

Изв.вузов «ПНД», т.3, № 5, 1995

УДК 621.373

СТОХАСТИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС В БИСТАБИЛЬНОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ

В.С. Анищенко, Д.Э. Постнов, И.А. Хованов, Б.В. Шульгин

Методами численного и физического экспериментов исследуется эффект стохастического резонанса в бистабильной радиотехнической системе. Анализируются зависимости коэффициента усиления и отношения сигнал/шум от интенсивности внешнего шума и параметров сигнала модуляции. Проводится детальное сравнение результатов экспериментов с теоретическими расчетами. Установлено, что предложенная простая электрическая схема бистабильного передемптированного осциллятора может служить базовой динамической моделью для исследования эффекта стохастического резонанса.

Введение

Классический эффект стохастического резонанса (СР) был обнаружен в бистабильных системах, находящихся под одновременным воздействием шума и слабого гармонического сигнала [1, 2]. Эффект заключается в улучшении отклика системы при достижении интенсивностью внешнего шума некоторого оптимального значения. Под улучшением отклика понимается увеличение отношения сигнал/шум или усиление энергии внешнего гармонического сигнала в выходном спектре мощности. Механизм эффекта СР заключается в резонанском взаимодействии двух характерных временных масштабов системы, один из которых соответствует среднему времени переключения бистабильного элемента из одного состояния в другое под действием шума, а другой - периоду сигнала. Устойчивыми состояниями бистабильной системы могут быть два одинаковых режима, например состояния равновесия, периодические циклы [3,4], хаотические аттракторы [5,6,7], или комбинация двух различных асимметричных режимов.

Исследованиям СР, впервые описанному в [1], в настоящее время посвящено около сотни теоретических и экспериментальных работ, ссылки на которые можно найти, например, в обзоре [2], специальных выпусках, содержащих материалы конференций по СР [8,9], и обзорной работе [10], в которой явление СР всесторонне изучается с точки зрения периодически возбуждаемых стохастических систем. Вопросы, относящиеся к изучению эффекта СР, также обсуждаются в монографиях [11,12].

Актуальной проблемой является вопрос практического применения СР, являющейся предметом ряда исследований [2,13-18]. В работах [13,17] обсуждалась возможность использования СР для выделения слабого сигнала из шума. В работе [14] исследовалось усиление слабого сигнала посредством эффекта

СР. В работах [15,16] исследовались нелинейные и частотные искажения сигнала, возникающие при прохождении через бистабильную систему амплитудно и частотно модулированных сигналов. В статье [18] исследовалось явление СР при прохождении через бистабильную систему информационно-подобного сигнала с конечной шириной спектральной линии.

Целью данной работы было изучение закономерностей усиления сигнала посредством эффекта СР в реальном радиотехническом устройстве, моделирующем широкий класс наиболее простых бистабильных систем, и выяснение возможности практического использования бистабильных преобразователей в радиоэлектронике. Детальное сопоставление данных теоретического и экспериментального анализа позволит также определить пределы применимости теоретических результатов и работоспособность программного комплекса, специально созданного для цифровой обработки данных на компьютере.

1. Исследуемая модель

Исследуемая электрическая цепь была разработана и изготовлена на основе классической модели эффекта СР - бистабильного передемпфированного осциллятора, соответствующего предельному случаю осциллятора с большим трением. Передемпфирированный осциллятор моделирует основные характерные особенности поведения бистабильных систем независимо от их физической природы. Он описывается уравнением:

$$\dot{x} = -dU/dx + F(t), \quad (1)$$

где $U(x)$ - бистабильный потенциал, а $F(t)$ - входной сигнал.

$$F(t) = A\cos\omega_0 t + \xi(t),$$

$$\langle \xi(t + \tau)\xi(t) \rangle = 2D\delta(\tau),$$

где $\xi(t)$ - гауссов белый шум, а $2D$ - интенсивность шума. В качестве потенциала обычно используют симметричный бистабильный потенциал 4-ой степени:

$$U(x) = x^4/4 - x^2/2.$$

Была создана экспериментальная установка, моделирующая систему (1), принципиальная схема которой приведена на рис. 1.

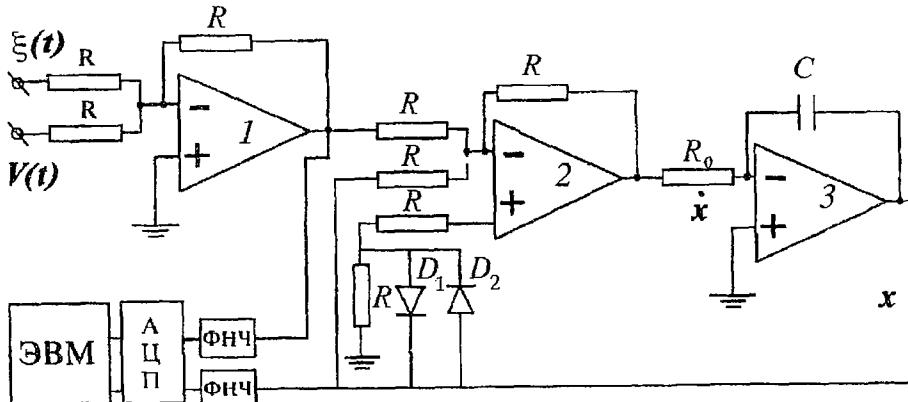


Рис. 1. Упрощенная принципиальная схема экспериментальной установки. 1,2 - сумматоры, 3 - интегратор, $\xi(t)$ - белый шум, $V(t)$ - регулярирующий сигнал $A\cos\omega_0 t$, D_1, D_2 - диоды с квадратичной нелинейностью, C и R_0 - элементы, определяющие постоянную интегрирования

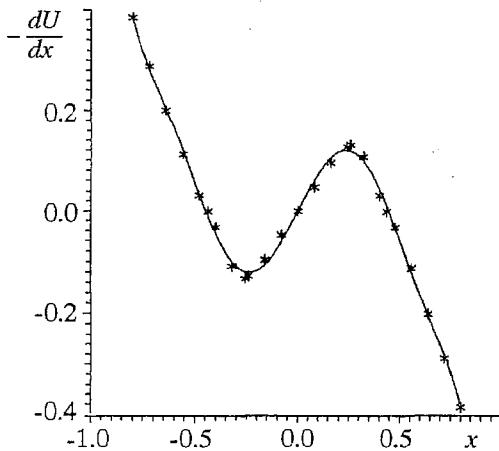


Рис. 2. Нелинейная характеристика бистабильного элемента схемы. Точками изображены экспериментально полученные значения, сплошная кривая - аппроксимация характеристики полиномом 7-ой степени (2)

теоретических и численных расчетов.

Потенциал $U(x)$ (2) имеет минимумы в точках $x_{\min} \approx \pm 0.447511$, максимум в точке $x_{\max} = 0$, глубину потенциального барьера $\Delta U \approx 0.0347205$. Значения кривизны потенциала в точках минимума и максимума определяют локальный временной масштаб, соответствующий времени релаксации при движении вблизи минимума

$$\tau_r^{-1} \sim d^2U(x)/dx^2|_{x=x_{\min}} = U''(\min) = 1.00583. \quad (3)$$

и глобальный масштаб, соответствующий перескокам из одной ямы в другую, определяющий время релаксации плотности вероятности к стационарной.

$$\tau_k^{-1} = [|U''(\max)|U''(\min)]^{1/2} e^{-\Delta U/D}/2\pi. \quad (4)$$

При исследовании СР сигнал выбирался слабым: $A \ll \Delta U/x_{\min}$. При этом было возможно использовать теорию линейного отклика. Частота сигнала выбиралась намного меньше времени релаксации системы $\omega_0 \ll U''(\min)$, что соответствует адиабатическому пределу [19].

Сигналы схемы, отвечающие величинам $x(t)$ и $F(t)$, через АЦП поступали в компьютер i486, где проводилась их соответствующая обработка при помощи специально созданного программного обеспечения. Перед АЦП сигналы пропускались через фильтры низких частот ФНЧ с целью удаления эффекта подмены (aliasing) [21]. Частота среза фильтров равнялась частоте Найквиста - максимальной частоте быстрого преобразования Фурье (БПФ):

$$f_c = f_n = 1/2\Delta t = f_{\text{дискр.АЦП}}/2, \quad f_c = 3 \text{ кГц.}$$

2. Теоретические результаты

Для стохастического резонанса был разработан ряд приближенных теорий. Первой была предложена адиабатическая теория Макнамары и Визенфельда [19]. Хенге и Юнг предложили теорию, в которой теоретическое решение уравнения Фоккера - Планка находится с использованием численных методов [14]. Впоследствии была разработана теория линейного отклика для СР [10, 20]. В рамках нашей задачи наиболее целесообразно использовать теорию линейного

отклика: условия эксперимента удовлетворяют условиям применимости теории, и для нахождения интересующих нас теоретических зависимостей необходимо знать только крутизну потенциала в точках минимума и максимума и глубину потенциального барьера. От этих параметров зависит управляемый шумом глобальный временной масштаб.

Усиление сигнала, то есть отношение спектральной мощности сигнала на выходе к входной, определяется выражением [10, 14]

$$\eta = P_{\text{вых}}/P_{\text{вх}} = 4|k_1|^2/A^2,$$

где k_1 - коэффициент при первой гармонике периодического асимптотического среднего значения стохастического процесса $x(t)$ на выходе системы (1). Он определяется формулой:

$$|k_1| = (A/2)|\chi(\omega)|,$$

где $\chi(\omega)$ - восприимчивость системы, являющаяся Фурье-преобразованием от функции отклика $R(\tau)$, которая в свою очередь может быть найдена из флюктуационно-диссипационной теоремы. В итоге усиление определяется формулой [10]:

$$\eta = \langle x^2 \rangle_{\text{ст}}^2 / [D(1 + \omega_0^2/\lambda_{\min}^2)], \quad (5)$$

где λ_{\min} - минимальное собственное значение оператора Фоккера - Планка для системы (1)

$$L_{\text{FP}} = -\partial(-\partial U/\partial x)/\partial x + D \partial^2/\partial x^2.$$

λ_{\min} определяет время релаксации плотности вероятности к стационарному значению. В отсутствии периодического возмущения λ_{\min} равняется удвоенной частоте Крамерса или обратно пропорционально среднему времени первого перехода

$$\lambda_{\min} = 2r_k = 1/T_1 = [|U''(\max)|U''(\min)]^{1/2} e^{-\Delta U/D}/\pi.$$

$\langle x^2 \rangle_{\text{ст}}$ в (5) - среднее значение стохастического процесса в отсутствии периодической силы,

$$\langle x^2 \rangle_{\text{ст}} = \int x^2 P_s(x) dx,$$

где $P_s(x) = N \exp(-u(x)/D)$.

Зависимости усиления от интенсивности шума для различных частот изображены на рис. 3, а штриховыми линиями.

Отношение сигнал/шум (SNR) на выходе определяется формулой [10]

$$SNR_{\text{вых}} = \frac{\pi A^2}{2D^2} \langle x^2 \rangle^2 \lambda_{\min}.$$

Отношение сигнал/шум на входе определяется

$$SNR_{\text{вх}} = A^2/8D.$$

Зависимости SNR на входе и выходе от интенсивности шума изображены на рис. 3, б штриховыми линиями. Из полученных результатов следует, что бистабильная система усиливает мощность сигнала на величину порядка 8-10 дБ, в области значений интенсивности шума, где отношение сигнал/шум на выходе не ухудшается по сравнению с SNR на входе. Различия между теорией и экспериментом в интересующей нас области не превышают ± 1 дБ и, по-видимому,

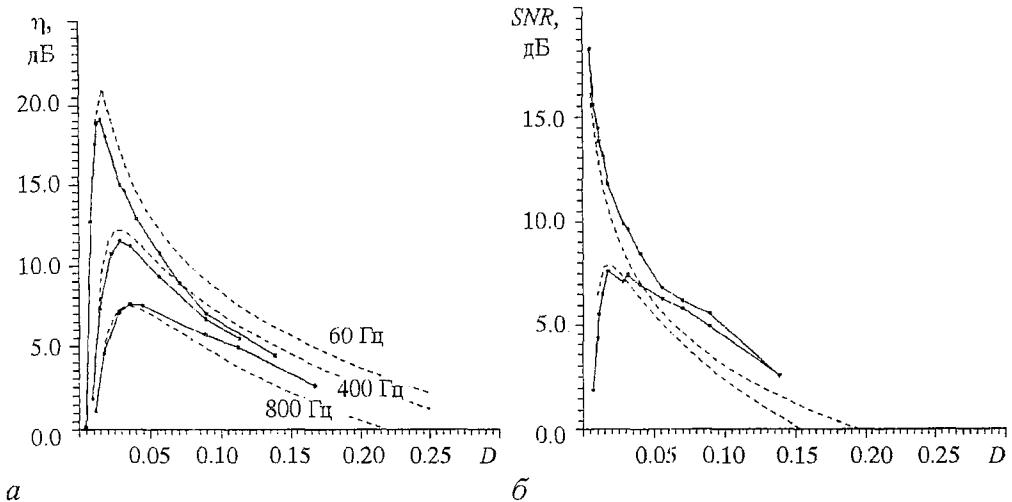


Рис. 3. Зависимости усиления от интенсивности шума для различных частот (а); зависимости SNR на входе и выходе от интенсивности шума (б). Сплошные кривые - экспериментальные, штриховые - теоретические, $A = 20$ мВ

обусловлены несоответствием шума, производимого радиотехническим генератором, идеальному белому шуму. Методика получения результатов физического эксперимента будет описана в разделе 4.

3. Численный эксперимент

Система (1) была исследована численными методами. Реализации стохастического процесса находились посредством интегрирования уравнения (1) методом Рунге-Кутта для стохастических дифференциальных уравнений [22]. Под отношением сигнал/шум в численном эксперименте (так же как и в физическом) понималось отношение энергии сигнала к энергии шума в полосе Δf , равной разрешению по спектру БПФ:

$$\Delta f = 1/N\Delta t,$$

$$SNR = P_s/P_n(\Delta f).$$

Таким образом, для сравнения теории с численным и физическим экспериментом необходимо добавить множитель $\Delta f = 1/(N\Delta t)$ в знаменатель выражения (6). В проведенных экспериментах N равнялось 2048, Δt равнялось $2\pi/(12\omega_0)$. SNR на выходе определялось по формуле (7). Перед вычислением выходного спектра сигнал с выхода бистабильного фильтра пропускался через фильтр низких частот с целью удаления эффекта алиасинга. Частота среза фильтра равнялась частоте Найквиста БПФ.

$$f_c = 1/2\Delta t. \quad (8)$$

Мы использовали $f_c = 6f_0$. На рис. 4, а приведены численно полученные зависимости коэффициента усиления от интенсивности шума для двух различных частот сигнала. На рис. 4, б приведена зависимость SNR от интенсивности шума. Различие в поведении численной и теоретических кривых в области малых значений D на рис. 4, б обусловлено тем, что приближенная теория разработана для «системы двух состояний» [19]. В приближении динамики двух состояний сигнал на выходе системы считается равным c , если система находится в правой

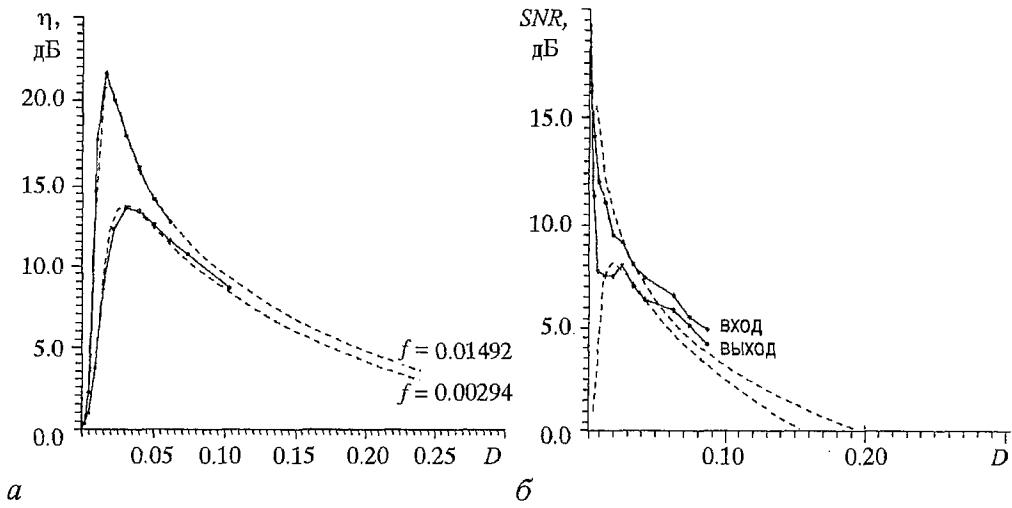


Рис. 4. Зависимость усиления от интенсивности шума для двух различных частот (а); зависимость SNR от интенсивности шума на входе и на выходе (б). Сплошные кривые - численные, штриховые теоретические

яме, и $-c$, если система находится в левой яме, где $2c$ - расстояние между центрами потенциальных ям. Таким образом в этом приближении отбрасывается динамика системы внутри ямы, а при малых D , когда перескоки между ямами отсутствуют, именно внутриямная динамика целиком определяет SNR на выходе системы.

4. Физический эксперимент

На рис. 5 изображены типичные сигналы, получаемые в эксперименте, после прохождения через АЦП. Верхний сигнал - входной $A\cos\omega_0 t + \xi(t)$, средний выходной $x(t)$, нижний - сигнал внешней модуляции $A\cos\omega_0 t$.

На рис. 6 изображены типичные экспериментальные входные (слева) и выходные (справа) спектры мощности. На рис. 6, а интенсивность шума мала, перескоки между состояниями довольно редкие. Поэтому в спектре преобладают низкочастотные компоненты, соответствующие длительному пребыванию системы на одном уровне. Отношение сигнал/шум (SNR) в выходном спектре намного меньше, чем во входном.

На рис. 6, б интенсивность шума несколько выше, перескоки становятся более частыми.

Рис. 6, в соответствует моменту стохастического резонанса. Увеличение шума на входе привело к увеличению регулярной компоненты на выходе. Перескоки системы из одного состояния в другое заметно коррелируют с периодическим сигналом. Усиление сигнала максимально. $SNR_{вх} \sim SNR_{вых}$.

На рис. 6, г интенсивность шума превышает оптимальную. Усиление сигнала меньше. $SNR_{вх} \sim SNR_{вых}$ по-прежнему.

Сигналы со схемы перед обработкой пропускались через фильтры низких частот, так как при дискретизации сигнала возникает эффект алиасинга, который заключается в зеркальном отражении спектра из области частот, больших

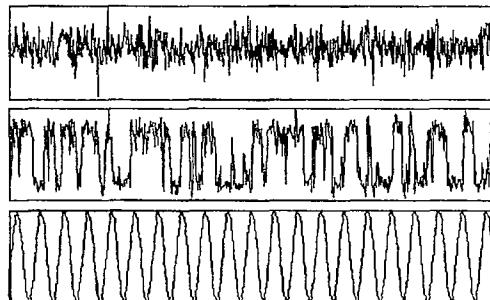


Рис. 5. Типичные экспериментальные сигналы. Верхний сигнал - входной, средний - выходной, нижний - сигнал внешней модуляции

относительной частоты.

максимальной частоты БПФ - f_n , в область низких частот [21]. На входе системы шум белый, а на выходе сильно окрашен, с частотой среза $\omega_c \sim \tau_{kr}^{-1}$. Поэтому эффект алиасинга максимальен на входе, где энергия шума равномерна распределена по спектру, и практически отсутствует на выходе, где почти вся

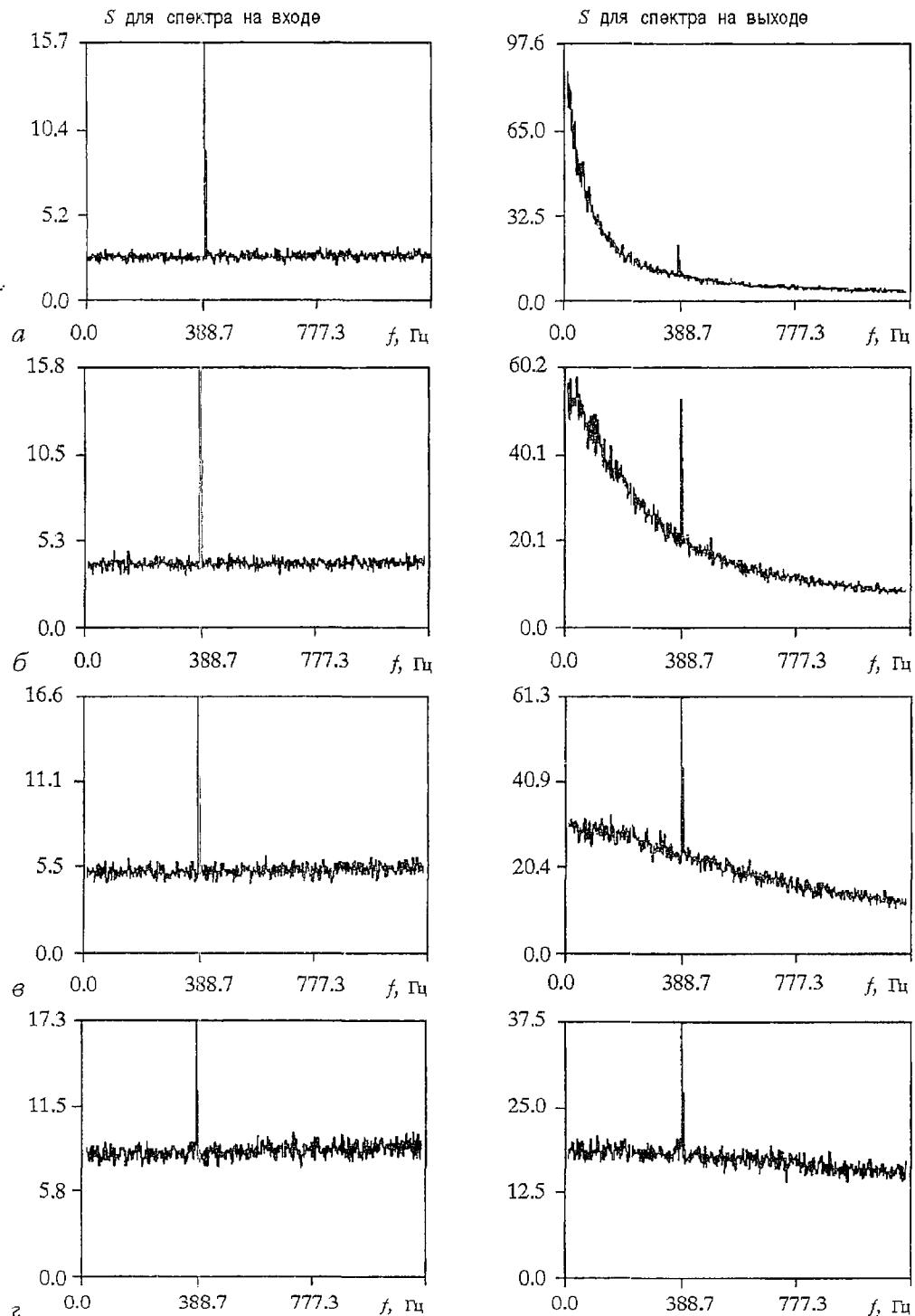


Рис. 6. Типичные экспериментальные входные (слева) и выходные (справа) спектры мощности, интенсивность шума увеличивается от верхнего рисунка к нижнему

энергия шума находится в полосе ниже максимальной частоты БПФ. Таким образом, шум на входе искусственно увеличивается за счет «отражения» энергии из полосы частот больших f_n , $SNR_{\text{вх}}^*$ уменьшается, и получается ошибочный результат - $SNR_{\text{вых}} > SNR_{\text{вх}}^*$, свидетельствующий о выделении сигнала из шума посредством СР [13]. При удалении эффекта алиасинга $SNR_{\text{вых}} \approx SNR_{\text{вх}}$.

Для сравнения теории и эксперимента было необходимо перейти от физических величин к безразмерному виду [23]. Схема моделирует уравнение :

$$RC\dot{x} = -dU/dx + A\cos\omega_0 t + (2D)^{1/2}\xi(t). \quad (9)$$

Нормируя время на постоянную времени интегратора $\tau = RC$, получим

$$\bar{x}/t = -dU/dx + A\cos\bar{\omega}_0\bar{t} + (2D)^{1/2}\xi(\bar{t}), \quad (10)$$

$$\text{где } \bar{t} = t/\tau, \bar{\omega}_0 = \omega_0\tau. \quad (11)$$

Постоянная времени цепи была измерена: $\tau = 49$ мкс. Амплитуда входного сигнала и нелинейная функция нормировались на 1 В. Интенсивность шума определялась посредством вычисления дисперсии оцифрованного входного сигнала.

Результаты физического эксперимента представлены на рис. 3 сплошными линиями. На рис.7 сравниваются результаты численного и физического эксперимента с теорией на примере зависимости усиления сигнала от шума. Результаты находятся в хорошем соответствии между собой, что подтверждает правильность использованных методов и позволяет использовать созданную экспериментальную установку и программное обеспечение для исследования более сложных систем.

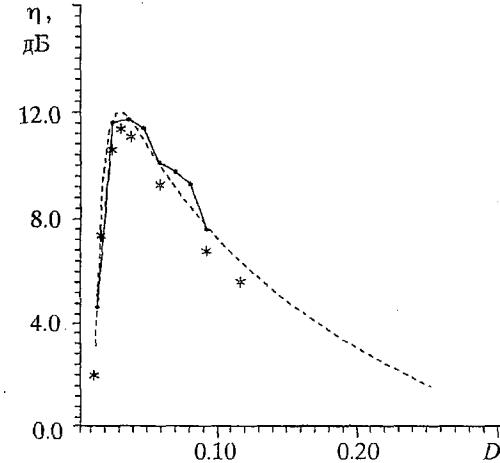


Рис. 7. Зависимости усиления сигнала от шума. Сравнение теоретических (штриховая линия), численных (сплошная) и экспериментальных (звездочки) данных, $A = 20$ мВ, $f = 400$ Гц

5. Обсуждение результатов и выводы

Приведенные теоретические и экспериментальные результаты при их сопоставлении свидетельствуют о том, что в условиях линейного приближения основные характеристики эффекта СР, полученные теоретически, прямым численным моделированием и экспериментально, совпадают в пределах ошибки, не превышающей $\pm 2\%$ в численном и $\pm 8\%$ - в физическом экспериментах. Из этого следует:

- 1) теория линейного отклика применима для анализа динамики системы типа передемптированного осциллятора с бистабильным потенциалом (2);
- 2) предложенная радиотехническая схема бистабильной системы (рис. 1) допускает описание уравнениями (1) с потенциалом (2);
- 3) разработанный комплекс программ для численного и экспериментального исследования эффекта СР дает правильные результаты и может быть использован в будущем как независимый метод анализа применительно к случаям более сложных динамических систем, реализующих эффект СР.

Результаты анализа конкретных характеристик эффекта СР в исследованной системе свидетельствуют о следующем: бистабильный фильтр с индуцированным

шумом взаимодействием аттракторов типа симметричных состояний равновесия обеспечивает усиление внешнего гармонического сигнала порядка 15-20 дБ по мощности; при этом отношение сигнал/шум на выходе фильтра в сравнении с входом в лучшем случае не изменится, но не может быть увеличено. Отсюда следует возможность практического использования подобных бистабильных преобразователей в качестве усилителей сигналов, работающих в условиях интенсивного внешнего шума.

Работа частично финансировалась за счет средств Международного Научного Фонда (грант NRO 000) и Госкомитета по высшему образованию России (грант № 93-8.2-10).

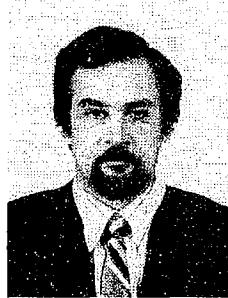
Библиографический список

1. Benzi R., Sutera S., Vulpiani V. // J. Phys. A. 1981. Vol. 14. P. 453.
2. Moss F. Stochastic Resonance: From the ice ages to the monkey ear // Some problems in statistical physics / Ed. by G.Weiss. SIAM. Philadelphia, 1992.
3. Dykman M., Luchinsky D., McClintock P., Stein N., Stocks N. High frequency stochastic resonance in periodically driven systems // Pisma Zh. Eksp. Theor. Fiz. 1993. Vol. 58, № 2. C. 145.
4. Caroll T., Pecora L. Stochastic resonance as a crisis in a period-doubled circuit / / Phys. Rev. E 1993. Vol.47, № 6. C. 3941.
5. Anishchenko V.S., Safonova M.A., Chua L.O. Stochastic resonance in Chua's circuit // Int.J.Bif. and Chaos. 1992. Vol. 2, № 2. C. 397.
6. Anishchenko V.S., Neiman A.B., Safonova M.A. Stochastic resonance in chaotic systems // J.Stat.Phys. 1993. Vol.70, № 1/2. C. 183.
7. Nicolis G., Nicolis C., McKernan D. Stochastic Resonance in Chaotic Dynamics // J.Stat.Phys. 1993. Vol. 70, № 1/2.
8. Proceedings of the NATO advanced research workshop on stochastic resonance // J. Stat. Phys. 1992. Special issue.Vol.70, № 1/2.
9. Fluctuation in physics and biology: stochastic resonance // Nuovo Cimento D. Special issue. Будет опубликовано.
10. Jung P. Periodically driven stochastic systems // Phys.Rep. 1994. Vol. 234, № 175.
11. Gardiner K. Handbook of stochastic methods. Berlin; Springer, 1985.
12. Risken H. The Fokker-Planck equations. Berlin: Springer, 1988.
13. Gammaconi L., Menichella- Saetta E., Marchesoni F. // Phys. Lett. A. 1989. Vol. 142. P.59.
14. Jung P., Hänggi P. Amplification of small signals via stochastic resonance // Phys.Rev.A. 1991. Vol. 44, № 12. C. 8032.
15. Anishchenko V.S., Safonova M.A., Chua L.O. Stochastic resonance in Chua's circuit driven by amplitude or frequency modulated signals // Int. J. Bif. and Chaos. 1994. Vol. 4, № 1.
16. Анищенко В.С., Нейман А.Б., Сафонова М.А., Хованов И.А. Стохастический резонанс при многочастотном воздействии // РЭ. 1994. Т. 39, № 8/9. С. 1380.
17. Анищенко В.С., Постнов Д.Е., Хованов И.А., Шульгин Б.В. Использование стохастического резонанса для повышения отношения сигнал/шум в радиотехнических системах // РЭ. Т. 39, № 12. С. 2004.
18. Neiman A.B., Shimansky-Geier L.R..Stochastic resonance in bistable systems driven by harmonic noise // Phys. Rev. Lett. 1994. Vol. 72, № 1. C. 2988.
19. McNamara B., Wiesenfeld K. Theory of stochastic resonance // Phys. Rev. A. 1989. Vol. 39, № 9. C. 4854.
20. Dykman M., Haken H., Gang Hu, и др. Linear response theory in stochastic resonance // Phys. Lett. A 1993. Vol. 180, № 332.
21. Press W., Flannery B., Teukolsky S., Vetterling W. Numerical Recipies in C. Cambridge, 1988.
22. Никитин Н., Разевиг В. Методы цифрового моделирования стохастических дифференциальных уравнений и оценка их погрешностей // ЖВМ. 1978. Т. 18, № 1. С. 106.
23. Zhou T., Moss F. Analog simulation of stochastic resonance // Phys. Rev. A 1990. Vol.41, № 8.

STOCHASTIC RESONANCE IN A BISTABLE ELECTRONIC CIRCUITS

V.S. Anishchenko, D.E. Postnov, I.A. Khovanov, B.V. Shulgin

The phenomenon of stochastic resonance in a bistable radiotechnical system is studied by means of numerical stimulation and full-scale experiments. The amplification factor and signal-to-noise ratio are analyzed depending on external noise intensity and periodic signal parameters. The results of experiments are compared in detail with theoretical computation. It has been shown that simple proposed electronic circuit of bistable over damped oscillator can serve as a basic dynamical model for exploration of stochastic resonance phenomenon.



Анищенко Вадим Семенович защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1970). С 1979 и по настоящее время работает в области исследований динамического хаоса. Защитил докторскую диссертацию «Механизмы возникновения и свойства динамического хаоса в радиофизических системах с конечным числом степеней свободы» (1986). В качестве приглашенного профессора читал курс лекций по динамическому хаосу в Гумбольдтском университете (Берлин, 1987). С 1988 года заведующий кафедрой радиофизики Саратовского университета. Автор 175 научных работ, среди которых 6 монографий и 3 учебника по статистической радиофизике. Три монографии написаны на английском языке, из них 2 книги опубликованы в Лейпциге (1987, 1989), готовится выпуск новой монографии издательством «World Scientific». В 1990 году издательством «Наука» выпущена книга «Сложные колебания в простых системах», хорошо известная среди специалистов. Удостоен почетного звания «Соросовский профессор» (1994) и принят в действительные члены Нью-Йоркской академии наук. С 1995 года Заслуженный деятель науки РФ.



Постнов Дмитрий Энгелевич в 1983 году окончил физический факультет Саратовского государственного университета по специальности «радиофизика и электроника», до 1987 года - инженер кафедры радиофизики СГУ. В 1990 году окончил аспирантуру при той же кафедре, защитив кандидатскую диссертацию «Регулярные и хаотические процессы в системах взаимодействующих нелинейных осцилляторов». С 1991 года работал старшим преподавателем кафедры радиофизики Саратовского университета, с 1995 года занимает должность доцента на той же кафедре. Автор 23 научных работ, опубликованных в отечественной и зарубежной печати.



Хованов Игорь Александрович родился в 1971 году в Саратове, окончил физический факультет Саратовского университета (1993). После окончания университета поступил в аспирантуру на кафедру радиофизики. Область научных интересов - нелинейная динамика и статистическая физика. Автор 5 научных работ.



Шульгин Борис Владимирович родился в 1970 году в Саратове, окончил физический факультет Саратовского университета (1992). После окончания университета поступил в аспирантуру на кафедру радиофизики. Область научных интересов - нелинейная динамика и стохастические процессы. Автор 4 научных работ.