вигнера, известная как очень полезный инструмент анализа квантово-классического соответствия. Основная цель состоит в том, чтобы показать, как выводятся свойства функции Вигнера из динамики гейзенберговских операторов.

В разделе 7 обсуждается задача на собственные векторы и собственные значения пропагатора. Демонстрируется, что для отображения с хаотической динамикой пространственная структура большинства собственных векторов похожа на реализацию комплексной случайной последовательности.

В разделе 8 представлен краткий обзор публикаций по проблеме квантовой динамики модельных отображений на торе.

В приложении А производится обобщение процедуры квантования отображения кота Арнольда на четные N . В приложении В рассматривается динамика в представлении Гейзенберга оператора, построенного как комбинация сдвигов по координате и импульсу. Показано, что с точками периодических орбит (циклов) классического отображения кота Арнольда ассоциируются определенные законы сохранения (операторы симметрии) для квантового оператора эволюции за период цикла. В приложении С обсуждается связь между периодическими орбитами классического отображения и спектральными свойствами квантовой системы.

1. Классическое отображение кота Арнольда и его механическая интерпретация

Имея в виду последующее обращение к квантовой задаче и тот факт, что квантовые представления в физике ассоциируются раньше всего с механикой, стоит ввести в рассмотрение основную модель именно в механической трактовке [17].

Пусть частица массы m способна свободно двигаться по окружности, длина которой L_x . Положение частицы задается величиной x – длиной дуги, отсчитываемой вдоль окружности. Пусть, далее, через каждый интервал времени T периодически включается на очень короткое время внешнее силовое поле. Распределение этого поля по x считается таким, что получаемый частицей импульс

прямо пропорционален ее координате в момент толчка: $\Delta p = \gamma x$. Наконец, последнее предположение, которое с физической точки зрения может показаться довольно искусственным, состоит в том, что по импульсу фазовое пространство обладает, как и по координате, свойством периодичности; соответствующий период обозначим L_p . Иными словами, значения импульса частицы, отличающиеся на целое число периодов L_p , считаются эквивалентными. Если непосредственно перед очередным толчком импульс и координата были p и x , то сразу после толчка координата не изменится, а импульс станет равен $p' = p + \gamma x$. После этого частица движется по инерции, ее импульс сохраняется, а скорость равна p'/m . Через время T приращение координаты составит $\Delta x = p'T/m$, так что перед очередным толчком имеем

$$p' = p + \gamma x \pmod{L_p},$$

$$x' = x + p'T/m \pmod{L_x},$$

где значок модуля напоминает, что координата и импульс определены с точностью до добавок в целое число периодов L_x или L_p . Выбирая параметры так, чтобы $\gamma T/m = 1$ и $L_p/L_x = \gamma$, и нормируя импульс и координату, соответственно, на L_p и L_x , получаем

$$p' = p + x, \quad x' = x + p' \pmod{1}, \quad (1.1)$$

или

$$p' = p + x, \quad x' = p + 2x \pmod{1}. \quad (1.2)$$

Построенное преобразование переменных p и x , которое задает изменение состояния системы за единичный интервал времени, называют *отображением кота Арнольда* (Arnold cat map). Название объясняется тем, что предложивший это отображение В.И.Арнольд [13] для иллюстрации его действия использовал картинку в виде кота (рис. 1). Геометрически первый шаг процедуры состоит в

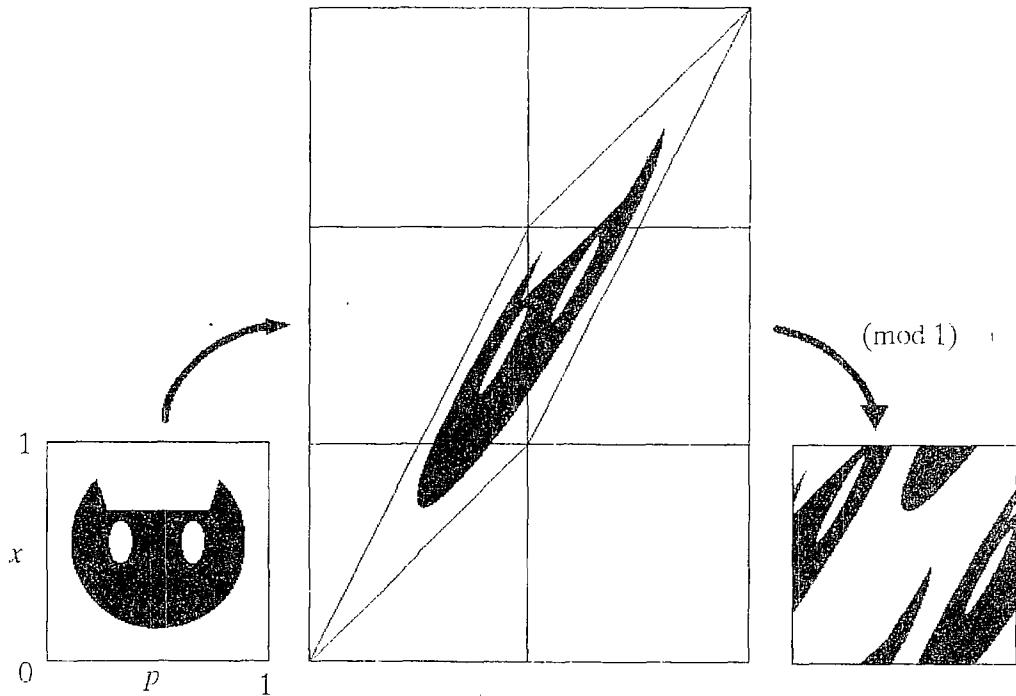


Рис. 1. Геометрическая иллюстрация действия классического отображения «кот Арнольда»

линейном преобразовании координат $\begin{bmatrix} p' \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ x \end{bmatrix}$, а второй – в переносе

элементов картинки, удалившихся за рамки единичного квадрата, обратно в него (последнее отвечает, конечно, операции взятия модуля). Благодаря периодичности по двум переменным x и p , фазовое пространство отображения можно мыслить как поверхность тора, хотя для наглядного представления динамики удобнее использовать просто единичный квадрат, как на рис. 1.

В нашей механической интерпретации движение частицы консервативно, то есть мы имеем дело с гамильтоновой системой. Математически это выражается в том, что детерминант матрицы $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, задающей отображение кота Арнольда, равен 1, и оно сохраняет меру (площадь) любой области, например, изображения кота.

Можно рассмотреть более широкий класс линейных отображений на торе, определяемых всевозможными матрицами 2×2 с целочисленными элементами и единичным определителем:

$$\begin{bmatrix} p' \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ x \end{bmatrix} \pmod{1}, \quad (1.3)$$

$$ad - bc = 1.$$

Благодаря последнему условию, соотношение (1.3) является, по терминологии классической механики, *каноническим преобразованием*. Это позволяет трактовать переменные p и x как импульс и координату некоторой механической гамильтоновой системы. В зависимости от собственных чисел матрицы λ_1, λ_2 , отображения вида (1.3) относятся к одному из трех типов [15]:

- гиперболический, если одно из собственных чисел больше, а второе меньше 1,
- параболический, если $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$,
- эллиптический, если λ_1 и λ_2 комплексно-сопряженные.

Отображение кота Арнольда принадлежит к гиперболическому типу, поскольку его собственные числа $\lambda_1 = (3+5^{1/2})/2$ и $\lambda_2 = (3-5^{1/2})/2$.

Приведем примеры отображений двух других типов.

Если в приведенном выше рассуждении исключить импульсные толчки, то получится отображение параболического типа, которое описывает свободное движение частицы:

$$p' = p, \quad x' = p + x \pmod{1}. \quad (1.4)$$

Каноническое преобразование, меняющее местами координату и импульс, служит примером отображения эллиптического типа:

$$p' = x, \quad x' = -p \pmod{1}. \quad (1.5)$$

На рис. 2 показано, как эволюционирует некоторая произвольно заданная начальная область при последовательных итерациях отображения гиперболического (а), параболического (б) и эллиптического (в) типа.

При итерациях гиперболического отображения закрашенная область – изображение кота – вытягивается вдоль направления первого (неустойчивого) собственного вектора на каждом шаге в λ_1 раз и сжимается вдоль второго (устойчивого) собственного направления соответственно в λ_2 раз. Величины $\Lambda_1 = \log \lambda_1$ и $\Lambda_2 = \log \lambda_2$ представляют собой ляпуновские показатели, причем старший показатель Λ_1 положителен. Это известный признак наличия неустойчивости

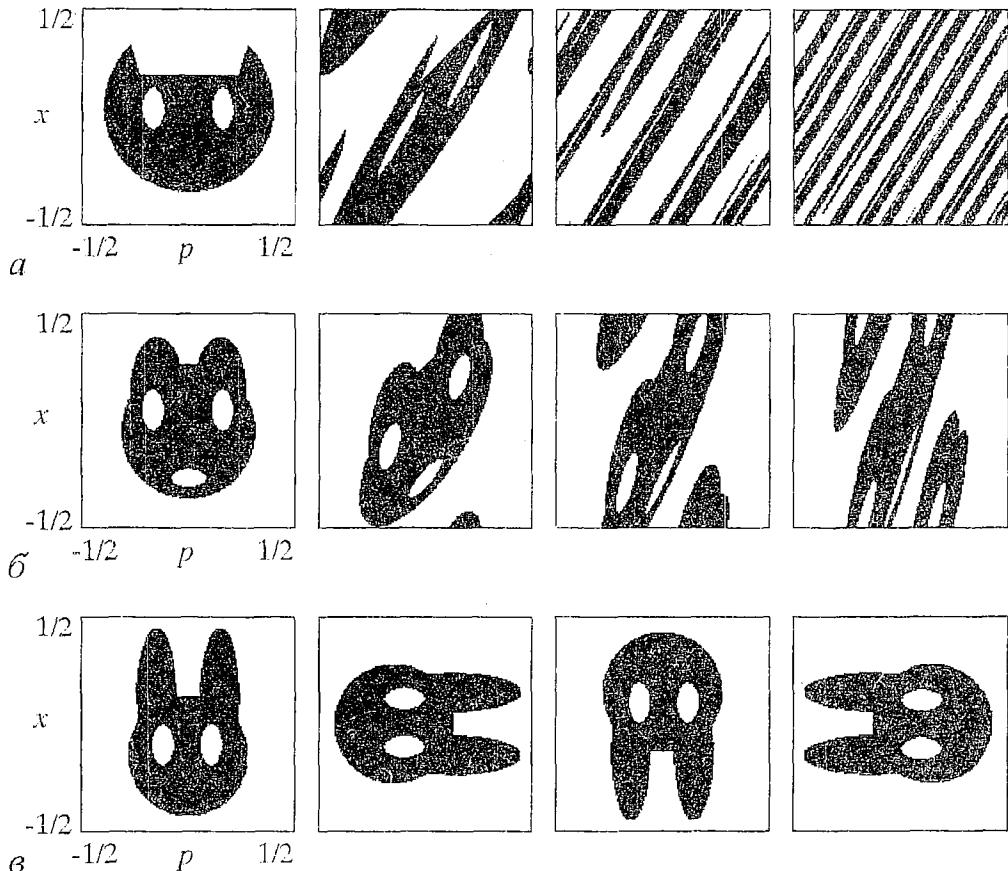


Рис. 2. Сравнение классической динамики на торе для отображений гиперболического (а), параболического (б) и эллиптического (в) типов. В гиперболическом случае имеет место перемешивание и эргодичность. В параболическом случае образ закрашенной фигуры остается по импульсу в своем определенном начальном интервале. Для эллиптического случая эволюция сводится к повороту без изменения формы фигуры. В отличие от рис. 1, начало координат – точка $x=0, p=0$ расположена в центре квадрата

фазовых траекторий по отношению к малому возмущению начальных условий и важнейший атрибут динамического хаоса.

После достаточно большого числа итераций изображение кота превращается в чрезвычайно узкую полосу, вытянутую вдоль неустойчивого собственного направления, то есть близкую к длинному отрезку линии, заданной уравнением $p=[(\sqrt{5}-1)/2]x \pmod{1}$. Из-за того, что угловой коэффициент иррационален, эта линия покрывает поверхность тора всюду плотно. Поэтому картина выглядит как набор большого числа узких чередующихся черных и белых полосок, в которые превратились, соответственно, множество точек, принадлежащих изображению кота, и дополнение этого множества. Выражаясь обыденным языком, «черная» и «белая» жидкости оказываются хорошо перемешанными. Свойство перемешивания в его точной математической формулировке строго доказывается для гиперболических отображений на торе и служит главным основанием для заключения о хаотической динамике этих систем [13,14]. В частности, из перемешивания следует свойство эргодичности, которое состоит в том, что вычисление статистических средних по ансамблю эквивалентно усреднению по времени вдоль типичной индивидуальной траектории. Сравнивая рис. 2, а–в, можно наглядно видеть, что ни параболическое, ни эллиптическое отображения свойством перемешивания не обладают.

2. Первый шаг в процедуре квантования: конечномерное гильбертово пространство, отвечающее динамике на торе

Рассмотрим вопрос о том, что будет означать с квантовой точки зрения периодичность фазового пространства одновременно по двум переменным – координате и импульсу, то есть тот факт, что фазовым пространством служит поверхность тора [15,17,18].

Если при квантовом описании одномерного движения частицы ее волновая функция в координатном представлении $\psi(x)$, а в импульсном – $\tilde{\psi}(p)$, то эти функции связаны прямым и обратным преобразованием Фурье:

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}(p) &= (2\pi\hbar)^{-1/2} \int \psi(x) \exp[-(i/\hbar)px] dx, \\ \psi(x) &= (2\pi\hbar)^{-1/2} \int \tilde{\psi}(p) \exp[(i/\hbar)px] dp.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Пусть теперь функция $\psi(x)$ имеет период L_x , а функция $\tilde{\psi}(p)$ – период L_p . Из периодичности $\psi(x)$ следует, что ее фурье-образ – функция $\tilde{\psi}(p)$ – представляет собой «гребенку» из δ -функций, расположенных на оси волновых чисел в точках $2\pi n/L_p$, где n – целое, то есть с шагом по импульсу $\Delta p = 2\pi\hbar/L_p$. Поскольку функция $\tilde{\psi}(p)$ тоже периодична, ее период L_p обязан содержать целое число шагов: $L_p/\Delta p = N$. Подставляя сюда выражение для Δp , получаем

$$L_x L_p = 2\pi\hbar N, \quad N \text{ – целое.}\tag{2.2}$$

Отсюда следует, что в импульсном представлении волновая функция полностью определяется заданием N комплексных коэффициентов $\{\tilde{\psi}_k, k=0,1,\dots,N-1\}$:

$$\tilde{\psi}(p) = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{\psi}_k \delta_{L_p}(x - kL_p/N)\tag{2.3}$$

(для упрощения записи принимаем обозначение $\delta_L(\dots)$ для L -периодической последовательности δ -функций.)

Аналогичное рассуждение можно провести и в обратном порядке: из периодичности $\tilde{\psi}(p)$ следует, что функция $\psi(x)$ есть «гребенка» из δ -функций, расположенных на оси x в точках $x = 2\pi m\hbar/L_p$, то есть с шагом $\Delta x = 2\pi\hbar/L_p$. Так как функция $\psi(x)$ обязана иметь период L_x , должно быть $L_x/\Delta x = N$, и мы вновь приходим к соотношению (2.2). Итак, в координатном представлении волновая функция тоже полностью определяется заданием N комплексных коэффициентов $\{\psi_m, m=0,1,\dots,N-1\}$:

$$\psi(x) = \sum_{m=0}^{N-1} \psi_m \delta_{L_x}(x - mL_x/N).\tag{2.4}$$

Таким образом, мы заключаем, что

1) гильбертово пространство состояний нашей системы есть конечномерное пространство комплексных векторов размерности N .

2) На параметры задачи, при которых возможно непротиворечивое квантовое описание системы с динамикой на торе, наложены ограничения, выражаемые формулой (2.2).

Как известно, в основу построения квантовой механики закладывается требование, чтобы при $\hbar \rightarrow 0$ имело место соответствие с классической теорией. В задаче о динамике на торе, будучи не вправе трактовать \hbar как непрерывную переменную, мы можем рассматривать предельный переход на дискретном множестве значений, разрешенных формулой (2.2). В этом смысле классическому пределу отвечает $N \rightarrow \infty$.

Говоря о координатном представлении, мы теперь всегда будем иметь в виду просто N -мерный вектор $\{\psi_m\}$, а говоря об импульсном представлении вектор $\{\tilde{\psi}_k\}$. Подставляя (2.4) в (2.1), легко убедиться, что оба набора чисел $\{\psi_m\}$ и $\{\tilde{\psi}_k\}$ связаны дискретным преобразованием Фурье:

$$\tilde{\psi}_k = N^{-1/2} \sum_{m=0}^{N-1} \psi_m \exp(-2\pi imk/N) = N^{-1/2} \sum_{m=0}^{N-1} \psi_m \alpha^{-mk}. \quad (2.5)$$

$$\psi_m = N^{-1/2} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{\psi}_k \exp(2\pi imk/N) = N^{-1/2} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{\psi}_k \alpha^{mk}. \quad (2.6)$$

Здесь введено обозначение $\alpha = \exp(2\pi i/N)$, которое будет использоваться и далее. Для операторов прямого и обратного преобразования Фурье примем символы \mathcal{F} и \mathcal{F}^+ . Эти операторы представляются матрицами размера $N \times N$, элементы которых

$$F_{mn} = \alpha^{-mn}/N^{1/2} \quad \text{и} \quad F_{+mn} = \alpha^{mn}/N^{1/2}. \quad (2.7)$$

Если периоды L_x и L_p принять за единицу, то $\psi(x)$ и $\tilde{\psi}(p)$ имеют вид гребенки из δ -функций с одинаковым шагом $1/N$. Согласно (2.2), квантовая постоянная \hbar подчинена тогда условию $2\pi\hbar=1/N$.

В заключение раздела заметим, что в распространенной системе обозначений Дирака [10,9] вектор-столбец называется *кет-вектор* и обозначается $|a\rangle$, где a – какой-либо символ, помечающий данное состояние. Сопряженный вектор-строка называется *бра-вектор* и обозначается $\langle b|$, а их скалярное произведение («полная скобка» – bracket) есть $\langle b|a\rangle$. В нашем случае это векторы, имеющие N компонент: $|\psi\rangle = [\psi_0 \psi_1 \dots \psi_{N-1}]^T$, $\langle\phi| = [\phi^*_0 \phi^*_1 \dots \phi^*_{N-1}]$, и при этом $\langle\phi|\psi\rangle = \sum_{i=0}^{N-1} \phi^* \psi_i$.

3. Описание динамики отображения кота Арнольда в представлении Гейзенберга

Как известно, в квантовой механике каждой физической величине («наблюдаемой») сопоставляется эрмитов оператор. В представлении Гейзенберга считается, что операторы эволюционируют во времени, а вектор состояния, на который они действуют, от времени не зависит. В представлении Шредингера, наоборот, операторы считаются неизменными, а во времени эволюционирует вектор состояния. В нашем случае операторы будут действовать в векторном пространстве размерности N и представляться матрицами $N \times N$. В этом разделе конструируется операторное отображение – квантовый аналог отображения кота Арнольда в представлении Гейзенберга.

Начнем с тривиального замечания, относящегося к классической задаче: отображение кота Арнольда можно переформулировать так, чтобы избежать использования операции взятия модуля. Для этого вместо p и x введем новые переменные

$$K = \exp(2\pi i p) \quad \text{и} \quad A = \exp(2\pi i x), \quad (3.1)$$

так что отображение (1.1) принимает вид

$$K' = KA, \quad A' = AK'. \quad (3.2)$$

С учетом этого замечания, описание динамики в представлении Гейзенберга целесообразно формулировать в терминах операторов, отвечающих величинам K и A . Как сейчас будет ясно, это *операторы конечного сдвига по координате и импульсу*, известные как *операторы Вейля – Гейзенберга* [19,20].

Рассмотрим оператор $K_a = \exp((i/\hbar)ap)$, где $p = -i\hbar\partial/\partial x$ – оператор импульса, a – произвольное вещественное число. Если представить этот оператор в виде тейлоровского разложения, то очевидно его совпадение с оператором конечного сдвига на a :

$$K_a\psi(x) = \exp((i/\hbar)ap)\psi = \psi(x) + a\psi'(x) + (a^2/2)\psi''(x) + (a^3/6)\psi'''(x) + \dots = \psi(x+a). \quad (3.3)$$

В импульсном представлении действие оператора K_a отвечает просто умножению на экспоненту: $K_a\tilde{\psi}_p = \exp((i/\hbar)ap)\tilde{\psi}_p$.

Оператор сдвига по импульсу на b в координатном представлении определяется как умножение на экспоненту

$$A_b\psi(x) = \exp((i/\hbar)bx)\psi(x). \quad (3.4)$$

В импульсном представлении это оператор $A_b\tilde{\psi}_p = \exp((i/\hbar)bx)\tilde{\psi}_p$, где $x = i\hbar\partial/\partial p$.

Результат действия операторов K_a и A_b на функцию $\psi(x)$ зависит от их порядка:

$$K_a A_b \psi = \exp[(i/\hbar)(bx+ba)]\psi(x+a), \quad A_b K_a \psi = \exp[(i/\hbar)bx]\psi(x+a).$$

Это можно записать в виде перестановочного соотношения

$$K_a A_b = \exp[(i/\hbar)ba]A_b K_a,$$

которое для операторов конечного сдвига заменяет известное правило коммутации $px - xp = -i\hbar$ (и является его следствием).

Как уже говорилось, волновая функция, обладающая единичным периодом по координате и по импульсу, имеет вид гребенки δ -функций с шагом $1/N$ – и в координатном, и в импульсном представлении. Определим операторы сдвига на один шаг по координате и импульсу, взяв в качестве константы сдвига $1/N$ и полагая $\hbar = 1/(2\pi N)$:

$$K = \exp(2\pi ip), \quad A = \exp(2\pi ix). \quad (3.5)$$

При этом соотношение коммутации принимает вид

$$KA = \alpha AK, \quad \alpha = \exp(2\pi i/N). \quad (3.6)$$

Теперь у нас есть все необходимое, чтобы построить квантовый аналог отображения кота Арнольда в терминах операторов K и A . Мы просто заменяем в соотношении (3.2) величины K и A на соответствующие операторы и получаем *операторное отображение*

$$K' = KA, \quad A' = AK', \quad (3.7)$$

или, что то же самое,

$$K' = KA, \quad A' = AKA. \quad (3.8)$$

Таким образом, операторы K' и A' , отвечающие очередному шагу дискретного времени, выражены через операторы, определенные на предыдущем шаге. Чтобы новые операторы K' и A' по-прежнему можно было трактовать как операторы сдвига по координате и импульсу, для них должно быть справедливо то же самое коммутационное соотношение (3.6). Как нетрудно проверить, это действительно так:

$$K'A' = (KA)(AKA) = \alpha(AK)(AKA) = \alpha(AKA)(KA) = \alpha A'K'.$$

Поскольку для нашей системы вектор состояния представляется набором N

коэффициентов ψ_m , операторы K и A должны задаваться матрицами $N \times N$. Естественно определить их следующим образом:

$$(K\psi)_m = \psi_{m+1}, \quad (A\psi)_m = \alpha^m \psi_m, \quad (3.9)$$

что соответствует матрицам с элементами

$$K_{mn} = \delta_{m+1,n} \quad \text{и} \quad A_{mn} = \alpha^m \delta_{mn}, \quad m, n = 0, \dots, N-1, \quad (3.10)$$

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n \pmod{N}, \\ 0, & m \neq n \pmod{N}. \end{cases}$$

Как станет ясно в следующем разделе, схема квантования, исходящая из соотношений (3.7), (3.8), пригодна лишь для *нечетных* значений квантового параметра N . Именно этот случай только и обсуждается далее в основном тексте. Обобщение для четных N рассмотрено в приложении А.

В представлении Гейзенберга вектор состояния не зависит от времени, то есть в нашем случае от номера итерации, а операторы, отвечающие динамическим переменным, изменяются от итерации к итерации. Задавая в качестве начальных условий для операторного отображения (3.7) матрицы $K^{(0)}=K$ и $A^{(0)}=A$, рекуррентным образом находим матрицы $K^{(k)}$ и $A^{(k)}$ для последующих моментов дискретного времени k . Например, для $N=5$,

$$\begin{array}{cccccc} K^{(0)} & A^{(0)} & K^{(1)} & A^{(1)} & K^{(2)} & A^{(2)} \\ \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha^4 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{ccccc} 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{ccccc} 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & \alpha^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha^3 \\ \alpha^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^3 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

и т.д. Каждая матрица в этой последовательности получается просто как произведение двух предыдущих.

Из приведенного примера видно, что отличными от нуля каждый раз являются только матричные элементы, расположенные в одну линию, параллельно главной диагонали. На этом основании можно очень просто описать динамику операторов следующим образом. Положим

$$K_{mn}^{(k)} = \delta_{m+s,n} \alpha^{m+r}, \quad A_{mn}^{(k)} = \delta_{m+q,n} \alpha^{p+\mu}, \quad (3.11)$$

где s, r, p, q, μ, v – целые числа, зависящие от номера временного шага k и определенные по модулю N , и пусть при $k=0$ наложены условия, соответствующие начальным операторам (3.10):

$$s = 1, \quad r = 0, \quad p = 1, \quad q = 0, \quad v = 0, \quad \mu = 0. \quad (3.12)$$

Подставим (3.11) в (3.7) и произведем матричное умножение. Получаемые в результате новые матрицы имеют ту же форму (3.11), но с новыми параметрами s, \dots, v :

$$\begin{aligned} s' &= s+q, \quad q' = q+s', \quad r' = r+p, \quad p' = p+r' \pmod{N}, \\ v' &= v+\mu-rq, \quad \mu' = v'+\mu-ps' \pmod{N}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Заметим, что в соответствии с правилом коммутации (3.6), при всех k обязано выполняться равенство

$$ps - rq = 1. \quad (3.14)$$

Первые четыре уравнения (3.13) можно переписать в матричной форме

$$\begin{bmatrix} s & r \\ qp & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & r \\ qp & \end{bmatrix} \pmod{N}. \quad (3.15)$$

Условие (3.14) остается в силе при последовательных итерациях, поскольку детерминант матрицы $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ единичный.

Согласно (3.13), две пары целых чисел, s и q , r и p , определенных по модулю N , удовлетворяют уравнениям, совпадающим по виду с классическим отображением кота Арнольда (1.1), разница только в нормировке на 1 в (1.1) и на N в (3.13). Однако в силу того, что динамика происходит на конечном множестве целых чисел, она оказывается не хаотической, а периодической. Период зависит от N , и мы обозначим его $T(N)$. Это период цикла, стартующего из точки $p=1/N$, $x=0$, в классическом отображении (1.1).

Новый момент по сравнению с классикой состоит в появлении двух дополнительных переменных μ и ν . Они подчиняются уравнениям, в которых s , r , p , q играют роль периодического внешнего воздействия. Для нечетных N , которые здесь только и рассматриваются, μ и ν выражаются через остальные переменные

$$\mu = ((N+1)/2)(p-q-pq-1), \quad \nu = ((N+1)/2)(r-s-rs+1) \pmod{N}, \quad (3.16)$$

что проверяется непосредственно с помощью (3.12)–(3.14).

В качестве примера рассмотрим снова случай $N=5$. Эволюция параметров, определяющих операторы K и A , дается таблицей:

s	1 1 2 0 3 4 4 3 0 2 1...
q	0 1 3 3 1 0 4 2 2 4 0...
r	0 1 3 3 1 0 4 2 2 4 0... (далее повторение)
p	1 2 0 3 4 4 3 0 2 1 1...
μ	0 4 3 0 4 4 3 1 0 1 0...
ν	0 0 3 2 3 1 0 2 4 0 0...

Отсюда видно, что $T(5)=10$.

Поскольку операторы $K^{(k)}$ и $A^{(k)}$ полностью определяются числами s , r , p , q , μ , ν , они имеют тот же период изменения $T(N)$ в зависимости от дискретного времени k . Можно показать, что в представлении Шредингера с этим же периодом будет эволюционировать волновая функция (вектор состояния). Поэтому величину $T(N)$ естественно называть *квантовым периодом*¹.

На рис. 3 показана зависимость квантового периода от N для отображения кота Арнольда. Эта зависимость носит нерегулярный характер, но в среднем период увеличивается с ростом N .

Иногда нам будет полезно иметь

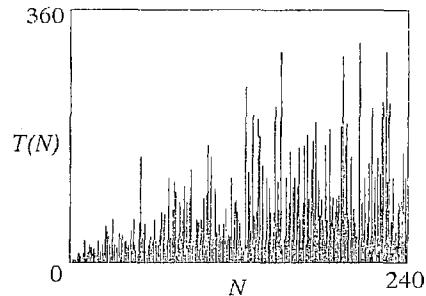


Рис. 3. Период возврата $T(N)$ для квантового отображения кота Арнольда. Представлены значения периода как для нечетных N (отображение (3.8)), так и для четных (отображение (A.2), определенное в приложении). Для отображения параболического типа ((3.20) и (A.10)) $T(N)=N$ при N нечетном и $2N$ при N четном. Для отображения эллиптического типа (3.22) $T=4$ при любом N .

¹ Для отображений, квантуемых по Ханнэю – Берри, понятие квантового периода было введено в их работе [15]. В общем случае он может быть равен или вдвое больше, чем период возврата в матричном рекуррентном отображении. Вторая возможность, однако, исключена, если N нечетное.

альтернативное обозначение для той же самой последовательности операторов $K^{(k)}, A^{(k)}$, но занумерованной в обратном порядке. Для этого будем пользоваться нижними индексами, то есть примем соглашение, что

$$K_{(k)} = K^{(T(N)-k)}, \quad A_{(k)} = A^{(T(N)-k)}. \quad (3.17)$$

Если выразить операторы, входящие в правую часть уравнений (3.8), через операторы, стоящие в левой части, можно получить форму записи операторного отображения, определяющую последовательность $K_{(k)}, A_{(k)}$ рекуррентным образом:

$$A_{(k+1)} = A_{(k)}K_{(k)}, \quad K_{(k+1)} = K_{(k)}^2 A_{(k)}. \quad (3.18)$$

Необходимо сделать важную оговорку, что поскольку операторы K и A не коммутируют, выбор операторного отображения в виде (3.8) не является единственным возможным. В равной степени допустимыми следовало бы признать другие его версии, получаемые перестановкой K и A в правой части уравнений (например, $K' = AK$, $A' = KAA$ или другие варианты). Хотя коммутационное соотношение (3.6) всегда позволяет вернуться к такому же как в (3.8) расположению операторов в правых частях уравнений, при этом появляются множители вида α в некоторой степени. На языке исходных переменных p и x эти множители отвечают аддитивным добавкам. Модификацию динамики вследствие выбора альтернативной версии операторного отображения можно представить как переопределение в каждый момент времени начала отсчета для координаты и импульса, причем величина квантового периода остается той же самой.

Добавим замечание, касающееся квантования линейного отображения на торе более общего вида (1.3). В случае, когда каждая из двух строк матрицы, задающей отображение, содержит четный элемент, имеется логически естественный выбор версии операторного отображения – использовать симметризованные комбинации K и A . Поскольку детерминант должен быть единичным, указанное условие означает, что матрица имеет форму

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{чет} & \text{нечет} \\ \text{нечет} & \text{чет} \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{bmatrix} \text{нечет} & \text{чет} \\ \text{чет} & \text{нечет} \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

В первом случае операторное отображение можно задать в виде $K' = K^{d/2} A b K^{d/2}$, $A' = A^{d/2} K c A^{d/2}$, а во втором $K' = A^{b/2} K a A^{b/2}$, $A' = K^{c/2} A d K^{c/2}$. Данный класс отображений был указан как квантуемый в первоначальной работе Ханнэя и Берри [15]. Хотя отображение кота Арнольда не относится к этому классу, построение состоятельной квантовой теории все-таки оказывается возможным, но при этом все соотношения должны быть сформулированы несколько по-разному для нечетных и четных N .

Чтобы иметь основу для сопоставления ситуаций, отвечающих хаотической и регулярной динамике классических аналогов, остановимся на квантовании отображений параболического и эллиптического типа (1.4) и (1.5).

Операторный аналог отображения (1.4) выберем в виде

$$K' = K, \quad A' = AK, \quad (3.20)$$

откуда с учетом определения (3.11) получаем

$$\begin{bmatrix} s & r \\ q & p \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & r \\ q & p \end{bmatrix} \quad (\text{mod } N). \quad (3.21)$$

$$v' = v, \quad \mu' = v + \mu - ps \quad (\text{mod } N).$$

Эти соотношения очень просты, так что с учетом начальных условий (3.12) легко находим, что $s=1, r=0, p=1, v=0, q=k, \mu=-k \pmod{N}$, где k – номер итерации. Квантовый период равен N .

В случае отображения (1.5) полагаем

$$K' = A, \quad A' = K^+, \quad (3.22)$$

где крестик означает операцию эрмитова сопряжения. Считая, что операторы представляются в виде (3.11), имеем $\mu=0, v=0$ и

$$\begin{bmatrix} s & r \\ q & p \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & r \\ q & p \end{bmatrix} \pmod{N}. \quad (3.23)$$

Квантовый период постоянен и равен 4.

Нерегулярная зависимость периода от квантового параметра N характерна, следовательно, только для гиперболического случая и, очевидно, ассоциируется с наличием хаоса в классическом пределе.

4. Переход к представлению Шредингера

Пусть $|\phi\rangle$ и $|\psi\rangle$ – некоторые векторы, L – линейный оператор, и $|\phi\rangle=L|\psi\rangle$. Пусть U – другой линейный оператор, посредством которого определим преобразованные векторы $|\phi'\rangle=U|\phi\rangle$, $|\psi'\rangle=U|\psi\rangle$. Каким соотношением они будут связаны? Подействовав на исходное уравнение слева оператором U и предполагая, что определен обратный оператор U^{-1} , можно записать результат в виде $U|\phi\rangle=ULU^{-1}U|\psi\rangle$, или $|\phi'\rangle=ULU^{-1}|\psi'\rangle$. Можно сказать, что при переходе в пространство «штрихованных» векторов оператор L преобразуется в оператор $L'=ULU^{-1}$.

В квантовой механике особую роль играют преобразования, задаваемые унитарными операторами U . Они не нарушают структуры основных уравнений динамики и соответствует каноническим преобразованиям переменных в классической механике [7,8,10]. В нашем случае конечномерного пространства состояний каждое такое преобразование представляется унитарной матрицей размера $N \times N$, то есть матрицей, у которой эрмитово сопряженная матрица совпадает с обратной, а детерминант по модулю равен 1.

В представлении Гейзенberга операторы $K^{(k)}$ и $A^{(k)}$ эволюционировали в дискретном времени k , тогда как векторы состояния $|\psi\rangle$, на которые можно было действовать этими операторами, не зависели от времени. Произведем в каждый момент времени k такое унитарное преобразование U^k

$$|\psi_k\rangle = U^k |\psi\rangle, \quad (4.1)$$

чтобы преобразованные операторы не менялись во времени, то есть

$$U^k A^{(k)} U^{-k} = A \quad \text{и} \quad U^k K^{(k)} U^{-k} = K \quad (4.2)$$

или

$$U^k A^{(k)} = A U^k \quad \text{и} \quad U^k K^{(k)} = K U^k. \quad (4.3)$$

В частности, на одном временном шаге, $U A' U^{-1} = A$ и $U K' U^{-1} = K$ или

$$U A' = A U \quad \text{и} \quad U K' = K U, \quad (4.4)$$

где A' и K' есть операторы, выраженные через A и K посредством соответствующего операторного отображения.

Выражение (4.1), характеризующее эволюцию вектора состояния, можно переписать в виде рекуррентного уравнения

$$|\psi_{k+1}\rangle = U|\psi_k\rangle. \quad (4.5)$$

Оператор U , определяющий преобразование состояния за один шаг дискретного времени, называют *оператором эволюции* или *пропагатором*. О такой формулировке квантового описания системы говорят как о *представлении Шредингера*.

Заметим, что при обратной во времени нумерации операторов K и A справедливы очевидные из (4.3) соотношения

$$U^k A = A_{(k)} U^k \quad \text{и} \quad U^k K = K_{(k)} U^k. \quad (4.6)$$

Найдем в явном виде матрицу оператора эволюции для отображения кота Арнольда. Согласно (3.10) матричные элементы операторов K и A есть $K_{m,n} = \delta_{m+1,n}$, $A_{m,n} = \delta_{m,n} \alpha^n$, а из операторного отображения (3.7) за один временной шаг получаем

$$K'_{m,n} = \sum_k K_{m,k} A_{k,n} = \sum_k \delta_{m+1,k} \delta_{k,n} \alpha^n = \delta_{m+1,n} \alpha^n, \quad (4.7)$$

$$A'_{m,n} = \sum_k A_{m,k} K'_{k,n} = \sum_k \delta_{m,k} \alpha^k \delta_{k+1,n} \alpha^n = \alpha^{m+n} \delta_{m,n-1}. \quad (4.8)$$

Далее из $U K' = K U$ следует

$$\sum_k U_{mk} \delta_{k+1,n} \alpha^n = \sum_k \delta_{m+1,k} U_{kn}, \quad \text{то есть} \quad U_{m,n-1} \alpha^n = U_{m+1,n}. \quad (4.9)$$

Из $U A' = A U$ аналогичным образом имеем

$$\sum_k U_{mk} \alpha^{k+n} \delta_{k,n-1} = \sum_k \delta_{m,k} \alpha^k U_{kn}, \quad \text{то есть} \quad U_{m,n-1} \alpha^{2n-m-1} = U_{m,n}. \quad (4.10)$$

Эти два соотношения позволяют найти все матричные элементы через U_{00} . Из первого выражения последовательно получаем диагональные элементы: $U_{m+1,m+1} = U_{m,m} \alpha^{m+1}$, то есть $U_{m,m} = U_{00} \alpha^{(1+2+\dots+m)} = U_{00} \alpha^{m(m+1)/2}$. Далее, зная по одному элементу в каждой строке, с помощью второго соотношения находим элементы всей строки:

$$U_{mn} = U_{00} \alpha^{m(m+1)/2 - mn + n^2}. \quad (4.11)$$

Чтобы оператор U был унитарным, следует выбрать U_{00} так, чтобы $|\text{Det}(U)|=1$. Как можно показать, это обеспечено при $|U_{00}|=N^{-1/2}$. Фазовый множитель может быть произвольным, поскольку он не влияет на наблюдаемые величины (его выбор определяет начало отсчета для квазиэнергии, см. раздел 7). Удобно, тем не менее, конкретизировать фазовый множитель, так, чтобы след матрицы U был действительным положительным числом. Для вычисления следа используем соотношение для гауссовой суммы [15,18]:

$$\begin{aligned} \text{Tr} U &= \sum_{m,n} U_{00} \alpha^{(m^2+mn)/2} = U_{00} \sum_{m,n} \exp[(i\pi/N)(m^2+m)] = \\ &= U_{00} N^{1/2} \exp(i\pi/4 - i\pi/(4N)) = U_{00} N^{1/2} \alpha^{-1/8} \exp(i\pi/4). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Положим $U_{00}=N^{-1/2} \alpha^{1/8} \exp(-i\pi/4)$, тогда

$$\begin{aligned} U_{mn} &= \alpha^{1/8} \exp(-i\pi/4) \alpha^{m(m+1)/2 - mn + n^2} N^{-1/2} = \\ &= N^{-1/2} \exp\{(\pi i/N)[m(m+1) - 2mn + 2n^2 + 1/4] - i\pi/4\}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

и при этом $|\text{Det}(U)|=1$ и $\text{Tr}(U)=1$. Например, для $N=5$

$$U = \frac{\alpha^{1/8} \exp(-i\pi/4)}{5^{1/2}} \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^4 & \alpha^4 & \alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha^3 & \alpha^2 & \alpha^3 \\ \alpha^3 & \alpha^2 & \alpha^3 & \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha^4 & \alpha^4 & \alpha & 1 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha & \alpha^2 & 1 \end{pmatrix}, \quad U^{-1} = \frac{\alpha^{-1/8} \exp(i\pi/4)}{5^{1/2}} \begin{pmatrix} 1 & \alpha^4 & \alpha^2 & \alpha^4 & 1 \\ \alpha^4 & \alpha^4 & \alpha^3 & \alpha & \alpha^3 \\ \alpha & \alpha^2 & \alpha^2 & \alpha & \alpha^4 \\ \alpha & \alpha^3 & \alpha^4 & \alpha^4 & \alpha^3 \\ \alpha^4 & \alpha^2 & \alpha^4 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

В этом месте становится понятной оговорка, сделанная в предыдущем разделе. Обнаруживается, что при четных N найденные выражения непригодны, так как по первому индексу матричные элементы U_{mn} не обладают периодом N (то есть после первого же шага по времени волновая функция перестала бы удовлетворять постулированному условию периодичности на торе). В приложении А показано, что это можно исправить надлежащим переопределением операторного отображения.

Как и для классического отображения кота Арнольда (раздел 1), эволюцию квантовой системы можно представить в две стадии («толчок» и «распространение»).

Стадия толчка в терминах операторов Вейля – Гейзенберга описывается отображением $K' = KA$, $A' = A$. Пусть V – оператор эволюции для этой стадии. Подставляя матричные элементы (3.10), из соотношений $VA' = AV$, $VK' = KV$ получаем $V_{m,n-1}\alpha^n = V_{m+1,n}$ и $V_{m,n}\alpha^{n-m} = V_{m,n}$. Второе уравнение означает, что V диагональная матрица, а первое позволяет выразить все ее ненулевые элементы через V_{00} . Чтобы матрица была унитарной, положим $|V_{00}| = 1$, а фазовый множитель выберем так, чтобы след был действительным положительным числом. Тогда

$$V_{mn} = \exp(-i\pi/4) \alpha^{m(m+1)/2 + 1/8} \delta_{mn}. \quad (4.14)$$

Для стадии распространения операторное отображение запишем в виде $K' = K$, $A' = AK$, а оператор эволюции обозначим W . Из $WA' = AW$ следует, что $W_{m,n-1}\alpha^{n-1} = W_{m,n}$. Из $WK' = KW$ имеем $W_{m,n-1} = W_{m+1,n}$, то есть вдоль любой линии параллельной главной диагонали все элементы матрицы равны. Полагая $W_{00} = 1/N^{1/2}$, получаем

$$W_{mn} = \alpha^{(m-n)^2/2 + (m-n)/N^{1/2}}. \quad (4.15)$$

Оператор W диагонализуется переходом в импульсное представление, в котором его матрица выглядит как эрмитово сопряженная матрица V . Иными словами, операторы W и V связаны соотношением $W = F^* V^* F$, где F и F^* – операторы прямого и обратного преобразования Фурье.

Для отображения кота Арнольда оператор эволюции U можно, следовательно, записать в виде

$$U = WV \quad \text{или} \quad U = F^* V^* F V. \quad (4.16)$$

Непосредственным вычислением проверяется, что результат матричного умножения согласуется с выражением (4.13).

В заключение раздела несколько слов о других отображениях тора. Поскольку операторное отображение параболического типа (3.20) совпадает по виду с отображением на стадии распространения, его оператор эволюции представляется матрицей V (4.15). Чтобы получить оператор эволюции Y для отображения эллиптического типа (3.22), заметим, что каноническое преобразование $p' = -x$, $x' = p$ в квантовой задаче соответствует просто переходу из импульсного в координатное представление, то есть обратному преобразованию Фурье. Таким образом,

$$Y_{mn} = F^*_{mn} = \alpha^{mn}/N^{1/2}. \quad (4.17)$$

5. Динамика вектора состояния – компьютерные иллюстрации и аналитическое рассмотрение

До сих пор мы занимались в сущности разработкой квантового формализма для отображений на торе. Было бы интересно теперь получить впечатление о характере квантовой динамики и различии между системами, классические аналоги которых демонстрируют хаос или регулярное поведение.

Если задаться конкретным начальным вектором состояния $|\psi_0\rangle$, то можно отследить, как он будет меняться шаг за шагом при многократном действии матрицы пропагатора. Рис. 4 иллюстрирует эволюцию волнового пакета, имеющего в начальный момент минимальную ширину по координате и импульсу, допускаемую принципом неопределенности. Полученные численно результаты представлены в виде пространственно–временных диаграмм, на которых тона серого цвета кодируют квадрат модуля волновой функции. По горизонтальной оси отложен номер пространственной позиции m , а по вертикали вниз – дискретное время. Чтобы сравнить динамику систем, демонстрирующих в классике хаос и регулярное поведение, приведены диаграммы для отображений гиперболического, параболического и эллиптического типа.

Обратим внимание, что эволюция во времени во всех случаях периодическая, причем период возврата совпадает с тем, который был введен в разделе 3 при обсуждении динамики операторов Вейля – Гейзенberга. С точки зрения пространственного распределения волновых функций, никакой хаотизации не видно даже в гиперболическом случае. Для отображений всех трех классов более характерным кажется как раз наличие в каждый момент вдоль пространственной оси достаточно регулярного набора чередующихся интерференционных максимумов и минимумов.

Можно отметить, что для гиперболического отображения эволюция волнового пакета сопровождается его очень быстрым расширением на первых же

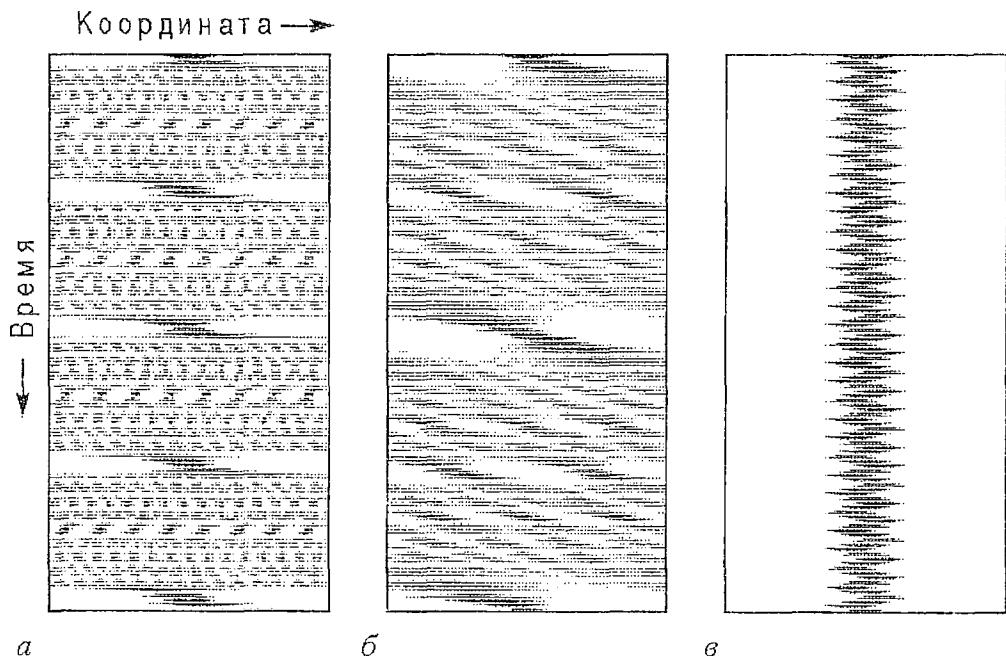


Рис. 4. Пространственно–временные диаграммы, иллюстрирующие динамику волнового пакета в квантовых системах, отвечающих отображениям на торе гиперболического (a), параболического (b) и эллиптического (c) типов. Начальное условие задано в виде $\psi_m = \exp(-\pi m^2/N) \cdot \exp(2\pi i P m/N)$, где $N=59$, а начальный сдвиг по импульсу $P=3$. Начало отсчета пространственной координаты в центре диаграмм. Квадрат модуля волновой функции кодируется тонами серого цвета

шагах дискретного времени. После этого распределение амплитуды по длине системы становится более или менее однородным, хотя встречаются моменты времени, когда отклонение от однородности значительное, и распределение концентрируется в нескольких узких интервалах (темные пятна на светлом фоне). Для параболического отображения расплывание пакета происходит гораздо медленнее. Когда характерная ширина пакета становится сравнимой с длиной системы, на краях появляются темные и светлые интерференционные полосы. В дальнейшем эта интерференционная картина покрывает всю систему, изменяясь во времени сравнительно медленно и регулярным образом. Для эллиптического отображения волновой пакет не расплывается и просто совершает колебания с периодом в четыре итерации.

Представляется важным обсудить, как соотносятся характер эволюции волновой функции квантовой системы и динамика операторов Вейля – Гейзенберга, связанная весьма непосредственно с классическим отображением. Имея в виду этот вопрос, применим к начальным задачам следующий единый подход.

Предположим, что из операторов K и A с помощью сложения и умножения построен такой оператор Z , что задаваемое в качестве начального условия состояние $|\psi^{(k)}\rangle$ является собственным вектором этого оператора:

$$Z|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle, \quad (5.1)$$

и собственное число λ невырождено. Подействуем на это уравнение слева оператором эволюции за k временных шагов U^k и представим результат в виде $U^k Z U^{-k} U^k |\psi\rangle = \lambda U^k |\psi\rangle$. Отсюда следует, что вектор состояния в момент k , $|\psi^{(k)}\rangle = U^k |\psi\rangle$, находится из решения задачи на собственные векторы оператора $Z_{(k)} = U^k Z U^{-k}$ для собственного числа λ . Решение однозначно (с точностью до фазового множителя) в силу того, что собственное число, по предположению, невырождено, а унитарное преобразование оператора Z не меняет его спектр. Заметим теперь, что в представлении Гейзенберга оператор Z в момент времени k есть $Z^{(k)} = U^{-k} Z U^k$. Очевидно, $Z_{(k)}$ – это та же самая последовательность операторов, но занумерованная в обратном порядке. Оператор $Z_{(k)}$ выражается посредством сложения и умножения через операторы $A_{(k)}$ и $K_{(k)}$ точно таким же образом, как оператор Z выражался через A и K (см. пример в приложении В).

Далее этим методом будут рассмотрены задачи об эволюции во времени, когда в качестве начального условия берется

- пространственно–локализованное состояние,
- два дельта–пика, разнесенных по координате на некоторое расстояние (аналог знаменитого квантово–механического опыта с интерференцией от двух щелей),
- волновой пакет с шириной по координате и импульсу минимально допускаемой принципом неопределенности.

5.1. Задача об эволюции пространственно–локализованного начального состояния. Состояние $|\psi\rangle$, локализованное на позиции $m=l$, есть не что иное как собственный вектор оператора A с собственным числом $\lambda_i=\alpha_i^l$:

$$A|\psi\rangle = \lambda_i|\psi\rangle. \quad (5.2)$$

Следовательно, вектор $|\psi^{(k)}\rangle = U^k |\psi\rangle$, описывающий состояние в момент времени k , будет собственным вектором оператора $A_{(k)}$ с тем же собственным числом λ_i :

$$A_{(k)}|\psi^{(k)}\rangle = \lambda_i|\psi^{(k)}\rangle. \quad (5.3)$$

Все N собственных чисел λ , невырождены, поэтому каждый собственный вектор находится однозначно с точностью до фазового множителя.

Матричные элементы оператора $A_{(k)}$ представляются в виде $(A_{(k)})_{m,n} = \delta_{m+q,n} \alpha^{p(m+q)+\mu}$, где параметры p , q , μ отвечают k -му шагу итерации в обратном времени уравнений (3.13) – кот Арнольда, (3.21) – отображение параболического типа, (3.23) – отображение эллиптического типа. Уравнение (5.3), следовательно, принимает вид

$$\Psi_{m+q} \alpha^{p(m+q)+\mu} = \lambda_l \Psi_m, \quad (5.4)$$

или

$$\Psi_{m+q} = c_m \Psi_m, \quad (5.5)$$

где $c_m = \alpha^{pm-l+\mu}$, причем предполагается выполненным условие цикличности $\Psi_{m+N} = \Psi_m$. Задавшись значением ψ в некоторой точке m_0 , с помощью (5.5) последовательно получаем значения в точках $m_0-q, m_0-2q, \dots \pmod{N}$. Пусть наибольший общий делитель для чисел q и N есть $g = \gcd(q, N)$, и пусть $N_g = N/g$ и $q_g = q/g$. Тогда после N_g шагов круг замкнется, так как $m_0+qN_g = m_0 \pmod{N}$. Чтобы решение Ψ_m было

нестривиальным, начальное значение m_0 должно быть выбрано так, чтобы $\prod_{\alpha=0}^{N_g-1} c_{m_0-\alpha q} = 1$.

Подставляя сюда выражение для c_m и выполняя в показателе суммирование арифметической прогрессии, находим, что должно выполняться равенство

$$\alpha^{N_g(m_0p-l+\mu)-pqN_g(N_g-1)/2} = 1. \quad (5.6)$$

Используя (3.14), можно показать, что это обеспечено при выборе

$$m_0 = g + s(l - \mu + pq(N_g - 1)/2). \quad (5.7)$$

Из (5.5) следует, что только в N_g точках $m_0, m_0-q, \dots, m_0-(N_g-1)q \pmod{N}$ значения Ψ_m ненулевые. Поскольку $|c_m|=1$, все они отличаются только фазой, и, как следует из условия нормировки, по модулю должны равняться $N^{-1/2}$. С помощью (5.4) находим

$$\Psi_{m_0-\alpha q} = N_g^{-1/2} \alpha^{p(m_0p-l+\mu)-pq\alpha(\alpha-1)/2+\varphi}, \quad (5.8)$$

где φ – произвольная фазовая постоянная².

Найденные соотношения применимы и в двух крайних частных случаях.

1. Если q и N – взаимно простые, то $g=1, N_g=N$; при всех m от 0 до $N-1$ имеем $|\Psi_m|=N^{-1/2}$. При этом m_0 можно взять любым, например, $m_0=0$.

2. Если $q=0$, то $g=N, N_g=1$, и $\Psi_m=\delta_{m_0,m}$.

Резюмируем вытекающую из проведенных рассуждений связь между характером эволюции волновой функции и классическим отображением.

Для квантовой системы в представлении Гейзенберга операторы сдвига по координате и импульсу выражаются через две пары определенных по модулю N целочисленных переменных, (s, q) и (r, p) , и каждая пара подчиняется динамическим уравнениям, совпадающим по виду с исходным классическим отображением. Одна из переменных q особенно существенна с точки зрения структуры волновой функции в координатном представлении: волновая функция становится «разреженной» (амплитуды ϕ_m отличны от нуля только на некотором множестве

² На самом деле достаточно найти собственный вектор для какого-нибудь одного значения l , например, $l=0$, а остальные векторы можно получить из него действием оператора $K_{(k)}$ в степени от 1 до $N-2$. Расположив найденные векторы в виде столбцов матрицы, получаем матрицу U^k . Указанный способ вычисления (с точностью до общего фазового множителя) требует только знания операторов $A_{(k)}$ и $K_{(k)}$. Процедура же их получения с помощью рекуррентных соотношений для параметров s, \dots, v гораздо экономичнее, нежели «любовое» k -кратное перемножение матриц U размера $N \times N$.

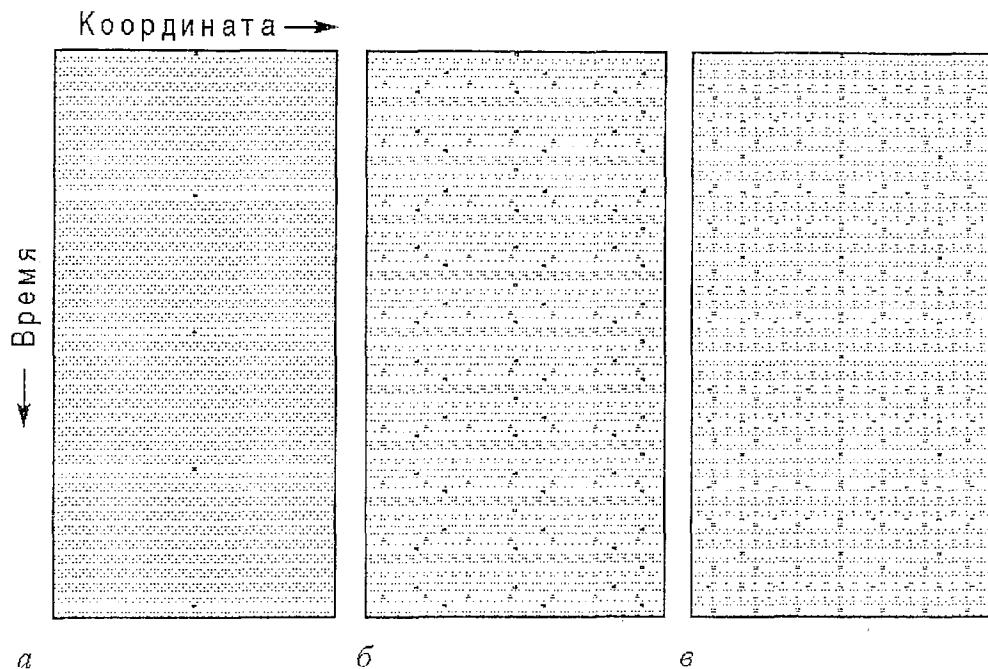


Рис. 5. Диаграммы, иллюстрирующие квантовую динамику состояния, исходно локализованного в начале координат: *а* – отображение кот Аrnольда, $N=59$, *б* – отображение кот Аrnольда, $N=63$, *в* – отображение параболического типа, $N=63$

равноотстоящих позиций), если q имеет с квантовым параметром N общий делитель. Таким образом, с точки зрения квантовой динамики на торе, важна арифметическая природа числа N , а именно, структура разложения N на простые множители.

В случае параболического отображения (3.20) эта структура полностью раскрывается в процессе динамики, поскольку переменная q пробегает в течение квантового периода все целочисленные значения от 0 до $N-1$. Доля моментов времени, когда волновая функция разрежена, дается отношением $\phi(N)/N$, где ϕ – известная в теории чисел функция Эйлера³. С другой стороны, для эллиптического отображения (3.22) упомянутая арифметическая структура числа N вообще несущественна: q оказывается попарно взаимно простым с N , то есть волновая функция осциллирует между двумя возможными ситуациями – полной локализации и полной делокализации. Для гиперболического отображения кота Аrnольда переменная q в течение квантового периода посещает лишь часть возможных значений, и при этом не проявляет видимой регулярности. Соответственно, в пределах квантового периода ситуации разреживания и полной делокализации волновой функции чередуются хаотически. Таким образом, в этом последнем случае арифметическая структура числа N существенна, но ее проявление замаскировано.

На рис. 5 можно видеть, как в процессе динамики сменяют друг друга ситуации полной локализации, прореживания и полной делокализации.

Если число N простое, то картина выглядит наименее содержательной (рис. 5, *а*): чаще всего волновая функция полностью делокализована (амплитуда равномерно распределена по координате) и лишь один или два раза за период наступает локализация в одной точке. Далее мы увидим, что в задачах с другими начальными условиями связь между арифметическими свойствами числа N и характером квантовой эволюции обнаруживается и для простых N .

³ По определению, $\phi(N)$ есть количество натуральных чисел от 1 до $N-1$, являющихся взаимно простыми с N .

5.2. Задача об эволюции волновой функции в виде двух дельта-пиков. В большинстве учебников квантовой механики почетное место занимает описание опыта с интерференцией от двух щелей [9]. Для квантовых отображений на торе аналогом этого опыта служит задача об эволюции в дискретном времени волновой функции, имевшей в начальный момент вид двух дельта-пиков, разнесенных по координате на некоторое расстояние. На следующих шагах дискретного времени суперпозиция волновых функций, порожденных этими двумя источниками, образует некоторую одномерную интерференционную картину, изменяющуюся от шага к шагу. Если один дельта-пик находился в начальный момент на позиции l_1 , а второй – на позиции l_2 , то волновая функция будет определяться линейной комбинацией двух составляющих, задаваемых соотношениями вида (5.8).

Обсудим случай простых N , который оказывается содержательным и несложным для анализа. Тогда для любого целого q от 1 до $N-1$ можно найти лежащее в этих же пределах число \bar{q} , являющееся обратным по модулю N , то есть такое, что $\bar{q}q=1 \pmod{N}$ ⁴. Согласно малой теореме Ферма, $\bar{q}=(q)^{N-2} \pmod{N}$. При этом, разумеется, q и N взаимно простые, и $g=\gcd(q, N)=1$. Полагая в (5.8) $\alpha=-\bar{q}m$, $m_0=0$, $N_g=N$, получим

$$\Psi_m = N^{-1/2} \alpha^{\bar{q}ml} (\bar{q} - \bar{q}m)^{-pq[(\bar{q}m)^2 + \bar{q}m]/2 + \varphi}. \quad (5.9)$$

Суперпозиция составляющих, порождаемых двумя начальными дельта-пиками имеет вид

$$\begin{aligned} \Psi_m &= \frac{(\alpha^{\bar{q}ml_1} + \alpha^{\bar{q}ml_2})}{(2N)^{1/2}} \alpha^{-\bar{q}m\bar{q} - pq[(\bar{q}m)^2 + \bar{q}m]/2 + \varphi} = \\ &= (2/N)^{1/2} |\cos(\pi m \bar{q} (l_1 - l_2)/N + \text{const})|. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Отсюда видно, что комбинация $\bar{q}|l_1 - l_2|$ играет роль волнового числа пространственной интерференционной картины. Обратившись к рекуррентным уравнениям (3.13), (3.21), (3.23), можно видеть, как эволюционирует эта величина во времени для различных модельных отображений.

Для параболического отображения q пробегает за период все числа от 1 до $N-1$. Соответственно, те же значения, но в другом порядке, пробегает величина \bar{q} . Динамика как бы разворачивает перед наблюдателем присущую числу N арифметическую структуру, закодированную в порядке появления различных чисел среди обратных к последовательным целым. Напротив, динамика отображения эллиптического типа совсем не несет информации об этой структуре: каким бы ни было число N , величина q пробегает всегда одни и те же значения 0, -1, 0, 1. В гиперболическом случае на временах меньших периода возврата последовательность q носит хаотический характер. Соответственно, обратное число, \bar{q} , также беспорядочно блуждает по своему множеству значений, тем самым маскируя упомянутую арифметическую структуру, ассоциирующуюся с числом N .

Итак, взаимосвязь между квантовой эволюцией и классической динамикой проявляется в том, как изменяется во времени пространственный период интерференционной картины. Для отображения кота Арнольда это изменение на конечном интервале времени, в пределах одного полупериода, выглядит нерегулярным, хаотическим. Для отображения параболического типа оно более плавное и регулярное. Для отображения эллиптического типа распределение в виде двух дельта-пиков повторяется на каждом втором шаге итераций, а на промежуточных шагах имеет место интерференционная картина с одним и тем же пространственным периодом (рис. 6).

⁴ Исключительный случай $q=0$ соответствует, как можно показать, возврату распределения волновой функции к конфигурации из двух дельта-пиков.

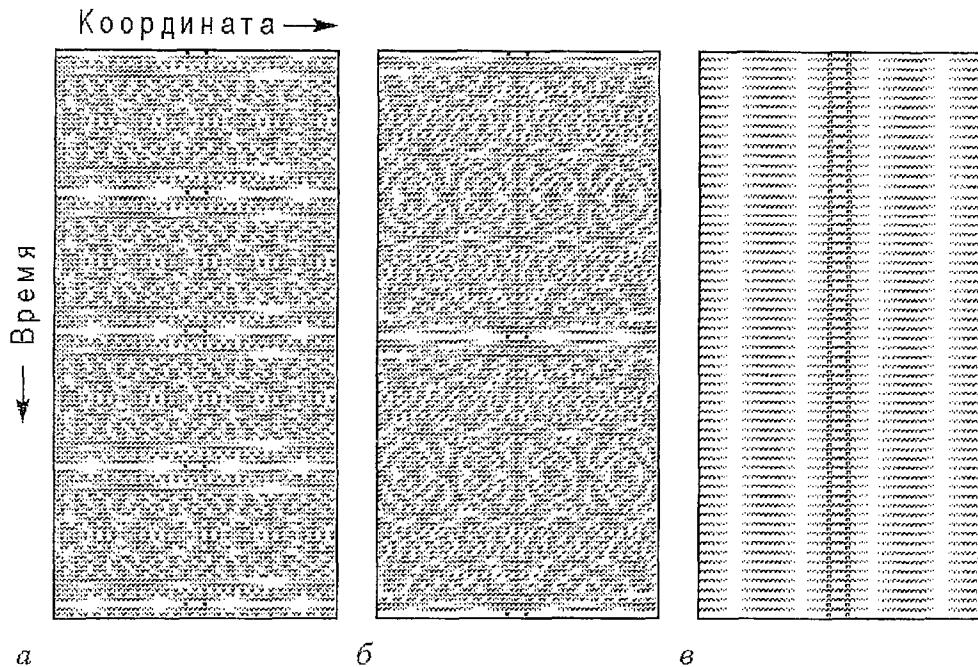


Рис. 6. Аналог квантово-механического опыта с двумя щелями: эволюция во времени интерференционной картины от двух дельта-образных источников для отображений гиперболического (a), параболического (b) и эллиптического (c) типов; $N=59$, $l_1=2$, $l_2=-2$

5.3. Задача об эволюции волнового пакета. Одной из важных нестационарных задач в квантовой механике всегда считалось рассмотрение эволюции волновых пакетов, то есть квантовых состояний, локализованных и по координате, и по импульсу (разумеется, в той мере, в какой это допускается принципом неопределенности). Исторически, одна из причин состояла в том, что исследователи долгое время старались примирить или как-то увязать квантово-механический способ описания с представлением о локализованных классических частицах. По теореме Эрнеста, при очень общих предположениях движение «центра масс» волнового пакета (в смысле средних значений координаты и импульса) происходит по классической траектории [7]. В свое время Шредингер построил для гармонического осциллятора состояния в виде гауссова волнового пакета, эволюционирующего во времени без изменения формы и совершающего колебания, как классическая частица; сейчас такие образования называют *когерентными состояниями* [21,22]. Обнаруженный Шредингером тип поведения оказался нехарактерным для систем более общего вида: чаще всего эволюция волновой функции сопровождается расплыванием в пространстве. В этом контексте интересно рассмотреть динамику волновых пакетов под действием квантовых отображений на торе и обсудить, как проявляется наличие хаоса в отображении ката Арнольда.

Чтобы ввести в рассмотрение когерентные состояния, сначала определяют состояние, центрированное в начале координат как собственный вектор оператора $a=(x+ip)(2\hbar)^{1/2}$ с нулевым собственным числом [22]. В координатном представлении уравнение $a|\psi\rangle=0$ имеет вид $x\psi+\hbar d\psi/dx=0$, откуда $\psi\propto\exp[-x^2/(2\hbar)]$. Далее строятся состояния, смещенные по импульсу и координате на произвольные величины p и x как результат действия операторов сдвига: $|\psi_{px}\rangle=\exp(i(px-xp)/\hbar)|\psi\rangle$.

Изящное обобщение, пригодное для отображений на торе, принадлежит Сарасено [23,6]. Он предложил ввести разностный аналог оператора a и определить центрированное в начале координат состояние уравнением, которое в наших обозначениях имеет вид

$$(A - A^+ + i(K - K^+))|\psi\rangle = 0. \quad (5.11)$$

Состояния, смещенные на P позиций по импульсу и Q позиций по координате могут быть получены с помощью оператора $K^+ Q A^P$. Подействовав этим оператором на уравнение (5.11) и учитывая коммутационное соотношение (3.6), можно убедиться, что смещенное состояние $|\psi_{PQ}\rangle = K^+ Q A^P |\psi\rangle$ удовлетворяет уравнению

$$[\alpha^- Q A - \alpha Q A^+ + i(\alpha^- P K - \alpha^P K^+)]|\psi_{PQ}\rangle = 0. \quad (5.12)$$

Обратимся теперь к общей схеме, сформулированной в начале раздела. Если в начальный момент вектор состояния удовлетворяет уравнению (5.11), то состояние в момент времени k будет получаться из уравнения

$$[A_{(k)} - A_{(k)}^+ + i(K_{(k)} - K_{(k)}^+)]|\psi^{(k)}\rangle = 0. \quad (5.13)$$

Если нас интересует случай смещенного пакета, то подействуем на это уравнение оператором $K^+ Q_{(k)} A^P_{(k)}$. Поскольку коммутационные соотношения для $K_{(k)}$ и $A_{(k)}$ такие же, как для операторов K и A , получаемое уравнение совпадает по структуре с (5.12):

$$[\alpha^- Q_{(k)} A_{(k)} - \alpha Q_{(k)} A_{(k)}^+ + i(\alpha^- P_{(k)} K_{(k)} - \alpha^P K_{(k)}^+)]K_{(k)}^+ Q A^P_{(k)} |\psi^{(k)}\rangle = 0. \quad (5.14)$$

Следовательно, собственный вектор оператора, фигурирующего в (5.12), $|\psi_{PQ}\rangle = K^+ Q A^P |\psi\rangle$, в момент времени k перейдет в собственный вектор оператора (5.14), $|\psi_{PQ}^{(k)}\rangle = K^+ Q_{(k)} A^P_{(k)} |\psi^{(k)}\rangle$.

Можно показать, что решение $|\psi_{PQ}^{(k)}\rangle$ с точностью до фазового множителя находится из решения для центрированного пакета $|\psi^{(k)}\rangle$ сдвигом по координате и импульсу на величины $Q^{(k)}$ и $P^{(k)}$, которые получаются на k -ом шаге итераций классического отображения, определенного на дискретной решетке $N \times N$.

Докажем последнее утверждение, являющееся частным случаем теоремы Эренфеста, для отображения ката Арнольда. С помощью операторного отображения (3.18) получаем $K^+ Q_{(1)} A^P_{(1)} = [A^+(K^+)^2] Q [A K^+]^P$. Любые перестановки операторов в правой части последнего уравнения приводят только к появлению фазового множителя (в силу коммутационного соотношения (3.6)), так что

$$\begin{aligned} K^+ Q_{(1)} A^P_{(1)} &= (\text{фазовый множитель}) \cdot (K^+)^{P+2} Q A^{P+Q} = \\ &= (\text{фазовый множитель}) \cdot (K^+)^Q A^{P+Q}. \end{aligned}$$

Отсюда ясно, что справедливо представление

$$K^+ Q_{(i)} A^P_{(i)} = (\text{фазовый множитель}) \cdot (K^+)^Q A^{P+Q},$$

где $P^{(i)}$ и $Q^{(i)}$ удовлетворяют рекуррентным уравнениям

$$P^{(i+1)} = P^{(i)} + Q^{(i)}, \quad Q^{(i+1)} = P^{(i)} + 2Q^{(i)} \pmod{N}. \quad (5.15)$$

Тем самым доказательство завершено:

$$|\psi_{PQ}^{(k)}\rangle = K^+ Q_{(k)} A^P_{(k)} |\psi^{(k)}\rangle = (\text{фазовый множитель}) \cdot (K^+)^Q A^{P+Q} |\psi^{(k)}\rangle.$$

Обсудим теперь процесс распыления центрированного пакета, заданного уравнением (5.11). В координатном представлении это уравнение выглядит как набор соотношений, связывающих значения волновой функции в различных пространственных узлах $m=0, \dots, N-1$:

$$\Psi_{m+1} - \Psi_{m-1} + 2\Psi_m \sin(2\pi m N^{-1}) = 0, \quad (5.16)$$

где подразумевается условие цикличности $\psi_{m+N}=\psi_m$. Произвольно полагая $\psi_0=1$, можно найти остальные ψ_m из системы $N-1$ линейных уравнений, а затем отнормировать решение на единицу ($\langle\psi|\psi\rangle=1$). При $N\rightarrow\infty$ построенное таким образом состояние в области своей преимущественной локализации приближается к гауссиане, поскольку в этом пределе исчезает различие между разностным оператором Сарасено и дифференциальным оператором a . Если считать, что значения индекса m отнесены к интервалу, центрированному в нуле, то область локализации дается неравенством $|m|\lesssim N^{1/2}$.

Обратимся к уравнению (5.13), определяющему состояние в момент времени k , и перепишем его в явном виде, используя представление матричных элементов операторов

$$(A_{(k)})_{m,n}=\delta_{m+q,n}\alpha^{pn+\mu}, \quad (A^+_{(k)})_{m,n}=\delta_{m,n+q}\alpha^{-pm-\mu}, \quad (5.17)$$

$$(K_{(k)})_{m,n}=\delta_{m+s,n}\alpha^{rn+\nu}, \quad (K^+_{(k)})_{m,n}=\delta_{m,n+s}\alpha^{-rm-\nu}. \quad (5.18)$$

В качестве параметров s,\dots,ν сюда должны быть подставлены величины, отвечающие k -му шагу итераций соответствующего отображения в обратном времени (для ката Арнольда см. формулы (3.13), (3.16)). В результате получим

$$\psi_{m+s}\alpha^{r(m+s)+\nu} - \psi_{m-s}\alpha^{-rm-\nu} + i\psi_{m-q}\alpha^{-pm-\mu} - i\psi_{m+q}\alpha^{p(m+q)+\mu} = 0, \quad (5.19)$$

где вновь считается наложенное условие $\psi_{m+N}=\psi_m$. Задача вычисления волновой функции в пространственных узлах сводится тем самым к решению однородной системы линейных алгебраических уравнений. Амплитудный множитель находится из условия нормировки, а фаза остается неопределенной, что, впрочем, чаще всего несущественно. Технически решение системы уравнений облегчается тем, что задающая ее матрица сильно разрежена.

Пусть мы интересуемся начальной стадией эволюции пакета в ситуации, когда N велико, а ширина пакета по пространственному индексу m порядка $N^{1/2}$. Тогда волновую функцию можно рассматривать как зависящую квазинепрерывным образом от пространственной переменной m , и это положение сохранится, очевидно, в течение некоторого времени. Будем относить значения индексов к интервалу, центрированному в нуле. Учитывая члены порядка $1/(N)^{1/2}$, полагаем

$$\psi_{m+s}\alpha^{r(m+s)+\nu} \approx \psi + s\partial\psi/\partial m + [(2\pi i)/N]rm\psi, \quad (5.20)$$

и аналогично для остальных членов в формуле (5.19). В результате получаем уравнение

$$\partial\psi/\partial m = (-\pi/N) \cdot [2m(p+ir)/(s-iq)]\psi, \quad (5.21)$$

откуда

$$\psi = C \exp\{(-\pi/N) \cdot [(p+ir)m^2/(s-iq)]\}. \quad (5.22)$$

Вспомним, что стандартное выражение для волновой функции в виде гауссова пакета имеет вид [22]

$$\psi(x) = [\text{Re}A/(\pi\hbar)]^{1/4} \exp[-Ax^2/(2\hbar)] = \text{const} \cdot \exp[-Ax^2/(2\hbar)]. \quad (5.23)$$

Действительная часть параметра A задает ширину пакета по координате $\Delta x \sim 1/(\text{Re}A)^{1/2}$, а ширина по импульсу выражается как $\Delta p \approx 1/[\text{Re}(1/A)]^{1/2}$. Значение $A=1$ отвечает «пакету минимальной неопределенности», в наибольшей возможной степени локализованному и по координате, и по импульсу.

Сопоставляя выражения (5.22) и (5.23) и полагая $\hbar=1/(2\pi N)$, $x=m/N$, находим

$$A = (p + ir)/(s - iq). \quad (5.24)$$

Выполним один шаг итераций (3.13) в обратном времени и подставим новые значения переменных в выражение для A . Результат можно представить в виде комплексного рекуррентного отображения для A , если учесть, что вследствие (3.13) и начальных условий (3.12), в процессе динамики остается в силе равенство $r = q$. Итак, имеем:

$$A' = (p_{(1)} + iq_{(1)})/(s_{(1)} - ir_{(1)}) = [p - r + i(q - s)]/[2s - q + i(2r - p)] = (A - i)/(2 + iA). \quad (5.25)$$

Если в качестве исходного задать некоторое действительное значение параметра $A > 0$ и итерировать формально отображение $A' = (A - i)/(2 + iA)$, то решение сходится к неподвижной точке $A = i(1 - 5^{1/2})/2$. Закон сходимости можно выяснить, линеаризовав отображение вблизи этой точки:

$$A_k = i(1 - 5^{1/2})/2 + C \cdot \Delta^k. \quad (5.26)$$

Здесь k обозначает номер итерации, $\Delta = (3 - 5^{1/2})/(3 + 5^{1/2}) = \lambda_+^{-2}$, λ_+ – старшее собственное число матрицы отображения (см. раздел 1), а вещественная константа C зависит от начального условия (в частности, для $A_0 = 1$ получается $C = 1.382$).

Таким образом, в асимптотике действительная часть параметра A убывает по закону λ_+^{-2k} . Следовательно, ширина пакета нарастает экспоненциально: $\Delta x \sim 1/(Re A)^{1/2} \sim \lambda_+^k = \exp(\Lambda_+ k)$, и этот рост характеризуется не чем иным как положительным ляпуновским показателем классического отображения кота Арнольда Λ_+ . (Заметим, что по такому же закону увеличивается ширина пакета и в импульсном представлении. В этом можно убедиться, вычислив действительную часть обратной величины $1/A_k$.) Время (число итераций), за которое ширина пакета сравняется с пространственным периодом на торе, можно оценить из условия $N \sim N^{1/2} \exp(\Lambda_+ T_{\text{вр}})$, что дает $T_{\text{вр}} \sim (1/2)(\log N)/\Lambda_+ = -(1/2)\log(2\pi\hbar)/\Lambda_+$. Это характерное время зависит от квантового параметра логарифмически, и поэтому при больших N оно всегда очень мало по сравнению с квантовым периодом.

На рис. 7 показан вид гауссова пакета на той стадии эволюции, когда коэффициент перед квадратичным членом в показателе экспоненты уже очень близок к $i(1 - 5^{1/2})/2$. Вычислим локальное волновое число β вблизи некоторой точки x_0 . Полагая $x = x_0 + \Delta x$, имеем

$$\exp(-ix^2(1 - 5^{1/2})/4) \approx \text{const} \cdot \exp(-(i/\hbar)(x_0(1 - 5^{1/2})/2)\Delta x),$$

то есть $\beta = x_0(5^{1/2} - 1)/(2\hbar)$. Этому волновому числу соответствует величина импульса $p = \beta\hbar = x_0(5^{1/2} - 1)/2$. Таким образом, соотношение между координатой и локальным

импульсом в точности такое же как в классике вдоль направления неустойчивого собственного вектора отображения кота Арнольда.

Попытаемся наглядно представить квантовую динамику в виде, допускающем прямое сравнение с классической картинкой эволюции изображения кота на фазовой плоскости.

Для квантовой системы фазовую плоскость можно мыслить как упорядоченный набор ячеек размера $\Delta x \Delta \hbar$, и говорить об амплитуде пребывания в той или иной ячейке. Определить эту амплитуду можно как интеграл перекры-

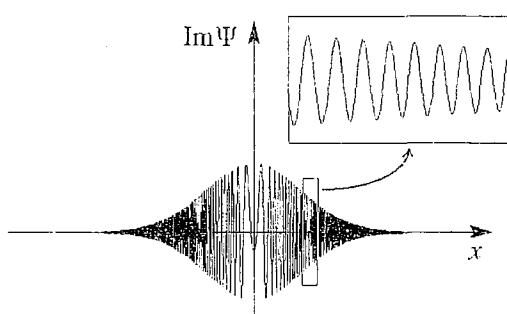


Рис. 7. Вид гауссова волнового пакета после нескольких первых шагов эволюции, описываемой квантовым отображением кота Арнольда, когда ширина пакета еще мала по сравнению с периодом на торе

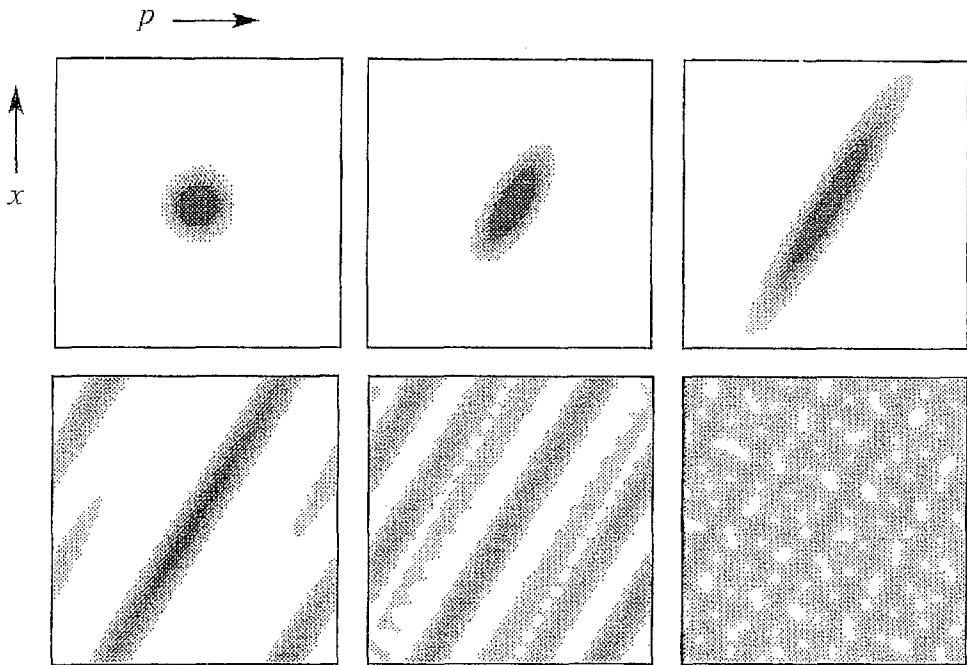


Рис. 8. Процесс расплывания гауссова волнового пакета для отображения кота Арнольда: эволюция распределения Хусими при $N=131$. Тона серого цвета кодируют вероятность пребывания системы в данной ячейке фазового пространства на плоскости (p, x) . Начало координат располагается в центре квадрата. Динамику распределения Хусими можно сравнить с рис. 2, *a*, который отвечает классическому отображению

тия волновой функции $|\psi\rangle$ с когерентным состоянием $|\psi_{px}\rangle$, центрированным в данной точке (p, x) . Построенная таким образом функция двух переменных $f_H(p, x) = |\langle \psi_{px} | \psi \rangle|^2$ называется *распределением Хусими* (Husimi distribution) [6]. Ясно, что в классическом пределе, когда $\hbar \rightarrow 0$, гауссов пакет минимальной неопределенности превращается в дельта-функцию, а распределение Хусими – в классическую функцию распределения.

Для систем на торе обобщение распределения Хусими получается естественным образом при использовании когерентных состояний в модификации Сарасено. На рис. 8 показана эволюция во времени функции Хусими для квантового отображения кота Арнольда. Начальное состояние отвечает гауссову волновому пакету максимальной локализации. Различные тона серого цвета кодируют уровень функции $f_H(p, x)$. Начальная стадия эволюции гауссова пакета демонстрирует очевидное сходство с картинками преобразования изображения кота в классическом случае (см. рис. 2, *a*). Когда ширина пакета становится больше пространственного периода, волновая функция $\psi(x)$ формируется как результат наложения и интерференции «хвостов», протянувшихся из разных периодов: в произвольной точке x она вычисляется как сумма комплексных амплитуд, отвечающих всем точкам пересечения «хвостов» с линией $x=\text{const}$. Как результат этой квантовой интерференции, на последних «кадрах» рис. 8 можно видеть чередующиеся светлые и темные пятна.

На рис. 9 для сравнения иллюстрируется эволюция распределения Хусими для отображения параболического типа. В этом случае расплывание пакета имеет место только по пространственной координате, тогда как по импульсу его ширина остается неизменной на всем протяжении квантового периода.

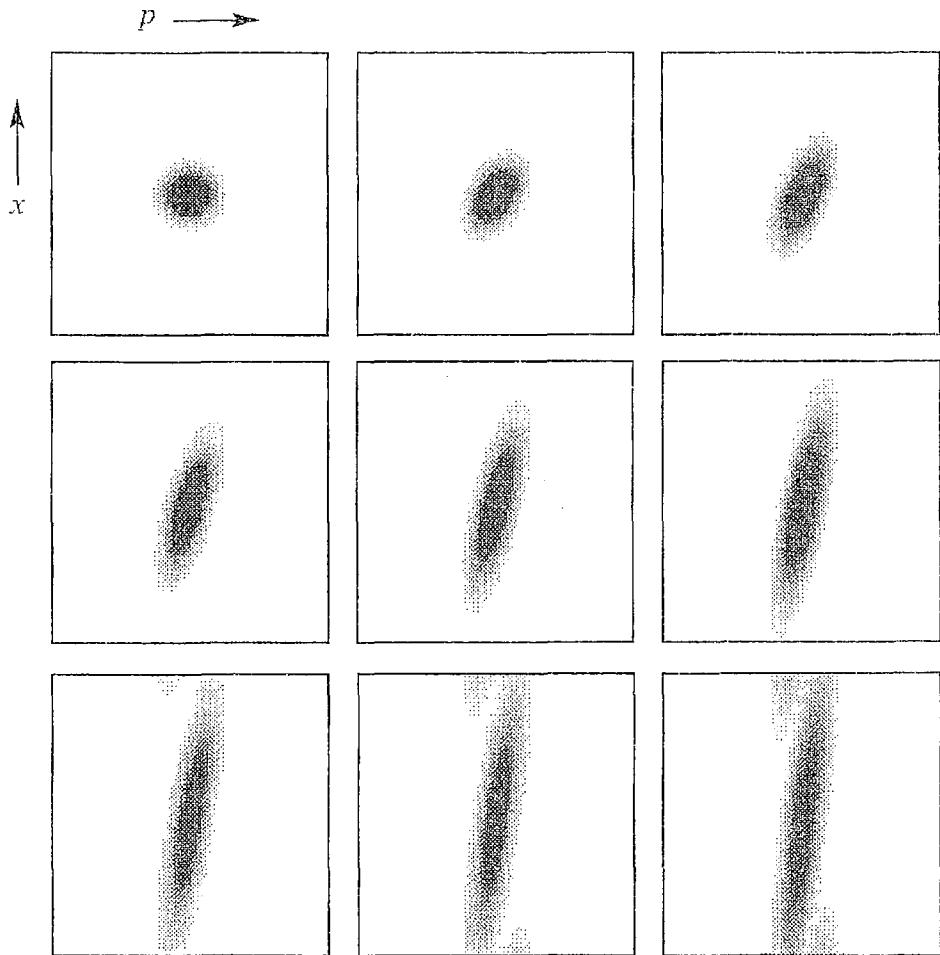


Рис. 9. Процесс расплывания гауссова волнового пакета для параболического отображения, описывающего свободное движение на торе: эволюция распределения Хусими при $N=131$. Тона серого цвета кодируют вероятность пребывания системы в данной ячейке фазового пространства на плоскости (p, x) . Начало координат располагается в центре квадрата. Динамику распределения Хусими можно сравнить с рис. 2, б, который отвечает классическому отображению

6. Функция Вигнера

Говоря о классической динамике вообще и о динамическом хаосе в частности, мы постоянно опираемся на понятие фазового пространства. Поведение индивидуальной системы представляется движением изображающей точки по фазовой траектории. Динамика ансамбля (множества невзаимодействующих систем, различающихся начальными условиями) интерпретируется как эволюция облака изображающих точек в фазовом пространстве и описывается функцией распределения, уравнение которой известно в классической механике как уравнение Лиувилля.

В силу принципа неопределенности, в квантовой теории нельзя использовать функцию распределения $f(p, x)$, поскольку мы не вправе конструировать ансамбль из систем, обладающих одновременно заданными импульсом и координатой. Одна возможность ввести в рассмотрение квантовый аналог функции распределения обсуждалась в предыдущем разделе и основана на использовании распределения Хусими. Другая возможность была в свое время предложена Вигнером и состоит в том, что вводится функция переменных p и x , выражющаяся через волновую функцию $\psi(x)$ следующим образом [6, 24]:

$$W(p,x) = (\pi\hbar)^{-1} \int \psi(x-x') \psi^*(x+x') \exp[2(i/\hbar)px'] dx'. \quad (6.1)$$

Используя операторы сдвига по координате и импульсу и оператор инверсии $R[\psi(x)] = \psi(-x)$, это определение можно переписать в обозначениях Дирака

$$W(p,x) = (\pi\hbar)^{-1} \langle \psi | \exp(-ipx/\hbar) \exp(ipx/\hbar) | R | \exp(-ipx/\hbar) \exp(ipx/\hbar) | \psi \rangle. \quad (6.2)$$

Как нетрудно проверить, величина $W(p,x)$ всегда действительна.

Функция Вигнера широко используется в статистической физике, занимая в теории квантовых систем то место, какое в классической статистике занимала функция распределения [24]. Основанием служит то, что интегрирование функции Вигнера по первому аргументу приводит к распределению вероятностей для координаты, а по второму – для импульса:

$$\int W(p,x) dp = |\psi(x)|^2, \quad \int W(p,x) dx = |\tilde{\psi}(p)|^2. \quad (6.3)$$

Функцию Вигнера все же нельзя рассматривать как функцию распределения, поскольку она может принимать отрицательные значения.

Функция Вигнера – очень полезный инструмент исследования соответствия между квантовой и классической теорией. В контексте задачи о динамике на торе она была введена в работе Ханиэя и Берри [15] и позднее использовалась многими авторами [17, 25–27]. В этом разделе мы обсудим взаимосвязь между описанием динамики отображений на торе с помощью функции Вигнера и формализмом операторов Вейля – Гейзенберга.

Если на волновую функцию наложены соответствующие тору условия периодичности, то, как показано в разделе 2, она имеет вид «гребенки» из дельта-функций $\psi(x) = \sum_{m=0}^{N-1} \psi_m \delta_{L_x}(x - mL_x/N)$, где L_x – пространственный период, а $\delta_{L_x}(\dots)$ обозначает последовательность дельта-функций с этим периодом. Подставляя это выражение в (6.1), получим

$$W(p,x) = (\pi\hbar)^{-1} \int dx' \sum_{s=0}^{N-1} \sum_{r=0}^{N-1} [\psi_s \psi_r^* \delta_{L_x}(x - x' - sL_x/N) \delta_{L_x}(x + x' - rL_x/N)] \exp(2ipx'/\hbar). \quad (6.4)$$

Условие равенства нулю аргумента каждой из дельта-функций определяет семейство параллельных прямых на плоскости (x,x') (рис. 10). Произведение дельта-функций будет ненулевым в узлах сетки, образованной этими двумя семействами прямых. Как видно из рисунка, в проекции на ось x точки пересечения располагаются с шагом $L_x/2N$, то есть вдвое чаще, чем дельта-пики, образующие волновую функцию ψ . Поскольку выражение в квадратных скобках имеет по x' период L_x , его фурье-образ, который как раз и есть функция Вигнера W , будет выглядеть как набор дельта-пиков с шагом по волновому числу $\Delta\beta = 2\pi/L_x$, где $\beta = 2p/\hbar$. Подставляя в соответствии с (2.2) $\hbar = L_x L_p / (2\pi N)$, находим, что шаг по импульсу $\Delta p = \hbar \Delta\beta / 2 = L_p / (2N)$, то есть вдвое меньше, чем у волновой функции в импульсном представлении. Полагая теперь $L_x = L_p = 1$, заключаем, что функция Вигнера в единичном квадрате

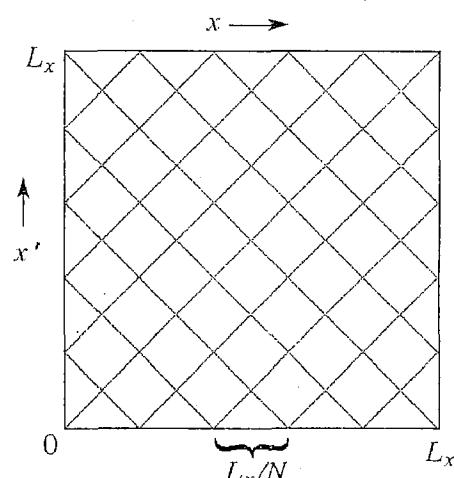


Рис. 10. К построению функции Вигнера для отображений на торе: в проекции на ось x узлы сетки, образованной пересечениями прямых, располагаются с шагом $L_x/2N$.

на плоскости (x, p) представляется набором дельта-функций, расположенных в узлах квадратной решетки с шагом $1/(2N)$. Задать такую функцию можно таблицей из $2N \times 2N$ действительных чисел, определяющих амплитуды дельта-ников.

Если мы разрешим индексам k и m принимать целые и полуцелые значения $(0, 1/2, 1, 3/2, \dots, N-1/2)$, то можно записать

$$W(p, x) = \sum_k \sum_m w(k, m) \delta_1(p - k/N) \delta_1(x - m/N). \quad (6.5)$$

Набор действительных чисел $w(k, m)$ естественно рассматривать как дискретную версию функции Вигнера. Через вектор состояния ψ_m она выражается посредством соотношения

$$w(k, m) = 1/(2N) \sum_{\alpha} \psi_{m-\alpha} \psi_{m+\alpha}^* \exp(4\pi i k \alpha / N), \quad (6.6)$$

где суммирование ведется по целым и полуцелым α от 0 до $N-1/2$, причем для полуцелых значений индекса $(m \pm \alpha)$ величина ψ считается равной нулю. Суммирование $w(k, m)$ по k дает распределение вероятностей в координатном, а суммирование по m – в импульсном представлении:

$$\sum_{k=0}^{N-1} w(k, m) = |\psi_m|^2 \quad (m - \text{целое}) \text{ и } 0 \quad (m - \text{полуцелое}), \quad (6.7)$$

$$\sum_{m=0}^{N-1} w(k, m) = \tilde{|\psi_k|^2} \quad (k - \text{целое}) \text{ и } 0 \quad (k - \text{полуцелое}). \quad (6.8)$$

Выразим функцию Вигнера через операторы A и K , то есть получим дискретный аналог соотношения (6.2). Проблема в том, что операторы K и A определены для N -мерных векторов, тогда как каждый из аргументов функции Вигнера принимает $2N$ возможных значений. Чтобы обойти эту трудность, выпишем отдельно соотношения для каждой из четырех возможных комбинаций целых и полуцелых индексов, введя четыре разновидности операторов инверсии. Итак, полагаем

$$\begin{aligned} w(P, Q) &= w_0(P, Q) = \langle \psi | (K^+) Q A^P | R_0 | (A^+)^P K Q | \psi \rangle / 2N, \\ w(P, Q+1/2) &= w_1(P, Q) = \langle \psi | (K^+) Q A^P | R_1 | (A^+)^P K Q | \psi \rangle / 2N, \\ w(P+1/2, Q) &= w_2(P, Q) = \langle \psi | (K^+) Q A^P | R_2 | (A^+)^P K Q | \psi \rangle / 2N, \\ w(P+1/2, Q+1/2) &= w_3(P, Q) = \langle \psi | (K^+) Q A^P | R_3 | (A^+)^P K Q | \psi \rangle / 2N, \end{aligned} \quad (6.9)$$

где операторы R_j имеют следующие матричные элементы:

$$\begin{aligned} (R_0)_{mn} &= \delta_{m, -n}, \quad (R_1)_{mn} = \delta_{m, -n+1}, \\ (R_2)_{mn} &= \alpha^m \delta_{m, -n}, \quad (R_3)_{mn} = \alpha^{m-1/2} \delta_{m, -n+1}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Как можно проверить, соотношения (6.9) эквивалентны определению (6.6).

Пусть теперь эволюция вектора состояния $|\psi\rangle$ во времени задается унитарным оператором U , отвечающим какому-либо из линейных отображений тора. Как будет эволюционировать функция Вигнера? На следующем шаге по времени будем иметь, очевидно,

$$w_j(P, Q) = \langle \psi | U^+ (K^+) Q A^P | R_j | (A^+)^P K Q U | \psi \rangle / 2N, \quad j=0, \dots, 3, \quad (6.11)$$

или, с учетом соотношений (4.4)

$$w_j(P, Q) = \langle \psi | (K')^Q A'^P U^+ | R_j | U (A')^P K^Q | \psi \rangle / 2N, \quad j=0, \dots, 3. \quad (6.12)$$

Ограничимся для определенности отображением кота Арнольда и подставим $K=KA$, $A'=AKA$. Используя коммутационные соотношения (3.6) для перестановки операторов, в результате получим⁵

$$\begin{aligned} w_j(P, Q) &= \langle \psi | (A+K^+)^Q (AKA)^P U^+ | R_j | U (A+K+A^+)^P (KA)^Q | \psi \rangle / 2N = \\ &= \langle \psi | (K^+)^Q A^P A^Q U^+ | R_j | U (A^+)^{2P-Q} K^{Q-P} | \psi \rangle / 2N. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Далее, используя явный вид матрицы U для отображения кота Арнольда (4.13), можно проверить, что

$$U^+ R_0 U = A + R_1 A, \quad U^+ R_1 U = K^+ (A^+)^2 R_2 A^2 K, \quad U^+ R_2 U = R_0, \quad U^+ R_3 U = A + R_3 A, \quad (6.14)$$

так что из соотношений (6.13) следует:

$$\begin{aligned} w_0'(P, Q) &= w_1(2P-Q-1, Q-P), \\ w_1'(P, Q) &= w_2(2P-Q-2, Q-P+1), \\ w_2'(P, Q) &= w_0(2P-Q, Q-P), \\ w_3'(P, Q) &= w_3(2P-Q-1, Q-P), \end{aligned} \quad (6.15)$$

В обозначениях, подразумевающих использование полуцелых индексов, имеем

$$w'(k, m) = w(2k-m-1/2, m-k). \quad (6.16)$$

Результат приведенных выкладок можно резюмировать таким образом, что значения функции Вигнера, приписанные узлам решетки $2N \times 2N$, просто переносятся без изменения вдоль классических траекторий, порождаемых на этой решетке отображением вида

$$k' = k + m + 1/2, \quad m' = k + 2m \pmod{N}. \quad (6.17)$$

(Заметим, что добавка $1/2$, возникшая в уравнении для k' в каком-то смысле несущественна, поскольку устраняется сдвигом начала отсчета по k и m : $m \rightarrow m - 1/2$, $k \rightarrow k + 1/2$. Такое переопределение координат неудобно, поскольку приводит к необходимости работать с полуцелыми индексами, но зато восстанавливает полное соответствие с формой классического отображения.) Результат, аналогичный (6.17), для квантуемых по Ханнэю – Берри сформулирован в работе [15], а для отображения кота Арнольда при четных N – в [17].

На рис. 11 и 12 показано, как эволюционирует во времени функция Вигнера при задании в качестве начального состояния гауссова пакета. В обоих случаях эволюция периодическая: возврат к исходному состоянию наступает, соответственно, через 14 и 13 шагов. Однако промежуточные состояния, реализующиеся на протяжении периода, различаются: для гиперболического отображения заметно отличные от нуля значения функции Вигнера более или менее разбредаются по всей площади квадрата, тогда как для параболического они остаются в определенной полосе конечной ширины по импульсу.

⁵ Фактически процедура перестановки выполняется тривиальным образом, поскольку появляющиеся в ходе нее слева и справа от оператора R множители α в различной степени компенсируют друг друга.

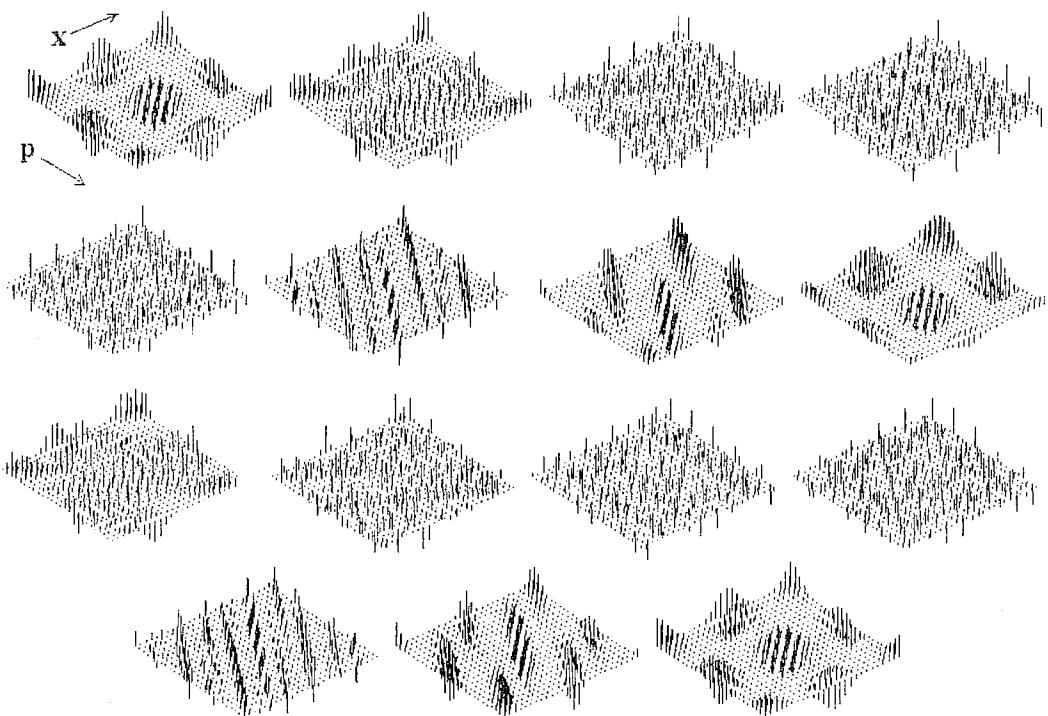


Рис. 11. Динамика функции Вигнера для отображения кота Арнольда при $N=13$. Квантовый период возврата $T(N)=14$. В качестве начального состояния задан гауссов волновой пакет, центрированный в начале координат

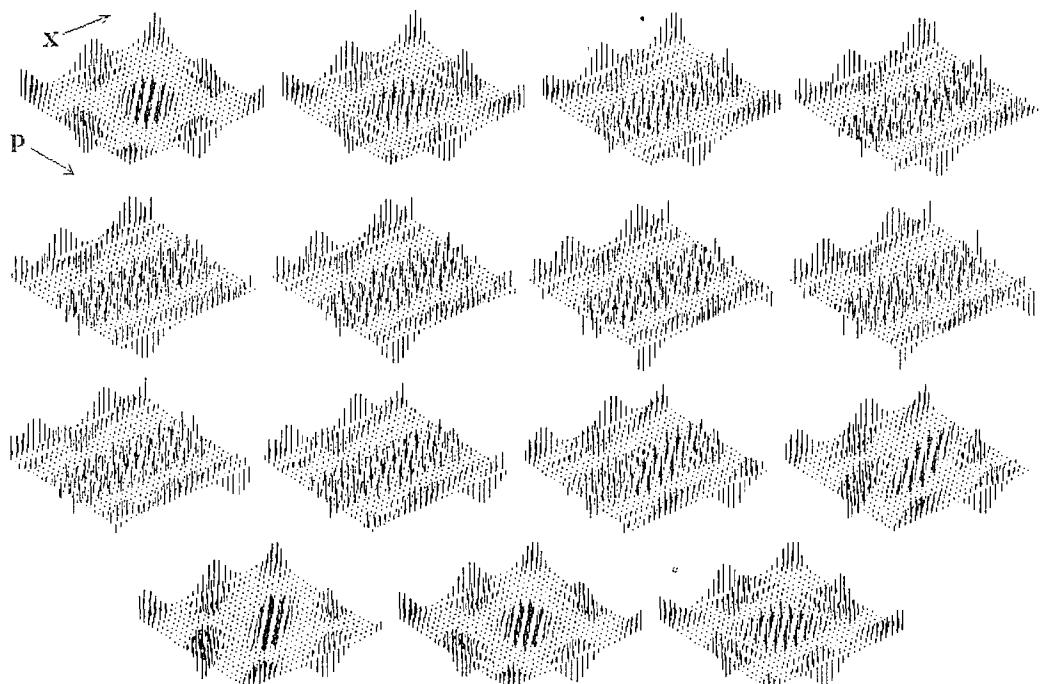


Рис. 12. Динамика функции Вигнера для отображения параболического типа, описывающего свободное движение на торе, при $N=13$. Квантовый период возврата $T(N)=13$. В качестве начального состояния задан гауссов волновой пакет, центрированный в начале координат. Обратите внимание, что по импульсу занимаемый пакетом интервал остается неизменным в процессе динамики

7. Спектр квазиэнергий и собственные векторы оператора эволюции

Уравнение Шредингера квантовой системы, параметры которой постоянны во времени, а динамика происходит в пространственно ограниченной области, приводит к дискретному спектру собственных чисел – разрешенных значений энергии.

Для систем, параметры которых периодически изменяются во времени, и для систем с дискретным временем, вместо энергетического спектра говорят о *спектре квазиэнергий*. Пусть эволюция вектора состояния за период τ дается унитарным оператором U . Поставим для этого оператора задачу на собственные векторы и собственные значения и запишем $U|\psi_s\rangle=\lambda_s|\psi_s\rangle$. Поскольку оператор унитарный, его собственные числа по модулю обязаны быть единичными, и можно положить $\lambda_s=\exp(iE_s\tau/\hbar)$. Величина E_s есть *квазиэнергия* собственного состояния $|\psi_s\rangle$. Ясно, что она определена с точностью до постоянной добавки $2\pi\hbar/\tau$. Отметим уместную здесь аналогию с квазимпульсом, который вводят вместо обычного импульса при анализе сред с пространственно периодической структурой (например, в физике твердого тела). Квазимпульс также определен с точностью до постоянной добавки $2\pi\hbar/d$, где d – пространственный период.

Для отображений, τ – это один шаг дискретного времени. Поскольку оператор эволюции для отображения на торе представляется матрицей размера $N \times N$, спектр должен содержать N собственных чисел $\lambda_s=\exp(i\theta_s)$, среди которых, однако, могут быть вырожденные. Величины θ_s , которые и играют роль квазиэнергии состояний, называют иногда «собственными углами» (eigenangles). Вектор $|\psi_s\rangle$ будет также собственным вектором оператора U^k , собственное число которого λ_s^k . Наличие квантового периода $T(N)$ означает, что $U^{T(N)}=\mathbf{1}$. Поэтому $\lambda_s^{T(N)}=1$, и все собственные числа λ_s обязаны быть комплексными корнями степени $T(N)$ из единицы, то есть принадлежать множеству $\{1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{T(N)-1}\}$, где $\omega=\exp[2\pi i/T(N)]$. Вопрос состоит только в том, какие из этого множества корней представлены в спектре и с какой кратностью.

След матрицы U равен, как известно, сумме всех ее собственных значений, а для матрицы U^k он дается суммой их k -ых степеней:

$$S_k=\text{Tr}(U^k)=\sum_{r=0}^{N-1} \lambda_r^k. \quad (7.1)$$

Последовательность S_k , которая получается, когда индекс k пробегает всевозможные целые значения, будем называть *trace-последовательностью*. По индексу k она имеет период $T(N)$ и допускает поэтому представление в виде ряда Фурье:

$$S_k=\sum_{r=0}^{T(N)-1} n_r \exp(2\pi i r k / p) = \sum_{r=0}^{T(N)-1} n_r \omega^{rk}. \quad (7.2)$$

Сравнивая (7.1) и (7.2), видим, что коэффициент при r -ом члене разложения

$$n_r=(1/T(N))\sum_{k=0}^{T(N)-1} S_k \exp(-2\pi i r k / T(N)) \quad (7.3)$$

представляет собой кратность собственного значения ω^r в спектре оператора эволюции (разумеется, все n_r обязаны быть неотрицательными целыми числами). Таким образом, чтобы получить спектр оператора эволюции достаточно найти trace-последовательность и подвергнуть ее дискретному преобразованию Фурье.

«Лобовой» способ состоит в том, чтобы вычислять степени матрицы U , подсчитывая S_k как сумму диагональных элементов. Один быстрый алгоритм может быть основан на процедуре нахождения матрицы оператора U^k , (см. сноску 2), другой – на соотношениях, связывающих trace-последовательность и периодические орбиты классического отображения (см. в этой связи работы

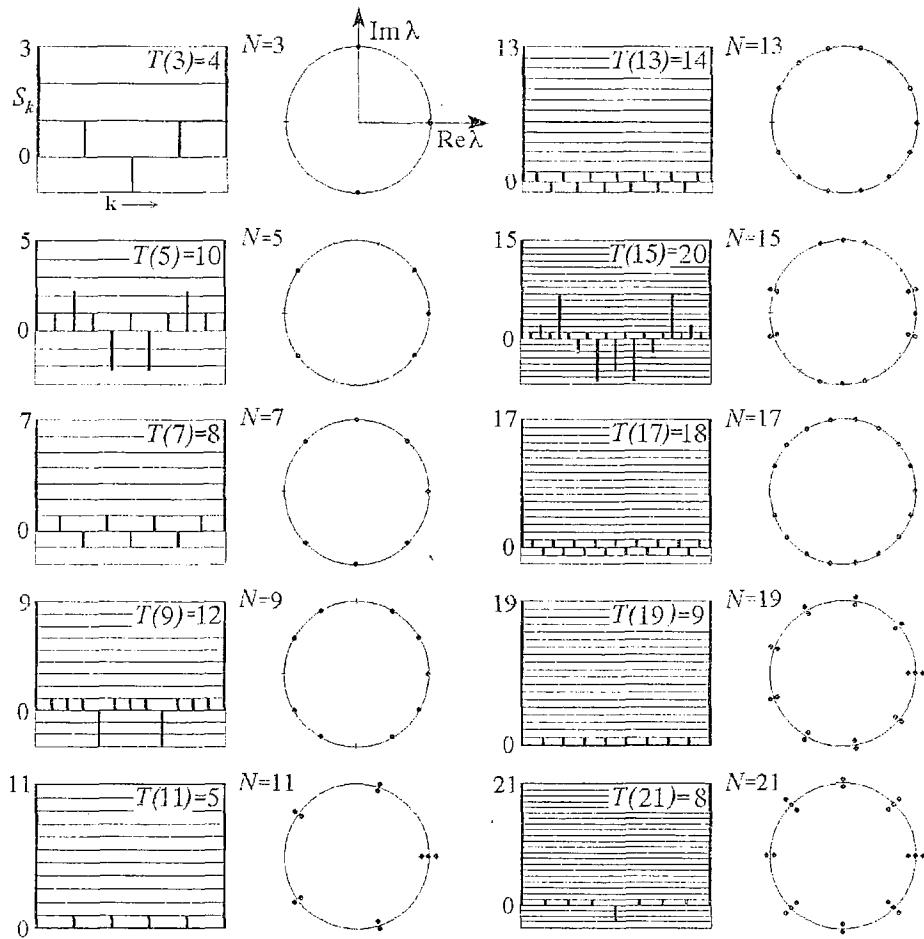


Рис. 13. Диаграммы, представляющие trace-последовательность и спектры «собственных углов» для квантового отображения кота Арнольда при нечетных N от 3 до 21

Китинга [30, 31] и приложение С). На рис. 13 приводятся диаграммы, представляющие trace-последовательности квантового отображения кота Арнольда для нескольких небольших N , а также спектры квазиэнергий или «собственные углы». На рис. 14, *a* показано, как зависят от числа N спектры квазиэнергий для отображения кота Арнольда.

На рис. 14, *б*, *в* приводятся аналогичные данные для отображений с регулярной динамикой – параболического и эллиптического типа. Для

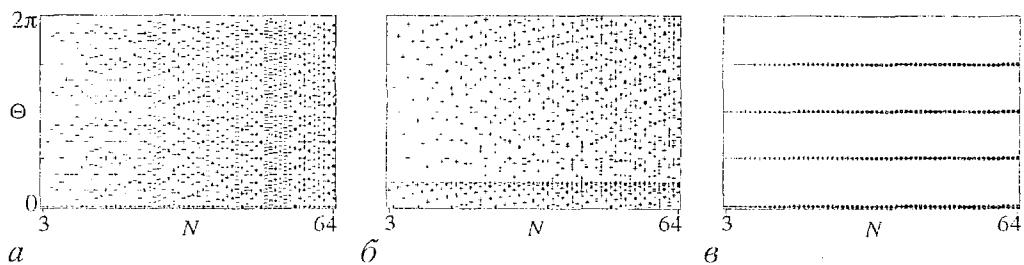


Рис. 14. Спектр квазиэнергий (или «собственных углов») для квантового отображения кота Арнольда (*a*), для отображения параболического типа, описывающего свободное движение (*б*), и для отображения эллиптического типа (*в*). Кратность вырождения собственных чисел обозначена количеством черточек, проходящих через данную точку. Представлены данные как для нечетных N (отображения, определенные в основном тексте), так и для четных (отображения, определенные в приложении)

параболического отображения (3.20) матрица оператора эволюции W (4.15) диагонализуется при переходе в импульсное представление и принимает вид матрицы V (см.(4.14)). Поэтому собственные функции задаются собственными векторами оператора импульса, $(\psi_s)_m \sim \exp(2\pi i ms/N)$, а собственные числа выражаются как $\lambda_s = \exp\{i\pi((s^2+s+1/4)/N-1/4)\}$, где $s=0, \dots, N-1$. Для эллиптического отображения (3.22) оператор эволюции совпадает с оператором обратного дискретного преобразования Фурье. Задача на собственные векторы и собственные значения допускает в этом случае полный анализ, изложенный в [28]. При любом N имеется четыре собственных числа $1, i, -1, -i$, кратность вырождения которых равна, соответственно, $[(N+4)/4], [(N+1)/4], [(N+2)/4]$ и $[(N-1)/4]$, где квадратные скобки обозначают целую часть числа.

На рис. 14 в распределении уровней квазиэнергии отображений с регулярной динамикой можно различить определенные упорядоченные структуры, тогда как для отображения кота Арнольда («хаос») их не видно.

Следующий интересный вопрос состоит в том, не проявится ли различие между отображениями с регулярной и хаотической динамикой в структуре собственных векторов оператора эволюции. Возьмем какой-нибудь пробный вектор $|\psi_0\rangle$ и, действуя на него оператором эволюции U , построим последовательность $|\psi_k\rangle = U^k |\psi_0\rangle$. Благодаря тому, что имеет место период возврата $T(N)$, эта последовательность представляется рядом Фурье:

$$|\psi_k\rangle = \sum_{s=0}^{T(N)-1} |\tilde{\psi}_s\rangle \exp(2\pi i sk). \quad (7.4)$$

В качестве «коэффициентов» в этом выражении фигурируют (ненормированные) собственные векторы оператора эволюции $|\tilde{\psi}_s\rangle$. Вектору

$$|\tilde{\psi}_s\rangle = (1/T(N)) \sum_{k=0}^{T(N)-1} |\psi_k\rangle \exp(-2\pi i sk) \quad (7.5)$$

отвечает собственное значение $\lambda_s = \exp(2\pi i s)$, а если для некоторого s число $\exp(2\pi i s)$ в спектре не представлено, то соответствующий член суммы обращается в нуль⁶.

Привлекательна идея задать пробный вектор так, чтобы результат действия оператора эволюции выражался аналитически. Эта идея была предложена и реализована Экхардом [18] для вычисления и анализа собственных векторов линейных отображений на торе, принадлежащих к классу квантумемых по Ханнэю – Берри. Для рассматриваемого нами отображения кота Арнольда метод нуждается в некоторой модификации. Как и в работе Экхарда, ограничимся случаем простых N .

Рассмотрим вектор

$$\psi_m = \sigma \cdot \exp[(2\pi i/N)(am^2 + bm + c)] = \sigma \cdot \alpha^{am^2 + bm + c}, \quad (7.6)$$

где $\sigma = \pm 1$, а параметры a, b, c – целые, определенные по модулю N , и действуем на него оператором эволюции (4.13). Если $a \neq -1 \pmod{N}$, то сумма вычисляется с использованием формул Гаусса, и результат представляется вновь в виде (7.6). Если, однако, $a = -1 \pmod{N}$, то результирующий вектор $\psi_m \sim \delta_{mb}$, то есть не описывается формулой (7.6). С другой стороны, будучи подвергнутым действию оператора эволюции, этот вектор снова принимает вид (7.6). Поэтому его целесообразно включить в класс допустимых векторов. Для этого дополним множество разрешенных значений параметра a $\{0, 1, \dots, N-1\}$ еще одним

символом $\bar{0}$ («обратный нуль») и положим

⁶ Для каждого присутствующего в спектре числа λ_s , рассмотренная процедура позволяет получить один собственный вектор из одного пробного вектора. При наличии вырождения для нахождения всех имеющихся собственных векторов процедуру приходится повторять с использованием других пробных векторов столько раз, сколько кратность вырождения. Затем полученные собственные векторы можно ортогоанализировать по методу Грама – Шмидта.

$$\Psi_m = F(m; a, b, c, \sigma), \quad (7.7)$$

где

$$F(m; a, b, c, \sigma) = \begin{cases} \sigma N^{-1/2} \exp[(2\pi i/N)(am^2 + bm + c)] = \sigma N^{-1/2} \alpha^{am^2 + bm + c}, & a=0, 1, \dots, N-1, \\ \sigma \exp(2\pi i c/N) \delta_{mb}, & a=0. \end{cases}$$

Теперь действие оператора эволюции можно рассматривать просто как пересчет определяющих вектор состояния параметров (a, b, c, σ) по следующим правилам.

Если $a \neq \bar{0}$ и $a \neq N-1$, то $\sigma' = \binom{2(1+a)}{N}$,

$$a' = \bar{2}(1 - \bar{2}(1+a)), \quad b' = \bar{2} + \bar{2}(1+a)b, \quad c' = c + (1-N^2)/8 - \bar{2} \cdot \bar{2}(1+a)b^2 \pmod{N}.$$

Если $a=N-1$, то

$$\sigma' = \sigma, \quad a' = \bar{0}, \quad b' = b, \quad c' = c + (b^2 + b)/2 \pmod{N}.$$

Если $a=\bar{0}$, то

$$\sigma' = \sigma(-1)^{(N-1)/2}, \quad a' = \bar{2}, \quad b' = \bar{2} - b, \quad c' = c + b^2 - [N/4] \pmod{N}.$$

Черта сверху обозначает число обратное к данному целому по модулю N , то есть $\bar{x} \cdot x = 1 \pmod{N}$, в частности $\bar{2} = (N+1)/2$. Согласно малой теореме Ферма, $\bar{x} = x^{N-2}$ (N – простое). Выражение $\binom{x}{N}$ есть символ Лежандра, это 1 или -1 в зависимости от того, существует или нет такое целое, квадрат которого равен x по модулю N .

Уравнение для параметра a не зависит от остальных соотношений. Оно порождает периодическую динамику, хотя бы по той причине, что множество значений a конечно. Уравнения для остальных параметров b, c, σ содержат a в качестве «внешнего периодического воздействия». Численные расчеты показывают, что в зависимости от N и от начальных значений a и b может реализоваться период $T(N), T(N)/2$ и 1. Впрочем, в любом случае начальный набор параметров воспроизводится через каждые $T(N)$ шагов.

Схема итераций для параметров (a, b, c, σ) легко реализуется на компьютере. Это позволяет даже при очень больших простых N получать собственные векторы с помощью соотношения (7.5), которое переписывается в виде

$$|\tilde{\Psi}_s\rangle = (1/T) \sum_{k=0}^{T-1} F(m; a_k, b_k, c_k, \sigma_k) \exp(-2\pi i sk/T), \quad (7.8)$$

где T – соответствующий период.

На рис. 15 показано, как выглядит распределение амплитуд по пространственной координате и распределение Хусими для нескольких собственных векторов при достаточно большом N . В случае, когда собственный вектор получается из цикла периода 1, его структура сравнительно проста, поскольку задается выражением вида (7.6). Для собственных векторов, получаемых из циклов периода $T(N)$ и $T(N)/2$ характерно пространственное распределение, похожее на реализацию некоррелированной комплексной случайной последовательности. Для сравнения на рис. 16 и 17 показаны примеры собственных векторов для отображений с регулярной динамикой – параболического и эллиптического типа. (Следует заметить, что в последнем случае, в силу наличия вырождения высокой кратности, имеется значительный произвол в выборе вида собственных векторов.)

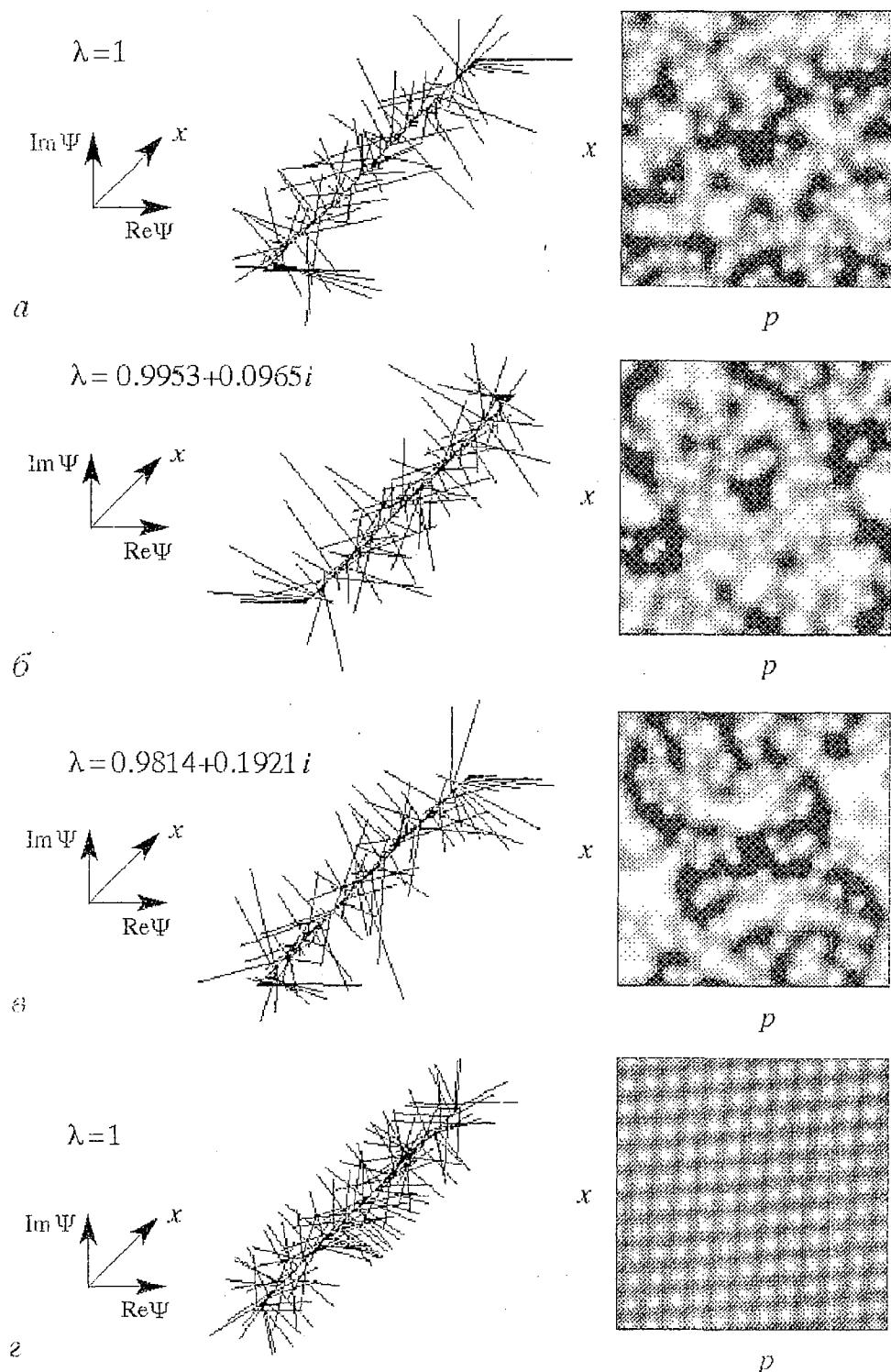


Рис. 15. Пространственная структура нескольких собственных векторов (слева) и соответствующие им распределения Хусими на плоскости $p=P/N$, $x=Q/N$ для квантового отображения кота Арнольда при $N=131$. Начало координат на диаграммах распределения Хусими в центре квадрата. Собственные векторы (a)–(e), характеризующиеся хаотическим распределением, получены из цикла периода $T(N)/2=65$ при подстановке формы (7.6) с начальными значениями $a=1$ и $b=0$. Вектор (e) имеет регулярную структуру и непосредственно выражается формулой (7.6) с $a=71$, $b=6$.

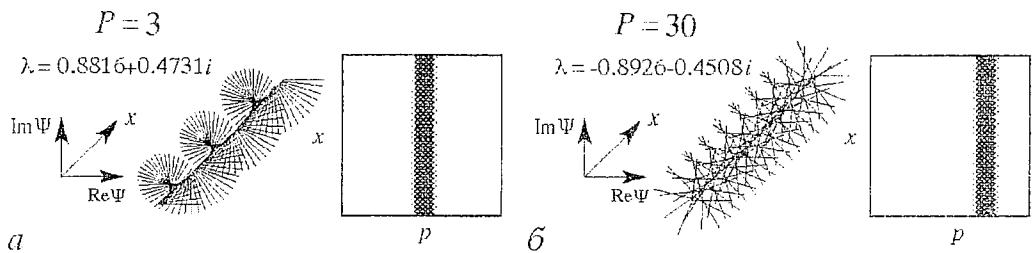


Рис. 16. Пространственная структура двух собственных векторов (слева) и соответствующие им распределения Хусими на плоскости $p=P/N, x=Q/N$ для квантового отображения параболического типа (свободное движение на торе) при $N=131$. Каждый собственный вектор одновременно является собственным вектором оператора K , то есть характеризуется определенным импульсом. Показаны векторы с $P=3$ и $30 \pmod{N}$

В работе Экхарда оставлен открытый вопрос о взаимосвязи между циклами при итерациях переменной a и периодическими орбитами классического отображения. Чтобы прояснить этот момент, заметим, что вектор состояния (7.6) можно представить как собственный вектор для оператора, построенного из операторов Вейля – Гейзенберга, а именно

$$(K^+)^Q A^P |\psi\rangle = \alpha^L |\psi\rangle. \quad (7.9)$$

где L – некоторое целое число. Используя определение операторов K и A (3.10), переписываем это уравнение в явном виде:

$$\psi_{m+Q} \alpha^{P(m+Q)} = \alpha^L \psi_m, \quad (7.10)$$

причем $\psi_{m+Q} = \psi_m$ в силу условия цикличности. Подставляя $\psi_m \propto \alpha^{am^2+bm+c}$, видим, что следует положить

$$a = \bar{2}Q, \quad b = -\bar{2}P - L\bar{Q} \pmod{N}. \quad (7.11)$$

Иными словами, состояние с заданными a и b получится, если

$$L=0, \quad Q=-b\bar{a}, \quad P=-2b \pmod{N}. \quad (7.12)$$

Чтобы получить состояние с $a=\bar{0}$, полагаем $Q=0$, тогда $\psi_m \propto \delta_{mb}$ и $b=L\bar{P}$.

Далее, следуя схеме рассуждений раздела 5, вектор состояния в момент времени k можно найти как собственный вектор оператора $(K^+)^Q A^{P(k)}$, где нижний индекс k нумерует последовательность операторов, порождаемую отображением (3.18). Как уже было показано, с точностью до фазового множителя, оператор $(K^+)^Q A^{P(k)}$ совпадает с $(K^+)^{Q(k)} A^{P(k)}$, где $P(k)$ и $Q(k)$ подчиняются классическому отображению кота Арнольда на дискретной решетке размера $N \times N$ (5.15). Каждой

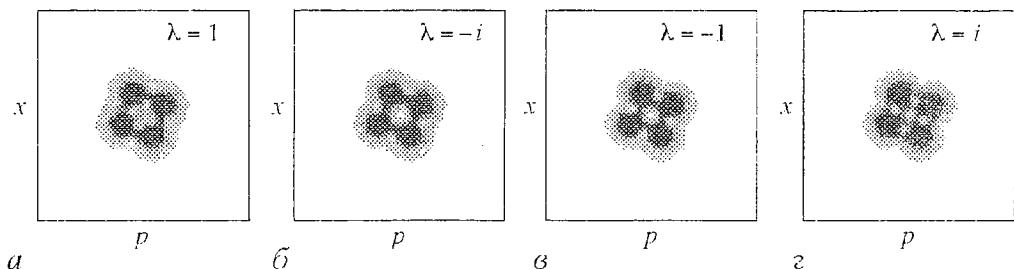


Рис. 17. Вид распределения Хусими для четырех векторов, представленных в разложении гауссова пакета минимальной ширины, совершающего движение по замкнутой орбите, стартующей из точки $P=7, Q=3$ в случае отображения эллиптического типа (обратное преобразование Фурье), $N=131$

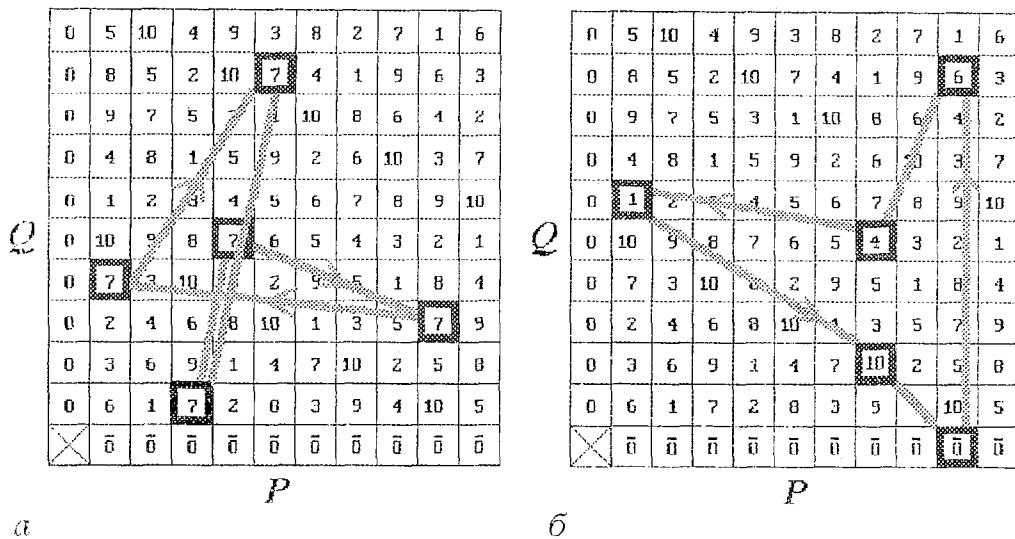


Рис. 18. К пояснению взаимосвязи между циклами, порождаемыми уравнением для параметра a в методе Экхарда и периодическими орбитами классического отображения на дискретной решетке $N \times N$. Каждой ячейке решетки (P, Q) приписано значение $a=2QP \pmod{N}$, а обход ячеек осуществляется по правилам итераций классического отображения. Для $N=11$ показаны две орбиты, отвечающие периоду 1 (а) и 5 (б) в эволюции параметра a

точке этой решетки соответствует определенное значение параметра $a=2\overline{QP}$ (рис. 18). Периодическая орбита отображения (5.15) посещает определенные точки на решетке, обеспечивая соответствующее периодическое изменение величины a .

8. Заключение и краткий обзор

Изложенный материал, несомненно, позволяет составить определенное впечатление о характере квантовой динамики модельных отображений на торе, а также ощутить те различия, которые имеют место между системами с регулярным и хаотическим поведением. Все же говорить о достижении полной ясности и определенности в этих вопросах пока еще трудно. Тем не менее, анализ рассмотренных модельных систем, несомненно, служит хорошим введением в проблематику квантового хаоса и подготавливает основу для обращения к более сложным задачам.

К сожалению, до настоящего времени в отечественной литературе практически отсутствуют публикации по исследованию квантовой динамики линейных отображений на торе и близких к нему по уровню сложности моделей, таких как отображение пекаря. Поэтому для удобства читателя кажется уместным привести краткий обзор работ, имеющих отношение к затронутым вопросам.

Классическое отображение, получившее впоследствии название «кот Арнольда» появляется в книге Арнольда [13], как простейший пример представителя так называемых У-систем Аносова. Доказывается наличие у этого отображения бесконечного (счетного) множества неустойчивых периодических орбит, а также свойств перемешивания и эргодичности. Соответствующие формулировки и доказательства приведены также в книге Девани, где, кроме того, выполнено построение марковского разбиения и дано описание отображения кота Арнольда на языке символьической динамики [14]. В серии работ [33–35], динамика линейных отображений на торе была интерпретирована в терминах алгебраической теории чисел, что позволило глубоко осознать многие особенности динамики, и, в частности, структуру множества периодических орбит.

Основополагающая статья, посвященная квантованию линейных отображений на торе (в представлении Шредингера) принадлежит Ханиэю и Берри [15]. Они исходят из формулировки классического отображения через принцип наименьшего действия и эксплуатируют связь этого принципа с квантовой механикой, чтобы получить сначала оператор эволюции для волновой функции, определенной на бесконечной оси. Затем на волновую функцию налагаются условия, отвечающие периодичности на торе, и с помощью аналитических выражений для гауссовых сумм производится соответствующая переформулировка оператора эволюции. Как показали Ханиэй и Берри, для того, чтобы предложенная схема квантования оставалась справедливой при всевозможных целых значениях квантового параметра N , матрица классического отображения с единичным детерминантом должна представляться в виде (3.19). Работа содержит примеры квантуемых в этом смысле отображений эллиптического, параболического и гиперболического типа. Вводится понятие квантового возврата, обсуждается спектр квазиэнергий, а также динамика функции Вигнера на дискретной решетке размера $2N \times 2N$. На русском языке имеется только очень краткое изложение этой работы в книге Шустера [12].

Следует отметить, что отображение «кот Арнольда» вида $p' = p + x, x' = p + 2x \pmod{1}$ не относится к классу квантуемых по Ханиэю – Берри. Его квантование для четных N проведено Фордом с соавторами [17,25,36], а для нечетных N , по-видимому, впервые в настоящей работе.

Экхард [18,37] предложил эффективную схему вычисления собственных векторов для отображений, квантуемых по Ханиэю – Берри, и показал, что для большинства этих векторов при больших N пространственное распределение имеет вид случайной функции.

Возможность обобщения ляпуновских показателей на квантовые системы на примере отображений на торе рассматривали Тода и Икеда [38], а также Файсал и Швентглебек [39]. Взаимосвязь такой характеристики хаоса как энтропия Колмогорова – Синай со свойствами динамики квантовых отображений на торе обсуждалась Климеком и Лесниевски [40]. Эпозити с соавторами [41], а также Бузуна и де Биевре [42] обосновали возникновение свойств перемешивания и эргодичности в динамике гиперболических отображений на торе при переходе к классическому пределу $N \rightarrow \infty$.

Взаимосвязь между классическими периодическими орбитами и спектральными свойствами квантовых систем с дискретным временем (отображений) была установлена Табором [43]. Для квантуемых по Ханиэю – Берри отображений на торе исследование периодических орбит и спектральных свойств, включая вывод и анализ соответствующей trace-формулы, выполнено Китингом [30,31]. Аналогичное соотношение получено Озорио де Алмейдой и да Лузом [32] с использованием интеграла по траекториям. Как оказалось, для гиперболических отображений на торе статистические свойства распределения уровней квазиэнергии носят особый, нетипичный для других систем с квантовым хаосом, характер, подчеркивающий теоретико-числовую природу закономерностей динамики. Включение малого возмущения, превращающего отображение в нелинейное отображение Аносова, приводит к тому, что статистика уровней становится такой же, как в типичных квантовых системах [44,45]. Соответствие между структурой классических периодических орбит и картинками распределения Хусими для собственных состояний обсуждается в работах [36,46].

В серии работ Форда с соавторами [17,25,36] в очень резкой форме заявлено, что в контексте проблемы квантового хаоса принцип соответствия становится несостоятельным. В частности, статья [17] озаглавлена «Кот Арнольда: крах принципа соответствия». Авторы указывают на нестыковки, возникающие при попытках трактовать квантовое и классическое описание и переход к классическому пределу в категориях теории сложности. Хотя выдвинутая аргументация интересна и заслуживает серьезного внимания, заявление о крахе принципа соответствия само по себе следует оценивать скорее как полемический

прием. По нашему мнению, правильнее сказать, что проблема квантового хаоса в сущности и заключается в том, чтобы разобраться, какое содержание должно вкладываться в принцип соответствия для систем, классические аналоги которых демонстрируют хаос.

Использование представления Гейзенберга для исследования проблемы квантового хаоса, в том числе в системах с дискретным временем, обсуждалось в общей постановке Заславским [16]. Операторы Вейля – Гейзенберга в контексте различных квантовых задач рассматривались, например, в работах [19, 20, 23]. В применении к описанию квантовой динамики отображений на торе этот аппарат отчасти был развит Кнабе [47] и в уже упоминавшейся работе Климека и Лесниевски [40].

Различные версии квантовых отображений, имеющих своими классическими аналогами линейные отображения на торе, а также разнообразные аспекты их динамики обсуждаются в работах [48–52]. Помимо отображений на торе, проводились достаточно активные исследования других модельных отображений, в том числе отображения пекаря и его модификаций. Хотя они имеют косвенное отношение к основной теме этой статьи, мы приводим для удобства читателя соответствующие ссылки [53–67].

В качестве работ, дающих более широкое представление о проблематике квантового хаоса, можно рекомендовать книги и обзорные статьи [1–6, 12, 16, 29, 37, 68, 69].

Приложение A

Квантование отображения «кот Арнольда» для четных значений квантового параметра N

Вернемся к принятому в основном тексте определению операторов K и A (3.10) и вычислим детерминант соответствующих матриц. Детерминант матрицы A есть произведение диагональных элементов: $\text{Det}(A)=\alpha^{[1+2+\dots+(N-1)]}=\alpha^{N(N-1)/2}$. Матрица K приводится к единичной с помощью $(N-1)$ -ой перестановки столбцов, так что $\text{Det}(K)=(-1)^{(N-1)}$. Таким образом, оба детерминанта равны 1 для нечетных N и -1 для четных. Из (3.7) следует, что $\text{Det}(K')=\text{Det}(K)\text{Det}(A)$, $\text{Det}(A')=\text{Det}(A)\text{Det}(K')$. Поэтому при четных N знаки детерминантов должны были бы изменяться в ходе временной эволюции. Опасение, что это обстоятельство повлечет неприятности, оправдывается при переходе к представлению Шредингера (см. раздел 3). Чтобы исправить положение, приходится переопределить форму операторного отображения так, чтобы знак детерминантов в процессе эволюции сохранялся.

Как отмечалось в разделе 2, конструируя выражение для оператора K' мы сталкиваемся с выбором – положить $K'=KA$ или AK . Обе формы совместимы с классическим отображением (3.1), но неэквивалентны в силу некоммутативности операторов: они отличаются на множитель α , поскольку $KA=\alpha AK$. Выберем «промежуточный» вариант $K'=\alpha^{1/2}AK=\alpha^{-1/2}KA$. Для второго уравнения сохраняем симметризованную форму: $A'=AKA$. Для четных N при таком выборе вида операторного отображения имеем $\text{Det}(K')=\text{Det}(K)=-1$ и $\text{Det}(A')=\text{Det}(A)=-1$.

Подставим выражения для матричных элементов

$$K_{mn}=\delta_{m+1,n} \text{ и } A_{mn}=\alpha^{m-n}\delta_{mn} \quad (A.1)$$

в операторное отображение

$$K'=\alpha^{1/2}AK, \quad A'=AKA \quad (A.2)$$

и вычислим произведения матриц. В результате имеем

$$K'_{m,n} = \delta_{m+1,n} \alpha^{n-1/2}, \quad A'_{m,n} = \alpha^{m+n} \delta_{m,n-1}. \quad (\text{A.3})$$

Перейдем в представление Шредингера и найдем вид оператора эволюции U . Поскольку должно быть $UK' = KU$, из (A.1) и (A.3) следует

$$U_{m,n-1} \alpha^{n-1/2} = U_{m+1,n}. \quad (\text{A.4})$$

Аналогично, условие $UA = AU$ при подстановке (A.1) и (A.3) дает

$$U_{m,n-1} \alpha^{2n-m-1} = U_{m,n}. \quad (\text{A.5})$$

Из (A.4) для диагональных элементов получаем $U_{m+1,m+1} = U_{m,m} \alpha^{m+1/2}$, так что $U_{m,m} = U_{00} \alpha^{[1/2+3/2+\dots+(N-1)/2]} = U_{00} \alpha^{m^2/2}$. Далее, с помощью (A.5) находим $U_{mm} = U_{00} \alpha^{m^2/2 - mn + n^2}$. Нетрудно убедиться, что полученное выражение для U_{mm} имеет период N по обоим индексам.

Выберем фактор U_{00} так, чтобы $|\text{Det}(U)|=1$, а след был действительным положительным числом. Имеем

$$\text{Tr}(U) = \sum_m U_{00} \alpha^{m^2/2} = U_{00} \sum_m \exp(i\pi m^2/N) = U_{00} N^{1/2} \exp(i\pi/4). \quad (\text{A.6})$$

Полагая $U_{00} = \exp(-i\pi/4) N^{-1/2}$, окончательно получаем

$$U_{mm} = \exp(-i\pi/4) N^{-1/2} \alpha^{(m^2/2 - mn + n^2)} = N^{-1/2} \exp[2\pi i(m^2/2 - mn + n^2)/N - i\pi/4], \quad (\text{A.7})$$

что совпадает с выражением, найденным в работе [17].

Оператор U можно представить также в виде произведения операторов V и W , описывающих стадии толчка и распространения.

Следуя общей идее, для стадии толчка заменяем в операторном уравнении комбинацию KA на $\alpha^{-1/2}KA$, так что

$$K' = \alpha^{-1/2}KA, \quad A' = A. \quad (\text{A.8})$$

Отсюда можно найти, что оператор эволюции в координатном представлении определяется диагональной матрицей:

$$V_{mm} = \exp(-i\pi/4) \alpha^{m^2/2} \delta_{mm} = \exp(\pi i m^2/N - i\pi/4) \delta_{mm}, \quad (\text{A.9})$$

где фазовый множитель выбран так, чтобы $\text{Tr}(V)=1$.

Для стадии распространения операторное отображение выбираем в виде

$$K' = K, \quad A = \alpha^{1/2}AK, \quad (\text{A.10})$$

откуда получаем для матричных элементов оператора эволюции выражение

$$W_{mm} = \alpha^{(m-n)^2/2} / N^{1/2} = N^{-1/2} \exp[i\pi(m-n)^2/N]. \quad (\text{A.11})$$

Как нетрудно проверить, $U = WV$.

Операторы W и V связаны соотношением $W = F^* V^* F$, поэтому оператор U можно представить также в виде $F^* V^* F V$.

В качестве операторного аналога параболического отображения (1.4) при четных N следует взять соотношение (A.10). Матрица оператора эволюции W определяется выражением (A.11). Что касается отображения эллиптического типа (1.5), то операторное отображение можно сохранить в прежнем виде, поскольку его итерации не приводят к изменению знака детерминантов. Оператор эволюции совпадает, как и для нечетных N , с оператором обратного преобразования Фурье.

Эволюция оператора $K+Q A^P$, периодические орбиты и закон сохранения

С помощью отображения, задающего динамику операторов K и A в представлении Гейзенberга, можно проследить эволюцию во времени и других операторов, получаемых из K и A с использованием операций сложения и умножения. В качестве важного примера рассмотрим встречающийся несколько раз в этой статье оператор $K+Q A^P$, действие которого состоит в выполнении сдвига на P шагов по импульсу и затем на Q шагов по координате.

Полагая $K=KA$, $A'=AKA$ и используя коммутационное соотношение $KA=\alpha A K$, можно убедиться, что

$$(K')^Q = (KA)(KA)(KA)\dots(KA) = \alpha^{(Q^2+Q)/2} A^Q K^Q, \quad (B.1)$$

$$(A')^P = (AKA)(AKA)(AKA)\dots(AKA) = \alpha^{-P^2} K^P A^{2P}. \quad (B.2)$$

Отсюда следует, что

$$[(K^+)^Q A^P]' = (K^+)^Q (A')^P = -\alpha^{-(Q^2+Q)/2+PQ-P^2} (K^+)^Q A^{2P-Q}, \quad (B.3)$$

то есть оператор на следующем шаге представлен вновь через исходные операторы K^+ и A , но с изменившимися показателями степени $Q_{(1)}=Q-P$ и $P_{(1)}=2P-Q$ и дополнительным фазовым множителем $\alpha^{-(Q^2+Q)/2+PQ-P^2}$. Соотношение между старыми и новыми показателями P и Q можно понимать по модулю N , поскольку $K^{+N}=1$ и $A^N=1$ (см. (3.10)).

Если повторить описанную процедуру k раз, то получится оператор

$$(K+Q A^P)^{(k)} = \exp\{(-2\pi i/N) \sum_{i=0}^{k-1} [((Q^2_{(i)}+Q_{(i)})/2 - P_{(i)}Q_{(i)} + P_{(i)}^2)]\} K^{+Q_{(k)}} A^{P_{(k)}}, \quad (B.4)$$

где величины $P_{(i)}$ и $Q_{(i)}$ удовлетворяют рекуррентным уравнениям

$$Q_{(i+1)} = Q_{(i)} - P_{(i)}, \quad P_{(i+1)} = 2P_{(i)} - Q_{(i+1)} \pmod{N} \quad (B.5)$$

с начальными условиями $P_{(0)}=P$, $Q_{(0)}=Q$. Уравнения (B.5) соответствуют, очевидно, итерациям в обратном времени отображения ката Арнольда $P'=P+Q$, $Q'=P+2Q \pmod{N}$.

Если начальные значения P и Q выбраны так, что точка (P, Q) принадлежит орбите периода k отображения ката Арнольда, то $P_{(k)}=P$ и $Q_{(k)}=Q$. Покажем, что стоящее в показателе экспоненты выражение (классическое действие, вычисленное вдоль периодической орбиты) для отображения ката Арнольда равно нулю по модулю N . Как можно видеть из уравнения (B.5), $P_{(i)}=Q_{(i)}-Q_{(i+1)} \pmod{N}$, поэтому выражение для действия вдоль периодической орбиты можно представить таким образом:

$$\begin{aligned} S_{\text{p.o.}} &= \sum_{i=0}^{k-1} ((Q^2_{(i)}+Q_{(i)})/2 - P_{(i)}Q_{(i)} + P_{(i)}^2) = \sum_{i=0}^{k-1} ((Q^2_{(i)}+Q_{(i)})/2 - Q_{(i)}Q_{(i+1)} + Q^2_{(i+1)}) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} (((N+1)/2)(Q^2_{(i)}+Q_{(i)}) - Q_{(i)}Q_{(i+1)} + Q^2_{(i+1)}) \pmod{N}. \end{aligned} \quad (B.6)$$

(Здесь использовано то обстоятельство, что число Q^2+Q всегда четное, а $(N+1)/2$ – целое в силу нечетности N .) Учитывая цикличность по индексу i , последнее выражение перепишем в виде

$$S_{\text{p.o.}} = ((N+1)/2) \sum_{i=0}^{k-1} Q_{(i)} (-Q_{(i-1)} + 3Q_{(i)} - Q_{(i+1)}) + ((N+1)/2) \sum_{i=0}^{k-1} Q_{(i)} \pmod{N}. \quad (B.7)$$

Но из уравнений (B.5) следует, что $(-Q_{(i-1)} + 3Q_{(i)} - Q_{(i+1)})=0 \pmod{N}$. Кроме того,

суммируя это выражение по всем элементам цикла, находим, что $\sum_{i=0}^{k-1} Q_{(i)} = 0 \pmod{N}$. Итак, из (B.7) видно, что сумма действительно равна нулю по модулю N .

Если вспомнить, что $P_{(k)}=P$ и $Q_{(k)}=Q$, то из (B.4) можно заключить, что $(K+QA^P)^{(k)}=K+QA^P$ или $U^{-k}K+QA^P U^k=K+QA^P$. Таким образом, если пара целых чисел (P, Q) принадлежит орбите периода k отображения кота Арнольда, определенного на дискретной решетке размера $N \times N$, то оператор $K+QA^P$ коммутирует с оператором эволюции за k временных шагов. Иными словами, с точки зрения динамики за k шагов, $K+QA^P$ есть сохраняющаяся величина, или оператор симметрии для квантовой системы. (Собственные векторы этого оператора будут одновременно собственными векторами U^k , причем найти их очень просто, ибо матричные элементы оператора $K+QA^P$ имеют вид $\alpha^{nP} \delta_{m-Q,n}$).

Приложение C

Классические периодические орбиты и спектральные свойства квантового отображения кота Арнольда

Установление связи между классическими периодическими орбитами и спектральными свойствами квантовых систем – одно из важнейших достижений теории квантового хаоса. В общем случае эта связь выражается так называемой trace-формулой Гутцвиллера [4,6,29], а в контексте линейных отображений на торе рассматривается в [30–32]. Учитывая направленность настоящей статьи, естественно обсудить взаимосвязь периодических орбит и спектральных свойств в свете динамики операторов Вейля – Гейзенберга. Поскольку спектр квазиэнергий однозначно определяется trace-последовательностью, зададимся вопросом о нахождении этой последовательности через эволюционирующие во времени операторы K и A .

След матрицы оператора эволюции за k шагов U^k представляется в виде

$$S_k = \text{Tr}(U^k) = \sum_{Q=0}^{N-1} \langle Q | U^k | Q \rangle = \sum_{Q=0}^{N-1} \langle 0 | K+QA^P U^k K^Q | 0 \rangle, \quad (\text{C.1})$$

где базисные векторы в координатном представлении $|Q\rangle$ выражены с помощью оператора сдвига K^Q через один из этих векторов, $|0\rangle$.

Так как унитарное преобразование матрицы не меняет след, в последнее выражение вместо U^k можно подставить комбинацию $A^P U^k A^{+P}$, где P – любое целое. Далее, поскольку результат не зависит от P , можно написать

$$S_k = (1/N) \sum_{P=0}^{N-1} \sum_{Q=0}^{N-1} \langle 0 | K+QA^P U^k A^{+P} K^Q | 0 \rangle.$$

Наконец, в последнем соотношении вместо вектора $|0\rangle$ можно подставить любой нормированный на единицу вектор $|\psi\rangle$, ибо с очевидностью всегда существует унитарное преобразование, переводящее один вектор в другой. Итак, справедливо представление

$$S_k = (1/N) \sum_{P=0}^{N-1} \sum_{Q=0}^{N-1} \langle \psi | K+QA^P U^k A^{+P} K^Q | \psi \rangle. \quad (\text{C.2})$$

Далее, в силу (4.3) имеем $K+QA^P U^k = U^k (K^{(k)}) + Q(A^{(k)})^P$. Пусть теперь в качестве $|\psi\rangle$ выбран собственный вектор оператора U^k , так что $\langle \psi_s | U^k = \lambda_s^k \langle \psi_s |$. Тогда из (C.2) следует, что

$$\lambda_s^{-k} S_k = (1/N) \sum_{P=0}^{N-1} \sum_{Q=0}^{N-1} \langle \psi_s | (K^{(k)}) + Q(A^{(k)})^P A^{+P} K^Q | \psi_s \rangle. \quad (\text{C.3})$$

Вследствие унитарности оператора U^k , $\lambda_s^{-k} = (\lambda_s^*)^k$, поэтому суммирование по всем собственным функциям дает

$$|S_k|^2 = (1/N) \sum_{P=0}^{N-1} \sum_{Q=0}^{N-1} \text{Tr}[(K^{(k)})^{+Q} (A^{(k)})^P A^{+P} K^Q]. \quad (\text{C.4})$$

Полученное соотношение для $|S_k|^2$ применимо для любого квантового отображения на торе. Теперь конкретизируем модель и рассмотрим отображение кота Арнольда (3.8). Как следует из результатов приложения В (см. (B.4), (B.5)), матричные элементы фигурирующего в (C.4) оператора $(K^{(k)})^{+Q} (A^{(k)})^P A^{+P} K^Q$ с точностью до фазового множителя равны $\delta_{m+P-P_{(k)}, n} \alpha^{m(Q_{(k)}-Q)}$. Если одновременно $P_{(k)}=P$ и $Q_{(k)}=Q$, то это единичный оператор, след которого равен N , в противном же случае след нулевой. Поэтому вклад в сумму дадут только те пары (P, Q) , которые принадлежат периодическим орбитам классического отображения с периодом k (включая те, период которых является делителем числа k). Поэтому из (C.4) вытекает, что

$$|S_k|^2 = \sum_{\substack{\text{по всем начальным точкам } P, Q, \\ \text{принадлежащим орбитам периода } k}} \exp\left[(2\pi i/N) \sum_{i=0}^{k-1} (Q_{(i)}^2 + Q_{(i)})/2 - P_{(i)} Q_{(i)} + P_{(i)}^2\right]. \quad (\text{C.5})$$

Далее, в приложении В показано, что сумма, фигурирующая под знаком экспоненты равна нулю по модулю N . Таким образом, для отображения кота Арнольда окончательно имеем

$$|S_k|^2 = \begin{cases} \text{число точек } (P, Q), \\ \text{принадлежащих орбитам периода } k \\ \text{на решетке размера } NxN \end{cases}. \quad (\text{C.6})$$

Эта формула позволяет с точностью до знака найти члены trace-последовательности путем подсчета для данного N всех периодических орбит классического отображения, которые имеются на дискретной решетке размера $N \times N$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект N 97-02-16414).

Библиографический список

1. Quantum Chaos – Quantum Measurement / Eds P.Cvitanovic, I.Percival and A.Wirzba. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 1992.
2. Nakamura K.. Quantum chaos. A new paradigm of nonlinear dynamics. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.
3. Елютин П.В. Проблема квантового хаоса // УФН. 1988. Т. 155, вып. 3. С. 397.
4. Ott E. Chaos in dynamical systems. Cambridge: Cambridge University Press, 1993. 385 p.
5. Quantum chaos / Eds H. Cerdeira, R. Ramaswamy, M. Gutzwiller and G.Casati. Singapore:World Scientific, 1991.
6. Reichl L.E. The transition to chaos in conservative classical systems: Quantum manifestation. Springer Verlag, 1992. 551 p.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Наука, 1974. 752 с.
8. Фок В.А. Начала квантовой механики. М.: Наука, 1976. 376 с.
9. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике.
10. Дирак П.А.М. Принципы квантовой механики. М.: Наука, 1979.
11. Эйнштейн А. К квантовому условию Зоммерфельда и Эйнштейна // Собрание научных трудов. М.: Наука, 1966. Т. 3. С. 407.
12. Шустер Г. Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988. 240 с.

13. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. С. 112.
14. Devaney R.L. An introduction to chaotic dynamical systems. N.-Y., Amsterdam, Tokyo: Addison-Wesley Publ.Comp., 1989. P. 190.
15. Hannay J.H., M.V.Berry. Quantization of linear maps on a torus – Fresnel diffraction by a periodic grating // *Physica* 1D. 1980. P. 267.
16. Заславский Г.М. Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984, 267 с.
17. Ford J., Mantica G., Ristow G.H. The Arnold's cat: Failure of the correspondence principle // *Physica* D50. 1991. P. 493.
18. Eckhardt B. Exact eigenfunctions for a quantised map // *J.Phys. A: Math.Gen.*, 1986. Vol. 19. P. 1823.
19. Weyers J. The quantum groups $GL_q(n)$ and Weyl-Heisenberg operators // *Physics Letters*. 1990. Vol. B240. № 3–4. P. 396.
20. Athanasiu G.G., Floratos E.G. The lightcone $SU_q(2)$ quantum algebra as dynamical symmetry of the Azbel – Hofstadter problem // *Physics Letters*. 1995. Vol. B352. P. 105.
21. Шредингер Э. Непрерывный переход от микро- к макромеханике // Избранные труды по квантовой механике. М.: Наука, 1976. С. 51.
22. Клаудер Дж., Сударшан Э. Основы квантовой оптики. М.: Мир, 1970. 428 с.
23. Saraceno M. Classical structures in the quantized baker transformation // *Annals of Physics*. 1990. Vol. 199, P. 37.
24. Балеску P. Равновесная и неравновесная статистическая механика. М.: Мир, 1978. Т. 1.
25. Ford J., Mantica G. Does quantum mechanics obey the correspondence principle? Is it complete? // *Am.J.Phys.* 1992. Vol. 60, № 12. P. 1086.
26. Kasperkovitz P., Peev M. Wigner – Weyl Formalisms for toroidal geometries // *Annals of Physics*. 1994. Vol. 230. P. 21.
27. Agam O., Brenner N. Semiclassical Wigner functions for quantum maps on a torus // *J.Phys. A: Math. Gen.* 1995. Vol. 28. P. 1345.
28. Mehta M.L. Eigenvalues and eigenvectors of the finite Fourier transform // *J.Math.Phys.* 1987. Vol. 28, № 4. P. 781.
29. Gutzwiller M.G. Chaos with few degrees of freedom // *Progress of Theor.Phys. Suppl.* 1994. № 116. P. 1.
30. Keating J.P. Asymptotic properties of the periodic orbits of the cat maps. Nonlinearity, 1991. Vol. 4. P. 277.
31. Keating J.P. The cat map: quantum mechanics and classical motion. Nonlinearity, 1991 Vol. 4. P. 309.
32. Ozorio de Almeida A.M., da Luz M.G.E. Path integrals and edge corrections for torus maps. *Physica*, 1996. Vol. D94. P. 1.
33. Percival I., Vivaldi F. Arithmetical properties of strongly chaotic motions // *Physica*. 1987. Vol. D25. P. 105.
34. I.Percival , F.Vivaldi. A linear code for the sawtooth and cat maps // *Physica*. 1987. Vol. D25. P. 373.
35. Bartuccelli M., Vivaldi F. Ideal orbits of toral automorphisms // *Physica*. 1989. Vol. D39. P. 194.
36. Mantica G., Ford J. On the completeness of the classical limit of quantum mechanics // *Quantum Chaos–Quantum Measurement* / Eds P. Cvitanovic, I. Percival, A. Wirzba. Kluwer Academic Publishers, 1992. P. 241.
37. Eckhardt B. Quantum mechanics of classically non-integrable systems // *Physics Reports*. 1988. Vol. 163, № 4. P. 205.
38. Toda M., Ikeda K. Quantal Lyapunov exponent // *Phys.Lett.* 1987. Vol. A124. P. 165.
39. Faisal F.H.M., Schwengelbeck U. Unified theory of Lyapunov exponents and positive example of deterministic quantum chaos // *Phys.Lett.* 1994. Vol. A207. P. 31.
40. Klimek S., Lesniewski A. Quantized chaotic dynamics and non-commutative KS entropy // *Annals of Physics*. 1996. Vol. 248. P. 173.

41. *Espositi M.D., Graffi S., Isola S.* Classical limit of the quantized hyperbolic toral automorphisms // *Commun.Math.Phys.* 1995. Vol. 167. P. 471.
42. *Bouzouina A., de Bievre S.* Equipartition of the eigenfunctions of quantized ergodic maps on the torus // *Commun.Math.Phys.* 1996. Vol. 178. P. 83.
43. *Tabor M.* A semiclassical quantization of area-preserving maps // *Physica*. 1983. Vol. 6D. P. 195.
44. *De Matos M Basilio, Ozorio de Almeida A.M.* Quantization of Anosov maps // *Annals of Physics*. 1995. Vol. 237. P. 46.
45. *Lakshminarayan A., Balazs N.L.* On the quantum cat and sawtooth maps – Return to generic behavior // *Chaos, Solitons & Fractals*. 1995. Vol. 5, № 7. P. 1169.
46. *Leboeuf P., Voros A.* Chaos-revealing multiplicative representation of quantum eigenstates // *J.Phys.A: Math.Gen.* 1990. Vol. 23. P. 1765.
47. *Knabe S.* On the quantisation of Arnold's cat // *J.Phys. A: Math.Gen.* 1990. Vol. 23. P. 2013.
48. *Isola S.* ζ –function and distribution of periodic orbits of toral automorphisms // *Europhysics Letters*. 1990. Vol. 11, № 6. P. 517.
49. *Weigert St.* The configurational quantum cat map // *Z.Phys.* 1990. Vol. B80. P. 3.
50. *Benatti F., Narnhofer H., Sewell G.L.* A non-commutative version of the Arnold cat map // *Lett.Math.Phys.* 1991. Vol. 21. P. 157.
51. *Kolovsky A.R.* Condition of correspondence between quantum and classical dynamics for a chaotic system // *Phys.Rev.Lett.* 1996. Vol. 76, № 3. P. 340.
52. *Kolovsky A.R.* Quantum coherence, evolution of the Wigner function, and transition from quantum to classical dynamics for a chaotic system // *CHAOS*. 1996. Vol. 6, № 4. P. 534.
53. *Balazs N.L., Voros A.* The quantized baker's transformation // *Europhysics Letters*. 1987. Vol. 4, № 10. P. 1089.
54. *Balazs N.L., Voros A.* The quantized baker's transformation // *Annals of Physics*. 1989. Vol. 190. P. 1.
55. *O'Connor P.W., Tomsovic S.* The unusual nature of the quantum baker's transformation // *Annals of Physics*. 1991. Vol. 207. P. 218.
56. *Ozorio de Almeida A.M., Saraceno M.* Periodic orbit theory for the quantized baker's map // *Annals of Physics*. 1991. Vol. 210. P. 1.
57. *Lakshminarayan A., Balaz N.L.* The classical and quantum mechanics of lazy baker maps // *Annals of Physics*. 1993. Vol. 226. P. 350.
58. *Saraceno M., Voros A.* Towards a semiclassical theory of the quantum baker's map // *Physica*. 1994. Vol. D79. P. 206.
59. *Dittes F.M., Doron E., Smilansky U.* Long-time behavior of the semiclassical baker's map // *Phys.Rev.* 1994. Vol. E49, № 2. P. R963.
60. *Hannay J.N., Keating J.P., Ozorio de Almeida A.M.* Optical realization of the baker's transformation // *Nonlinearity*. 1994. Vol. 7. P. 1327.
61. *Lakshminarayan A., Balaz N.L.* On the noncommutativity of quantization and discrete-time evolution // *Nuclear Physics*. 1994. Vol. A572. P. 37.
62. *Lakshminarayan A., Balaz N.L.* Relaxation and localization in interacting quantum maps // *J.Stat.Phys.* 1994. Vol. 77, № 1–2. P. 311.
63. *Lakshminarayan A.* On the quantum bakers map and its unusual traces // *Annals of Physics*. 1995. Vol. 239. P. 272.
64. *Saraceno M., Vallejos R.O.* The quantized D-transformation // *CHAOS*. 1996. Vol. 6, № 2. P. 193.
65. *Boasman P.A., Smilansky U.* Quantization of monotonic twist maps // *J.Phys. A: Math.Gen.* 1994. Vol. 27. P. 1373.
66. *Lakshminarayan A., Balaz N.L.* On the quantization of linear maps // *Annals of Physics*. 1991. Vol. 212. P. 220.
67. *Lakshminarayan A.* Semiclassical theory of the sawtooth map // *Phys.Lett.* 1994. Vol. A192. P. 345.
68. *Nakamura K.* Introduction to quantum chaos // *Chaos, Solitons & Fractals*. 1995. Vol. 5, № 7. P. 1035.

69. Bogomolny E.B., Georgeot B., Giannoni M.J., Schmit C. Quantum chaos on constant negative curvature surfaces // Chaos, Solitons & Fractals. 1995. Vol. 5, № 7. P. 1311.

Институт радиотехники и
электроники РАН,
Саратовский филиал

Поступила в редакцию 10.04.98

ARNOLD'S CAT MAP: QUANTUM CHAOS AND OPERATOR DYNAMICS IN HEISENBERG REPRESENTATION

S.P. Kuznetsov

The quantum model system is considered for which the classic analog is the known Arnold's cat map. Due to periodicity conditions for the phase space, quantum states are represented by vectors of finite dimension N , and operators by $N \times N$ matrices. The integer parameter N characterizes a relative value of quantum effects; classic limit corresponds to $N \rightarrow \infty$. Operator map is suggested which governs discrete time evolution in Heisenberg representation for operators of finite shifts for position and momentum. Explicit form of evolution operator is stated in Schrödinger representation. Solution for non-stationary problem is presented and discussed for initial conditions taken as localized state, two delta-spikes, Gaussian wave packet. Quantum dynamics in terms of Husimi distribution and Wigner function, quasi-energy spectrum and eigenvector structure are discussed on a basis of dynamics of Heisenberg operators.



Кузнецов Сергей Петрович родился в 1951 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, профессор базовой кафедры динамических систем Саратовского государственного университета в СФИРЭ РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Занимается также исследованиями в области квантового хаоса. Опубликовал свыше 100 работ в отечественной и зарубежной научной печати. Соавтор двух монографий и одной популярной книги. Автор нескольких оригинальных учебных курсов, прочитанных им в разные годы на кафедрах электроники и радиофизики СГУ и в Колледже прикладных наук СГУ. В 1995 году читал лекции по нелинейной теории колебаний в Датском техническом университете.