



## ХАОТИЧЕСКИЙ РЕЛАКСАЦИОННЫЙ ГЕНЕРАТОР

*А. Р. Волковский*

В работе экспериментально и численно исследуется автономный хаотический релаксационный генератор, представляющий собой блокинг-генератор, в коллекторную цепь транзистора которого включен дополнительный конденсатор. Экспериментально установлено, что генератор обладает хаотической динамикой в широкой области параметров. Переход к хаосу осуществляется, как правило, через перемежаемость. В результате экспериментального двухпараметрического исследования построена бифуркационная диаграмма на плоскости параметров генератора. Получена математическая модель системы в виде одномерного точечного отображения для интервалов времени между двумя последовательными импульсами, позволяющая качественно объяснить все динамические процессы, наблюдаемые в эксперименте. Численное исследование бифуркационной структуры пространства параметров математической модели показало, что расположение бифуркационных границ хорошо согласуется с результатами эксперимента.

1. Системы релаксационного типа представляют большой класс автоколебательных систем, характерной особенностью которых является наличие в фазовом пространстве участков быстрых и медленных движений. Колебательные процессы в механических системах с сухим трением, гидродинамических потоках, электрических разрядах, различных биологических объектах и электронных схемах носят релаксационный характер. Известно, что хаотические режимы реализуются в таких системах при внешнем периодическом воздействии [1] и взаимодействии нескольких систем [2]. Как показано в работах [3,4], хаотические колебания могут существовать и в автономных релаксационных системах за счет возбуждения «внутренних колебаний» во время быстрых движений, причем подобные модели используются при решении многих физических задач (см., например, [3]). В связи с этим всестороннее изучение электронных аналогов хаотических релаксационных автоколебательных систем является весьма актуальным.

В настоящей работе исследуется автономный хаотический генератор релаксационного типа, представляющий собой широко применяемый в технике блокинг-генератор, в коллекторную цепь транзистора которого включен дополнительный конденсатор  $C_k$  (рис. 1, а). Точный анализ работы блокинг-генератора является весьма сложной математической задачей, что обусловлено высоким порядком исходной системы дифференциальных уравнений, существенно нелинейным режимом работы активного элемента и импульсного трансформатора (при наличии ферромагнитного сердечника). Однако релаксационный характер колебаний дает возможность построить приближенную математическую модель в виде одномерного точечного отображения, позволяющую качественно объяснить механизм возбуждения хаотических колебаний и проследить в пространстве параметров последовательность бифуркаций, приводящих к смене различных режимов.

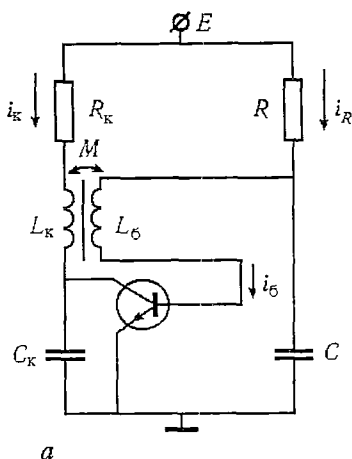


Рис. 1, а. Схема генератора:  $L_k = 50$  мГн,  $L_6 = 0.5$  мГн,  $C_k = 3600$  пФ,  $C = 0.047$  мкФ,  $E = 7$  В

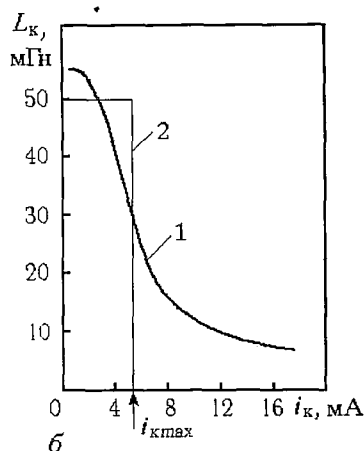


Рис. 1, б. Зависимость индуктивности коллекторной обмотки трансформатора от намагничивающего тока и ее кусочно-линейная аппроксимация

2. При выводе уравнений, описывающих динамику блокинг-генератора, будем считать, что транзистор работает в идеальном ключевом режиме, когда его инерционные свойства не учитываются, а сопротивление коллектор-эмиттер  $R_{кэ} = R_{кэ}(U_6)$  и вольт-амперная характеристика перехода база-эмиттер  $i_b = i_b(U_6)$  могут быть представлены кусочно-линейными функциями вида

$$R_{кэ} = \begin{cases} \infty, & U_6 \leq 0, \\ 0, & U_6 > 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad i_b = \begin{cases} 0, & U_6 \leq 0, \\ U_6/R_6, & U_6 > 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $R_6$  – сопротивление базы транзистора.

Аппроксимируем зависимость магнитной проницаемости сердечника от намагничивающего тока кусочно-линейной функцией

$$\mu = \begin{cases} \mu_n, & \eta \leq \eta_{\max}, \\ \mu_0, & \eta > \eta_{\max}, \end{cases} \quad \mu_n/\mu_0 \gg 1, \quad (2)$$

где  $\mu_0$  – магнитная проницаемость вакуума;  $\eta_{\max}$  – число намагничивающих ампер-витков, вызывающее насыщение сердечника. При такой аппроксимации дифференциальная индуктивность коллекторной и базовой обмоток  $L_k$ ,  $L_6$ , а также взаимная индуктивность  $M$  оказываются кусочно-линейными функциями намагничивающего тока (рис. 1, б).

Анализ работы схемы начнем в момент времени, когда напряжение  $U_6$  достигло порогового значения и транзистор открылся. Учитывая, что для торроидального сердечника коэффициент связи  $k = M/\sqrt{L_k L_6}$  примерно равен 1, и предполагая, что  $i_R \ll i_6$ , запишем уравнения для токов в обмотках трансформатора в виде

$$\begin{aligned} L_{\text{экв}} \frac{d}{dt} i_\mu + R_k i_\mu &= E, \\ i_6 &= \frac{1}{Z} M \frac{d}{dt} i_\mu, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $L_{\text{экв}} = L_k(1 + n^2 R_k/Z)$  – индуктивность намагничивания;  $Z(p) = (1 + R_6 C p)/(C p)$  –

операторный импеданс нагрузки трансформатора;  $n = \sqrt{L_6/L_k}$  – коэффициент трансформации;  $i_\mu = i_k - ni_6$  – ток намагничивания сердечника.

Из условия непрерывности тока намагничивания следует, что после включения транзистора  $i_\mu = i_{k1}$ , где  $i_{k1}$  – ток в коллекторной обмотке трансформатора до включения транзистора. Решение первого уравнения системы (3) с начальными условиями  $i_\mu(0) = i_{k1}$  дает временную зависимость тока намагничивания

$$i_\mu(t) = i_{\max}(1 - (1 - \frac{i_{k1}}{i_{\max}}))e^{-R_k t/L_{\text{эвб}}}, \quad \text{где } i_{\max} = E/R_k. \quad (4)$$

В соответствии с (4) ток намагничивания возрастает до значения  $i_\mu = i_{\max}$ , при котором сердечник насыщается, ЭДС во вторичной обмотке и ток базы  $i_6$  становятся равными нулю и транзистор закрывается. Длительность генерируемого импульса  $t_n$ , равная времени нарастания тока  $i_\mu$  до насыщения, может быть найдена из (4)

$$t_n = (L_{\text{эвб}}/R_k) \ln[(1 - i_{k1}/i_{\max})/(1 - i_{\max}/i_{\max})]. \quad (5)$$

За время действия импульса конденсатор  $C$  заряжается током  $i_6 = i_6(t)$  до напряжения  $U_1$ . Будем считать, что параметры схемы выбраны таким образом, что  $R_6 C \gg t_n$ ,  $n \ll 1$ . Тогда  $Z \approx R_6$ ,  $L_{\text{эвб}} \approx L_k$  и напряжение будет равно

$$U_1 = -M/(R_6 C)(i_{\max} - i_{k1}). \quad (6)$$

После завершения процесса формирования импульса, ток  $i_6$  становится равным нулю, и конденсатор  $C$  медленно перезаряжается током  $i_R$ , при этом напряжение на нем изменяется по закону

$$U_c = E(1 - (1 + M/(ER_6 C))(i_{\max} - i_{k1}))e^{-t/(RC)}, \quad (7)$$

а в колебательном контуре  $L_k C_k$  происходят затухающие колебания тока

$$i_k = e^{-R_k t/(2L_k)} i_{\max} \cos \sqrt{\frac{1}{L_k C_k} - \frac{R_k^2}{4L_k^2}}, \quad (8)$$

которые создают на вторичной обмотке трансформатора напряжение

$$U_{L_6} = M di_k/dt. \quad (9)$$

По мере заряда конденсатора  $C$ , напряжение на базе транзистора  $U_6 = U_c + U_{L_6}$  возрастает, и, при достижении им порогового значения  $U_6 = 0$ , транзистор открывается, и генератор формирует новый импульс. Интервал времени  $t$  между импульсами может быть найден как корень уравнения

$$0 = E(1 - (1 + \frac{M}{ER_6 C}(i_{\max} - i_{k1}))e^{-t/(RC)}) + M i_{\max} e^{-R_k t/(2L_k)}(-\frac{R_k}{2L_k} \cos \omega t - \omega \sin \omega t), \quad (10)$$

где 
$$\omega = \sqrt{\frac{1}{L_k C_k} - \frac{R_k^2}{4L_k^2}}.$$

Уравнение (10) определяет интервал времени  $t_{n+1}$  между двумя соседними импульсами  $d_n$  и  $d_{n+1}$  как неявную функцию тока  $i_{k1} = i_n$  в коллекторной обмотке трансформатора в момент начала импульса  $d_n$ , а уравнение (8) позволяет найти значение тока  $i_n$  как функцию интервала  $t_n$ . Таким образом (8) и (10) неявно задают рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= F_1(i_n), \\ i_n &= F_2(t_n), \end{aligned} \quad (11)$$

которые могут рассматриваться как точечное отображение временного отрезка  $\tau = [t_{\min}, t_{\max}]$  в себя. Разрешив уравнение (10) относительно тока  $i_n = i_{k1}$ , запишем (11) в виде

$$\begin{aligned} I_n &= 1 + \alpha(1 - e^{\delta T_{n+1}} + \beta e^{(\delta - \delta_k)T_{n+1}} (\delta_k \cos T_{n+1} + \sin T_{n+1})), \\ I_n &= e^{-\delta_k T_n} \cos T_n, \end{aligned} \quad (12)$$

где введены переменные  $I_n = i_n / i_{\mu\max}$ ,  $T_n = \omega t_n$  и параметры

$$\delta = \frac{1}{R\omega C}, \quad \alpha = \frac{R_6 C E}{M i_{\mu\max}}, \quad \beta = \frac{M i_{\mu\max} \omega}{E}, \quad \delta_k = \frac{R_k}{2L_k \omega}. \quad (13)$$

Первое уравнение системы (12) позволяет вычислить интервал времени  $T_{n+1} = F_1(I_n)$  через обратную функцию  $F_1^{-1}(T_{n+1})$ , которая в общем случае не является монотонной. Следовательно, функция  $F_1(I_n)$  неоднозначна, что физически не имеет смысла. Доопределить ее до однозначности можно, приняв во внимание то, что  $F_1(I_n)$  есть время заряда конденсатора  $C$  до порогового значения, превышение которого вызывает генерацию нового импульса. Таким образом, из всех участков неоднозначности физический смысл имеют лишь те, которые соответствуют минимальному времени  $T$ . Графически отображение (12) представлено на рис. 2, где стрелкой обозначена траектория.

3. Исследование бифуркационной структуры пространства параметров отображения (12) проводилось численно. Бифуркационные кривые (рис. 3)

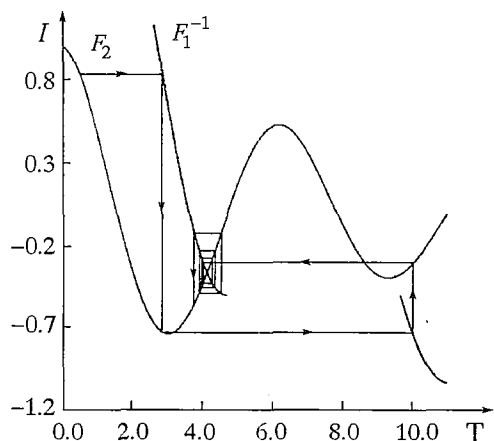


Рис. 2. Траектория отображения (12) для  $\alpha = 6.0$ ,  $\beta = 0.22$ ,  $\delta^{-1} = 50.0$ ,  $\delta_k = 0.1$

строились на плоскости параметров  $(\delta^{-1}, \delta_k)$  при фиксированных значениях  $\alpha$  и  $\beta$ , соответствующих номиналам элементов схемы генератора, указанным на рис. 1. В области G1 отображение имеет единственную устойчивую неподвижную точку, отвечающую регулярным автоколебаниям различного периода. Пересечение кривых, отмеченных символом  $l_1$  вызывает потерю устойчивости неподвижной точки (мультипликатор пересекает значение  $-1$ ). При этом возможно жесткое рождение хаотических колебаний (через перемежаемость), либо многотактных циклов. Область пространства параметров, соответствующая хаосу, отмечена символом ch,

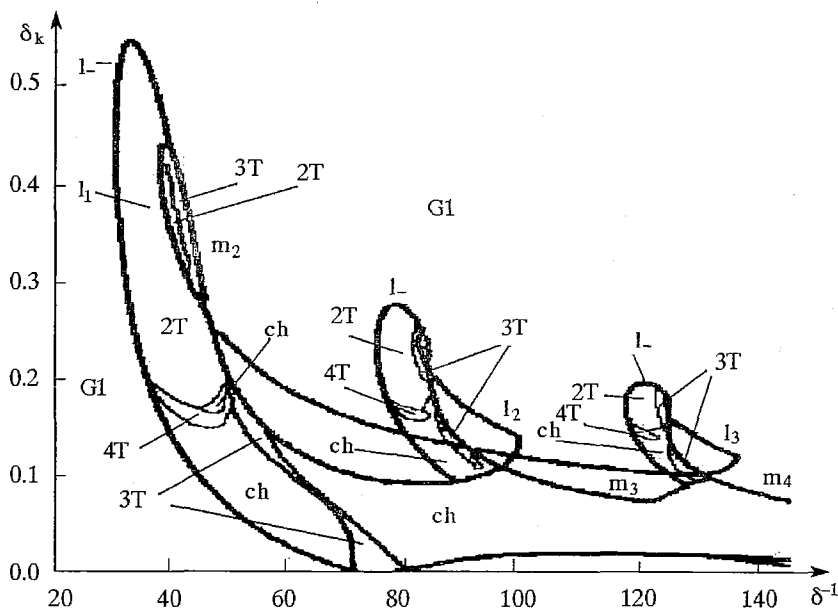


Рис. 3. Бифуркационная диаграмма отображения (12)

а области циклов – 2Т, 3Т, 4Т. Семейства кривых  $l_i$  и  $m_i$  связаны с бифуркацией рождения (исчезновения) неподвижной точки при прохождении ее через координату разрыва отображения. Пересечение кривых  $l_i$  в сторону увеличения  $\delta^{-1}$  приводит к исчезновению неподвижной точки, расположенной на  $i$ -ом участке возрастания функции  $F_2(T)$ , а пересечение кривых  $m_i$  в сторону увеличения  $\delta^{-1}$  сопровождается появлением новой неподвижной точки на  $i$ -ой осцилляции функции  $F_2(T)$ . Рождение устойчивой неподвижной точки, соответствующей колебаниям небольшого периода  $T < 3T_0$ , где  $T_0$  – период колебаний в контуре  $L_k C_k$ , приводит к кризису странного аттрактора; однако, при  $T > 3T_0$  возможно совместное существование странного аттрактора и устойчивой неподвижной точки, так как их области притяжения не пересекаются.

Одной из основных характеристик аттрактора, позволяющей установить факт существования хаотических колебаний, является ляпуновский показатель, который для одномерного точечного отображения  $x_{n+1} = f(x_n)$  легко может быть вычислен по формуле (см., например, [5])

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \ln |f'(x_i)|. \quad (14)$$

Одномерная бифуркационная диаграмма и ляпуновский показатель системы (12) приведены на рис. 4, а, б соответственно. Наличие таких значений параметров, при которых величина  $\lambda$  имеет положительные значения, свидетельствует о существовании хаотических колебаний.

4. Экспериментальное исследование различных режимов работы генератора проводилось путем одновременного наблюдения реализаций сигнала  $U_k(t)$  и проекций фазовых траекторий на плоскость  $(U_{L_k}, i_k)$ . Контрольными являлись параметры  $R$  и  $R_k$ , при этом другие параметры оставались фиксированными (их значения указаны на рис. 1). Полученная бифуркационная диаграмма приведена на рис. 5. В области G1 в системе устанавливаются устойчивые периодические

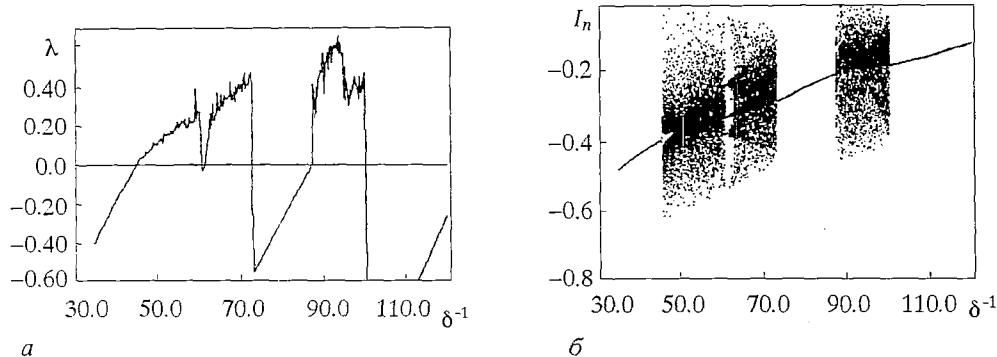


Рис. 4. Одномерная бифуркационная диаграмма (а) и зависимость ляпуновского показателя (б), системы (12) от параметра  $\delta^{-1}$ , при  $\alpha = 6.0$ ,  $\beta = 0.22$ ,  $\delta_k = 0.1$

колебания. Переход в область G0 сопровождается жестким срывом генерации\*. Хаотические режимы реализуются в области, отмеченной штриховкой. Переход к хаосу осуществляется через перемежаемость. При пересечении кривых  $m_i$  выход из области хаотических колебаний обусловлен рождением устойчивого предельного цикла  $L_i$  с числом осцилляций тока  $i_k = i_k(t)$  за период  $i = 2, 3, 4$ . Увеличение параметра  $R$  до пересечения кривой  $l_i$  приводит к потере устойчивости или исчезновению предельного цикла  $L_i$ , при этом в генераторе возникают хаотические (при  $R_k < R_{ki}$ ) или периодические (при  $R_k > R_{ki}$ ) колебания, соответствующие предельному циклу  $L_{i+1}$ . Наглядное представление о характере автоколебательных процессов, происходящих в генераторе, дает рис. 6, на котором показаны спектры мощности, осциллограммы напряжения  $U_k = U_k(t)$  и проекции аттрактора на плоскость  $(i_k, U_{Lk})$ , наблюдаемые в эксперименте при пересечении пространства параметров вдоль прямой  $R_k = 1$  кОм (см. рис. 5).

5. Таким образом, проведенное экспериментальное исследование показало, что хаотический блокинг-генератор обладает хаотической динамикой в широкой

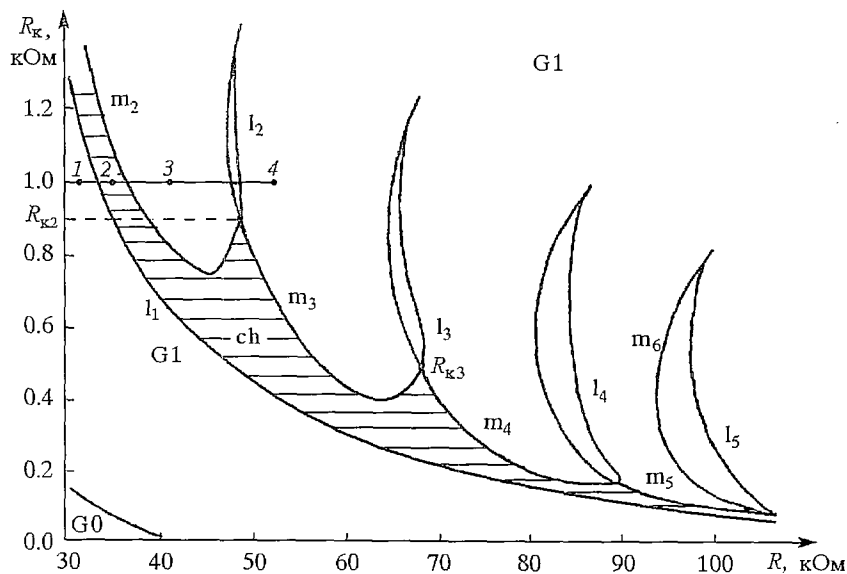
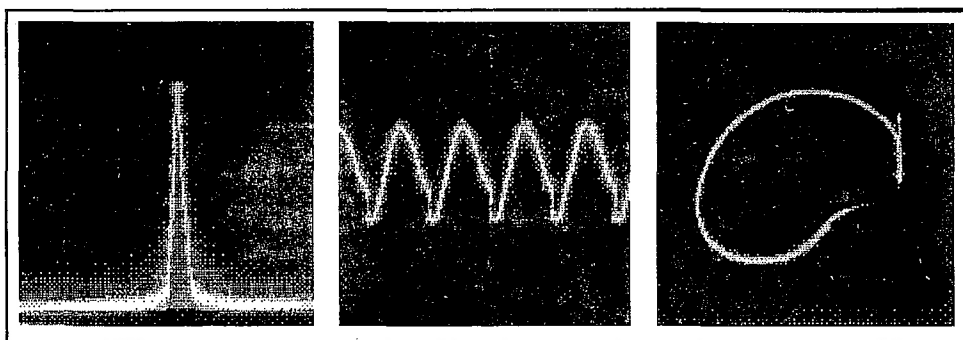
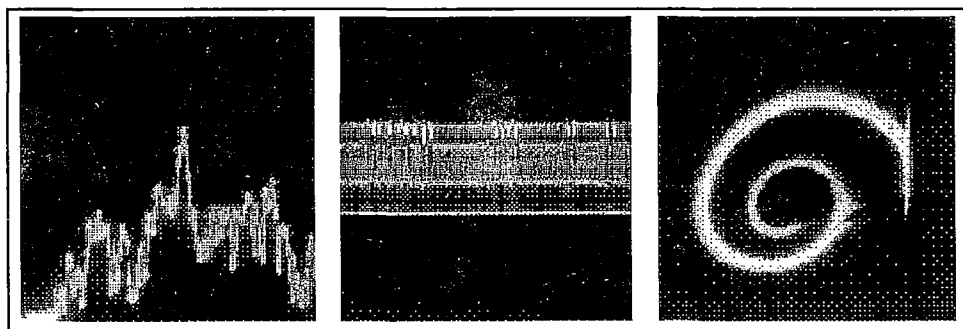


Рис. 5. Экспериментальная бифуркационная диаграмма генератора

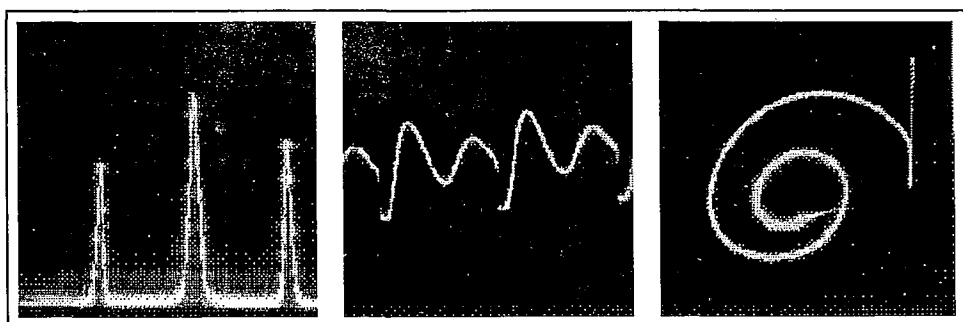
\* Поскольку область G0 не является рабочей для генератора (возможен выход схемы из строя), соответствующая граница показана условно.



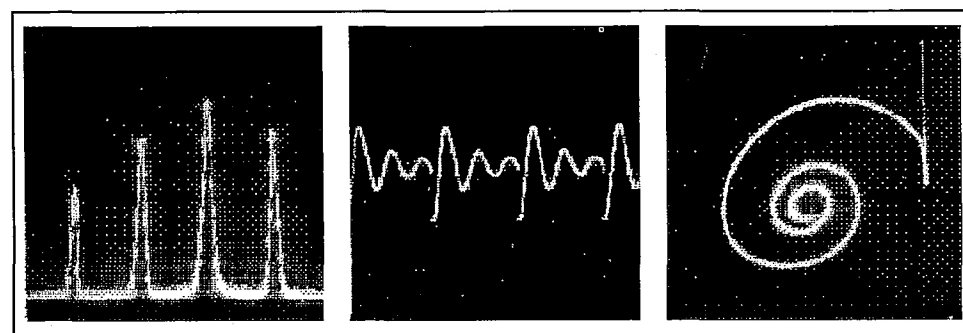
a



б



в



г

Рис. 6. Спектры мощности (слева), осциллограммы напряжения  $U_k(t)$  (в центре), проекции аттрактора (справа), соответствующие точкам 1–4 бифуркационной диаграммы на рис. 5

области пространства параметров. Переход к хаосу осуществляется через перемежаемость. Предложенная математическая модель в виде одномерного точечного отображения качественно объясняет все динамические эффекты, наблюдаемые в эксперименте. Структура бифуркационной диаграммы математической модели близка к экспериментальной. Более адекватное математическое описание генератора может быть получено за счет уточнения аппроксимаций нелинейных зависимостей. Полученные результаты могут быть использованы при проектировании блокинг-генераторов, а также при физическом моделировании различных динамических систем релаксационного типа с помощью электронных схем.

Автор выражает благодарность Рудькову Николаю Федоровичу за полезные замечания.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 93-02-15424)*

### Библиографический список

1. Linsay P.S., Cumming A.W. Three-frequency quasiperiodicity, phase locking, and the onset of chaos // *Physica D*. 1989. Vol. 40. P. 196.
2. Tang Y.S., Meels A.I., Chua L.O. Synchronization and chaos // *IEEE Trans. Circuit Syst.* 1983. CAS-30. P. 620.
3. Bernhardt P.A. The autonomous chaotic relaxation oscillator: an electrical analogue to the dripping faucet // *Physica D*. 1991. Vol. 52. P. 489.
4. Rul'kov N.F., Volkovskii A.R. Threshold synchronization of chaotic relaxation oscillations // *Phys. Lett. A*. 1993. Vol. 179. P. 332.
5. Шустер Г. Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988.

Нижегородский государственный  
университет

Поступила в редакцию 17.01.94  
после переработки 22.03.94

### CHAOTIC RELAXATION OSCILLATOR

A.R. Volkovskii

The autonomous chaotic relaxation oscillator which is well-known blocking oscillator with one additional capacitor is investigated. It was studied experimentally that oscillator possesses chaotic dynamics in wide parameter region. Transition to chaos is realised through intermittence. Bifurcation diagram was plotted experimentally on parameter plane. Mathematical model was obtained in the form of 1-D map for time intervals between two neighbour pulses. Numerical simulation of mathematical model shows that bifurcation structure of its parameter space is quite similar to experimental results.



Волковский Александр Ростиславович – родился в 1961 году в Горьком, окончил Горьковский государственный университет в 1983 году, с 1986 года работает на кафедре теории колебаний радиофизического факультета ННГУ. Область научных интересов – нелинейная динамика, радиофизика и электроника. Опубликовал ряд работ в отечественных и зарубежных научных журналах.