



СТОХАСТИЗАЦИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ МОНОХРОМАТИЧЕСКИХ ВОЛН В ОПТИЧЕСКОМ ОДНОМОДОВОМ ФИБЕРЕ

М.И. Рабинович, М.Ш. Цимринг

В данной работе в канонической постановке изучается эффект стохастизации передаваемого сигнала из-за неоднородности волоконно-оптической линии связи. Рассматривается нелинейная стадия модуляционной неустойчивости волны накачки в трехволновом приближении. В результате анализа полученных в работе уравнений для амплитуд волн в гамильтоновой форме можно показать, что даже при достаточно слабой неоднородности световода в фазовом пространстве изучаемой динамической системы образуется «стохастический слой», то есть область, в которой поведение фазовых траекторий носит хаотический характер. Приведенные оценки позволяют сделать вывод, что рассматриваемое явление может реализовываться в реальном эксперименте.

Введение

Рождение пространственного хаоса при распространении связанных волн в нелинейной оптической среде, в частности, в среде с периодической неоднородностью, хорошо изучено в литературе [1-4]. Физика этого эффекта связана с энергообменом между различными модами, который происходит вдоль пространственной координаты при наличии неоднородности, вызываемой, например, сильным магнитным полем. Существует аналогия между такого рода пространственным хаосом и детерминированным временным хаосом в неинтегрируемых гамильтоновых системах, возникающим вследствие расщепления петли сепаратрисы. Последнее приводит к образованию стохастического слоя, ширина которого увеличивается с ростом исходного возмущения системы (в данном случае, амплитуды периодической неоднородности). В настоящей работе показывается, что такой механизм может привести к зарождению пространственного хаоса в одномодовом оптическом световоде при условии, что выполнены условия модуляционной неустойчивости. Мы решаем эту задачу в приближении трехволнового взаимодействия, предполагая, что сателлиты, возникающие из-за модуляционной неустойчивости, имеют фиксированные фазы и тождественны друг другу. Стохастизация распространения волн вдоль световода объясняется нерегулярным энергообменом между интенсивной волной накачки и ее сателлитами в слабонеоднородном световоде. Этот процесс удается описать с помощью гамильтоновой динамической системы второго порядка, причем меру расщепления сепаратрисы оказывается возможным определить аналитически в

квадратурах методом Мельникова [5]. Следует отметить, что результаты по пространственному хаосу в неоднородных средах ранее были получены лишь для сред с квадратичной нелинейностью и, так называемым, распадным взаимодействием волн. Наш анализ показывает, что пространственный хаос может развиваться и в случае нераспадной дисперсии.

1. Будем рассматривать стационарный режим распространения монохроматических волн в световоде. В работе [1] при анализе нелинейной динамики четырехволновых процессов в однородном световоде была численно продемонстрирована возможность хаотизации волн при распространении вдоль оси световода. Следуя этой работе, предположим, что две волны накачки с частотами ω_1 и ω_2 генерируют два сателлита первого порядка с частотами $\omega_3=2\omega_1-\omega_2$ и $\omega_4=2\omega_2-\omega_1$, и два сателлита второго порядка с частотами $\omega_5=2\omega_3-\omega_1$ и $\omega_6=2\omega_4-\omega_2$. Учитывая все возможные варианты взаимодействия волн и самовоздействия в среде с кубичной нелинейностью, получим следующую систему уравнений для 6 нормированных амплитуд полей [1]:

$$dU_1/dz = i\gamma P_1[|U_1|^2 + 2\sum_{j(\neq 1)}|U_j|^2]U_1 + 2U_3U_2U_1^*e^{i\Delta kz} + 2U_3U_4U_2^*e^{2i\Delta kz} + 2U_5U_6U_2^*e^{6i\Delta kz} + U_2^2U_4^*e^{-i\Delta kz} + U_3^2U_5^*e^{-i\Delta kz}], \quad (1)$$

$$dU_2/dz = i\gamma P_1[|U_2|^2 + 2\sum_{j(\neq 2)}|U_j|^2]U_2 + 2U_4U_1U_2^*e^{i\Delta kz} + 2U_3U_4U_1^*e^{2i\Delta kz} + 2U_5U_6U_1^*e^{6i\Delta kz} + U_1^2U_3^*e^{-i\Delta kz} + U_4^2U_6^*e^{-i\Delta kz}], \quad (2)$$

$$dU_3/dz = i\gamma P_1[|U_3|^2 + 2\sum_{j(\neq 3)}|U_j|^2]U_3 + 2U_1U_2U_4^*e^{-2i\Delta kz} + 2U_5U_1U_3^*e^{i\Delta kz} + 2U_5U_6U_4^*e^{4i\Delta kz} + U_1^2U_2^*e^{-i\Delta kz}], \quad (3)$$

$$dU_4/dz = i\gamma P_1[|U_4|^2 + 2\sum_{j(\neq 4)}|U_j|^2]U_4 + 2U_6U_2U_4^*e^{i\Delta kz} + 2U_1U_2U_3^*e^{-2i\Delta kz} + 2U_5U_6U_3^*e^{4i\Delta kz} + U_2^2U_1^*e^{-i\Delta kz}], \quad (4)$$

$$dU_5/dz = i\gamma P_1[|U_5|^2 + 2\sum_{j(\neq 5)}|U_j|^2]U_5 + 2U_1U_2U_6^*e^{-6i\Delta kz} + 2U_3U_4U_6^*e^{-4i\Delta kz} + U_3^2U_1^*e^{-i\Delta kz}], \quad (5)$$

$$dU_6/dz = i\gamma P_1[|U_6|^2 + 2\sum_{j(\neq 6)}|U_j|^2]U_6 + 2U_1U_2U_5^*e^{-6i\Delta kz} + 2U_3U_4U_5^*e^{-4i\Delta kz} + U_4^2U_2^*e^{-i\Delta kz}], \quad (6)$$

где U_1, \dots, U_6 - комплексные амплитуды волн накачки и сателлитов первого и второго порядка; γ - коэффициент нелинейности; P_1 - мощность импульса на частоте ω_1 ; $\Delta k = \Omega_{12}^2\beta^{(2)}$ - член, определяющий фазовую расстройку, $\Omega_{12} = |\omega_1 - \omega_2|$; $\beta^{(2)}$ - коэффициент дисперсии второго порядка¹.

Система уравнений (1)-(6) весьма сложна для аналитического исследования. Авторы [1] выполнили ее численный анализ и открыли ряд интересных черт ее динамического поведения при выборе различных параметров и начальных условий. Так, для достаточно высоких мощностей волны накачки P_1 была

¹ Предполагается дисперсия проекции волнового вектора вдоль оси световода в окрестности частоты волны накачки ω_1 в виде $\beta(\omega) = \beta^{(0)} + (\omega - \omega_1)\beta^{(1)} + 1/2(\omega - \omega_1)^2\beta^{(2)} + O((\omega - \omega_1)^3)$, где $\beta^{(n)} = d^n/d\omega^n|_{\omega=\omega_1}$.

продемонстрирована хаотизация распространения волн вдоль световода. Ниже мы попытаемся аналитически ответить на вопрос о существовании хаотического режима в модели (1)-(6). Рассмотрим уравнения (1)-(6) в более простой постановке, когда существует одна волна накачки ω_1 и учитывается лишь нелинейный процесс распада $\omega_3=2\omega_1-\omega_2$, в то время как нелинейные процессы второго порядка пренебрегаются. Положим

$$U_j = A_j \exp i\phi_j, \quad j = 1, 2, 3. \quad (7)$$

Подставляя (7) в (1)-(6) и полагая тождественность сателлитов $A_2=A_3$, получим систему уравнений для действительных амплитуд и фаз взаимодействующих волн

$$dA_1/dz = -2\gamma P_1 A_1 A_2^2 \sin(\Phi + \Delta kz), \quad (8)$$

$$dA_2/dz = \gamma P_1 A_1^2 A_2 \sin(\Phi + \Delta kz), \quad (9)$$

$$d\Phi/dz = 2\gamma P_1 \{(A_1^2 - A_2^2) + (A_1^2 - 2A_2^2) \cos(\Phi + \Delta kz)\}, \quad (10)$$

где $\Phi=2(\phi_1 - \phi_2)$. Система (8)-(10) может быть приведена к гамильтоновой форме заменой $p=A_1^{1/2}\sin(\Phi/2 + \Delta kz)$, $q=A_1^{1/2}\cos(\Phi/2 + \Delta kz)$

$$dp/dz = 1/2 \gamma P_1 q(q^2 - 3p^2 - E) - 1/2 \Delta k q, \quad (11)$$

$$dq/dz = 1/2 \gamma P_1 p(7p^2 + 3q^2 - 3E) + 1/2 \Delta k p, \quad (12)$$

где $E=A_1^2+2A_2^2$ - первый интеграл системы (8)-(10). Гамильтониан системы (11)-(12) имеет вид

$$\mathcal{H}(p, q, z) = 1/8 \gamma P_1 [p^2(7p^2 + 6q^2) - q^4 + 2E(q^2 - 3p^2)] + 1/4 (q^2 + p^2)\Delta k. \quad (13)$$

В однородной среде $\Delta k = \text{const}$. В этом случае система имеет 3 особых решения, соответствующие гетероклиническим траекториям, то есть сепаратрисам, соединяющим седловые состояния равновесия². В неоднородной среде сепаратрисы расщепляются из-за периодического сбоя фаз фазовых траекторий, образуя стохастический слой (рис.1). Подобный эффект был обнаружен в [6] при анализе двухволнового взаимодействия в среде с квадратичной нелинейностью. Мерой хаотичности фазовых траекторий в стохастическом слое может служить величина расщепления сепаратрис, определяемая методом Мельникова [5]

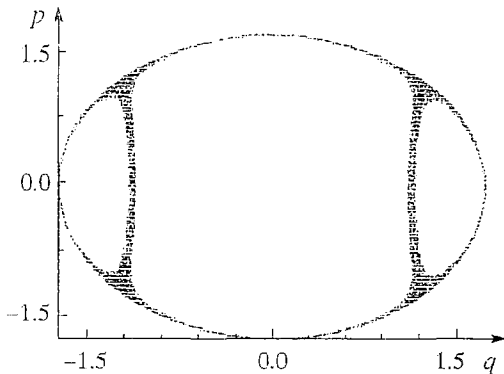


Рис. 1. Фазовый портрет системы в неоднородной среде. $E=3$; $\gamma P_1=1$; $\Delta k=-6+0.15\sin z$; начальные условия: $p|_{z=0}=q|_{z=0}=1.22$

$$\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} [\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1] dz, \quad (14)$$

где \mathcal{H}_0 - невозмущенный гамильтониан в однородной среде, $\mathcal{H}|_{\Delta k=0}$, $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H} - \mathcal{H}_0$, [...] - скобки Пуассона. Подставляя (13) в (14), получим

$$\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} |\Delta k| \gamma P_1 p_0 q_0 (p_0^2 + q_0^2 - E) dz, \quad (15)$$

где $p_0(z)$ и $q_0(z)$ соответствуют одному из «особых» решений невозмущенной системы (11),(12) для седловых сепаратрис. Очевидно, произведение $p_0(z)q_0(z)$ - нечетная функция, следова-

² Для $\Delta k < 0$, $\gamma P_1 E < |\Delta k| < 4\gamma P_1 E$.

тельно $\Delta=0$ при $\Delta k=\text{const}$. Следовательно, условием хаотизации решения является нечетность функции Δk . Величина Δ определяет толщину стохастического слоя такой гомоклинической структуры. Таким образом, выбирая начальные условия, например,

$$p|_{z=0} = \bar{p} + \Delta/n, \quad q|_{z=0} = \bar{q} + \Delta/n, \quad (16)$$

можно получить хаотический режим распространения волн в неоднородной среде. Здесь \bar{p}, \bar{q} - координаты в окрестности седловой сепаратрисы $p_0(z), q_0(z)$, n - целое число, больше единицы. В частности, можно выбрать координаты состояния равновесия системы для однородного световода: $\bar{p} = |\Delta k|/(4\gamma P_1)$, $\bar{q} = E - |\Delta k|/(4\gamma P_1)$.

Факт стохастизации «особых» решений системы (11)-(12) при учете периодической неоднородности среды подтверждается прямым вычислением корреляционной размерности их временных серий для различных начальных условий. Так, полагая функцию $\Delta k(z)$ в виде $\Delta k(z) = e \sin pz$, корреляционную размерность системы с параметрами $\gamma = 1.76 \times 10^{-2} \text{ м}^{-1} \text{ Вт}^{-1}$, $P_1 = 50 \text{ Вт}$, $E = 3$, $\Delta k = -6$ и начальными условиями $p|_{z=0} = q|_{z=0} = 1.22$ получаем равной $d_c = 1.82$. Вычисления были выполнены по 4×10^4 точкам с шагом $\Delta z = 0.1$. На рис. 2, а показаны зависимости корреляционных интегралов от масштаба для различных размерностей пространства вложения, на рис. 2, в представлены соответствующие кривые локального наклона корреляционных интегралов. Численные эксперименты по определению корреляционной размерности, выполненные для других начальных условий, попадающих в область притяжения стохастического слоя, дают значения d_c в диапазоне 1.7 - 1.85. На рис. 2, б, г для сравнения показаны кривые корреляционных интегралов и их локального наклона для тех же значений параметров при других начальных условиях.

Таким образом, характер поведения фазовых траекторий в стохастическом слое типичен, хотя и зависит от выбора начальных условий, как и должно быть для случая гамильтоновых систем. Обратимся теперь к исходной системе уравнений

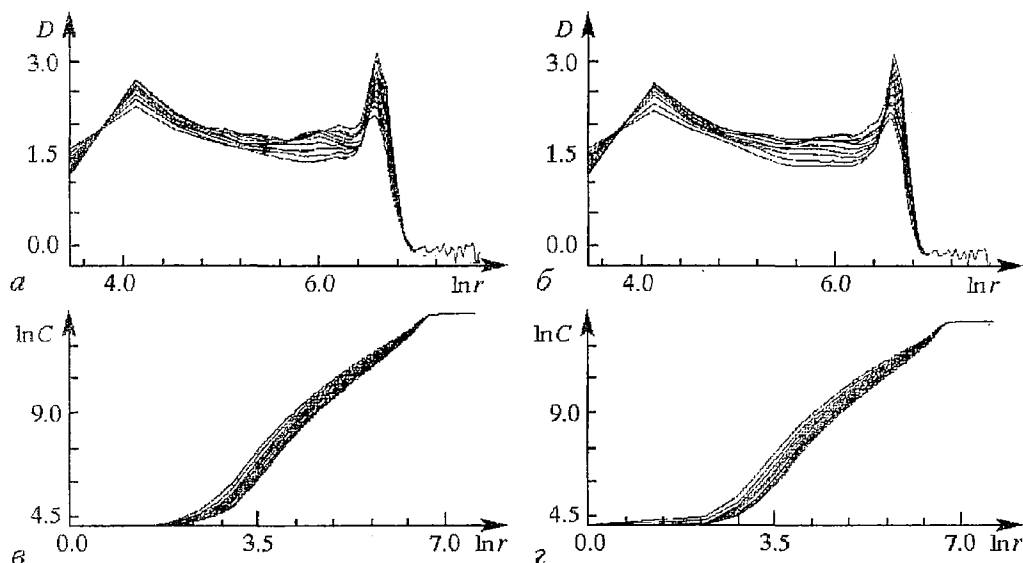


Рис. 2. а, б - Зависимость корреляционных интегралов от масштаба для различных размерностей пространства вложения (от 5 до 15) при $E=3$, $\gamma P_1=1$, $\Delta k=-6+0.15 \sin z$ и начальных условий: $p|_{z=0}=q|_{z=0}=1.22$ (а); $p|_{z=0}=1.14$, $q|_{z=0}=0.09$ (б). в, г - Соответствующие зависимости локальных наклонов корреляционных интегралов от масштаба для различных размерностей пространства вложения (от 5 до 15) и тех же значений параметров и начальных условий: $p|_{z=0}=q|_{z=0}=1.22$ (в); $p|_{z=0}=1.14$, $q|_{z=0}=0.09$ (г)

(1)-(6). Как мы видим, учет комбинационных процессов второго порядка приводит к появлению нелинейных факторов с другими фазовыми множителями. Эти факторы, следовательно, могут приводить к рассинхронизму (или периодическому сбою фаз) в распадных процессах первого порядка, то есть играть роль, аналогичную неоднородности среды в рассмотренной нами системе. Таким образом, становится качественно ясной природа хаотичности распространения волн, отмеченной в [1].

2. Для оценки возможности экспериментальной проверки хаотизации волн при распространении в неоднородном световоде возьмем ключевые примеры из реального эксперимента работы [1]. Длина волны накачки $\lambda_0=630$ нм, коэффициент нелинейности $\gamma=1.76 \times 10^{-2} \text{ м}^{-1} \text{ Вт}^{-1}$, коэффициент дисперсии второго порядка $\beta^{(2)}=70 \text{ ps}^2/\text{км}$, расстройка между частотами волны накачки и одного из ее спутников $\Omega_{12}=20 \text{ см}^{-1}$, длина световода $L=100 \text{ м}$, глубина модуляции неоднородности световода 3%. Для указанных параметров хаотический режим распространения волн будет происходить при попадании мощности волны накачки в диапазон $10 \text{ Вт} < P_1 < 40 \text{ Вт}$. Начальные условия для амплитуды волны накачки A_1 и ее спутника A_2 могут быть выбраны, например, в виде $A_2/A_1|_{z=0}=10^{-3}$ и разность фаз $\Delta\phi=(\phi_1 - \phi_2)|_{z=0}=0.76$.

Заключение

В настоящей работе рассмотрено влияние неоднородности волоконно-оптического световода, приводящее к хаотизации передаваемого сигнала. Аналитически определена степень хаотизации сигнала в стационарном режиме в зависимости от ключевых параметров, а также вычислен спектр корреляционных размерностей пространственного распределения амплитуды сигнала в зоне хаотичности для различных начальных условий. Приведенные оценки указывают на возможность экспериментальной проверки рассматриваемого эффекта.

Авторы признательны профессорам Раджариши Рою (Georgia Technical University, США) и Я.И.Ханину (ИПФ РАН, Россия) за интерес к работе и полезные дискуссии.

Выполнение настоящей работы стало возможным, в частности, благодаря поддержке Международного Научного Фонда (грант NP 2000).

Библиографический список

1. Thompson I.R., Roy R. // Phys.Rev.A. 1991. Vol. 43. P. 4987.
2. Wabnitz S. // Phys.Rev.Lett. 1987. Vol. 58. P. 1415.
3. David D., Holm D.D., and Tratnik M.V. // Phys.Rep. 1990. Vol. 187. P. 281.
4. Rabinovich M.I., Fabricant A.L. // Sov. Phys. JETP. 1979. Vol. 30. P. 311.
5. Mel'nikov V.I. // Trans. Moscow Math. Soc. 1963. Vol. 12. P. 1.
6. Pikovsky A.S. // Phys.Lett. A. 1980. Vol. 80. P. 367.

*Институт прикладной физики РАН,
Научно-исследовательский радио-
физический институт, Нижний Новгород*

Поступила в редакцию 24.03.95

STOCHASTIZATION OF MONOCHROMATIC WAVE PROPAGATION IN AN OPTICAL SINGLE-MODE FIBER

M.I. Rabinovich, M.Sh. Tsimring

The effect of the optical fiber inhomogeneities, giving rise to stochastization of the transmitted signal, is investigated in the canonical formulation. The nonlinear stage of the

modulation instability of the pump wave in the three-wave approximation is considered. The analytical analysis of the equations for the wave amplitudes in the Hamiltonian form shows that a «stochastic layer», i.e. the region in which the phase trajectories behave chaotically, is formed in the phase space of a dynamic system even at rather weak inhomogeneity of the fiber. The estimates indicate that the phenomenon under study is very likely to be observed in experiments.



Рабинович Михаил Израилевич - родился в 1941 году в Горьком, окончил радиофизический факультет Горьковского университета (1962). Работает в Институте прикладной физики РАН и Нижегородском государственном университете. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1967) и доктора физико-математических наук (1973) в области теории колебаний и волн. Автор монографий «Введение в теорию колебаний и волн», «Oscillations and Waves in Linear and Nonlinear Systems», «Nonlinearities in Action: Oscillations, Chaos, Order, Fractals», «Introduction to Nonlinear Dynamics for Physicists», более двухсот статей и обзоров в областях динамической теории турбулентности в жидкости, хаотической динамики радиофизических систем, пространственно-временного хаоса и порядка, нелинейных волн в неравновесных средах и др.

Член редколлегии журналов «International Journal of Bifurcation and Chaos», «International Journal of Nonlinear Science Today», «International Journal of Nonlinear Science», «International Journal of Statistical Physics», «Радиофизика». Член Американского физического общества.



Цимринг Михаил Шулимович - родился в 1963 году в Саратове, окончил радиофизический факультет Горьковского университета (1984). Работает в Научно-исследовательском радиофизическом институте (НИРФИ) и Институте прикладной физики РАН. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в НИРФИ (1992) в области теории неустойчивостей ионосферной плазмы. Опубликовал около двадцати научных работ по вопросам физики ионосферной плазмы и нелинейной динамики.