



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2025. Т. 33, № 2
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(2)

Научная статья
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003147
EDN: ANWDXK

Динамика рекуррентных нейронных сетей с кусочно-линейной функцией активации в задаче контекстно-зависимого принятия решения*

Р. А. Кононов^{1,2}✉, О. В. Масленников^{1,2}, В. И. Некоркин^{1,2}

¹Федеральный исследовательский центр

Институт прикладной физики им. А. В. Гапонова-Грехова РАН, Нижний Новгород, Россия

²Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского, Россия

E-mail: ✉r.kononov@ipfran.ru, olmaov@ipfran.ru, vnekorkin@appl.sci-nnov.ru

Поступила в редакцию 28.06.2024, принята к публикации 4.09.2024,
опубликована онлайн 6.12.2024, опубликована 31.03.2025

Аннотация. Цель данной работы — исследовать динамические механизмы решения рекуррентными нейронными сетями когнитивной задачи двухальтернативного выбора с контекстом, вырабатываемые в процессе обучения с подкреплением, и развить методологию анализа таких моделей на основе теории динамических систем. **Методы.** Построен ансамбль нейросетей с кусочно-линейной функцией активации. Модели оптимизировались с помощью метода обучения с подкреплением — проксимального обновления стратегии. Структура испытания с постоянными стимулами в течение длительного этапа позволяет трактовать входы в качестве параметров системы и рассматривать систему как автономную на конечных временных интервалах. **Результаты.** Выявлен и описан динамический механизм двухальтернативного выбора в терминах аттракторов автономных систем. Описаны возможные типы аттракторов в рассматриваемой модели и изучено распределение типов аттракторов в ансамбле моделей относительно параметров когнитивной задачи. В полученных сетях выявлено устойчивое по ансамблю моделей разделение на функциональные популяции. Исследован процесс эволюции состава данных популяций в процессе обучения. На основе полученного понимания динамического механизма была сконструирована двумерная сеть, решающая упрощенную задачу двухальтернативного выбора без контекста. **Заключение.** Предложенный подход позволяет качественно описать механизм решения задачи в терминах аттракторов. Подобное описание позволяет исследовать динамику функциональных моделей и выделять стоящие за динамическими объектами популяции. Данный подход позволяет отслеживать эволюцию аттракторов системы и соответствующих популяций в процессе обучения.

Ключевые слова: рекуррентная нейронная сеть, обучение с подкреплением, когнитивная задача, аттрактор, популяционная динамика.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда № 23-72-10088.

Для цитирования: Кононов Р. А., Масленников О. В., Некоркин В. И. Динамика рекуррентных нейронных сетей с кусочно-линейной функцией активации в задаче контекстно-зависимого принятия решения // Известия вузов. ПНД. 2025. Т. 33, № 2. С. 249–265. DOI: 10.18500/0869-6632-003147. EDN: ANWDXK

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

*Работа публикуется по материалам доклада, сделанного на конференции «Нейроинформатика — 2024».

Dynamics of recurrent neural networks with piecewise linear activation function in the context-dependent decision-making task*

R. A. Kononov^{1,2}✉, O. V. Maslennikov^{1,2}, V. I. Nekorkin^{1,2}

¹Federal Research Center A. V. Gaponov-Grekhov Institute of Applied Physics of the RAS,
Nizhny Novgorod, Russia

²National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Russia
E-mail: ✉r.kononov@ipfran.ru, olmaov@ipfran.ru, vnekorkin@appl.sci-nnov.ru

Received 28.06.2024, accepted 4.09.2024, available online 6.12.2024, published 31.03.2025

Abstract. *Purpose.* This paper aims to elucidate the dynamic mechanism underlying context-dependent two-alternative decision-making task solved by recurrent neural networks through reinforcement learning. Additionally, it seeks to develop a methodology for analyzing such models based on dynamical systems theory. *Methods.* An ensemble of neural networks with piecewise linear activation functions was constructed. These models were optimized using the proximal policy optimization method. The trial structure, featuring constant stimuli over extended periods, allowed us to treat inputs as system parameters and consider the system as autonomous during finite time intervals. *Results.* The dynamic mechanism of two-alternative decision-making was uncovered and described in terms of attractors of autonomous systems. The possible types of attractors in the model were characterized, and their distribution within the ensemble of models relative to the cognitive task parameters was studied. A stable division into functional populations was observed in the ensemble of models, and the evolution of these populations' composition was examined. *Conclusion.* The proposed approach enables a qualitative description of the problem-solving mechanism in terms of attractors, facilitating the study of functional model dynamics and identification of populations underlying dynamic objects. This methodology allows for tracking the evolution of system attractors and corresponding populations during the learning process. Furthermore, based on this understanding, a two-dimensional network was developed to solve a simplified context-free two-alternative decision problem.

Keywords: recurrent neural network, reinforcement learning, cognitive task, attractor, population dynamics.

Acknowledgements. This work was supported by the Russian Science Foundation, grant № 23-72-10088.

For citation: Kononov RA, Maslennikov OV, Nekorkin VI. Dynamics of recurrent neural networks with piecewise linear activation function in the context-dependent decision-making task. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2025;33(2): 249–265. DOI: 10.18500/0869-6632-003147

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Математические модели нейронных сетей — объект исследования как минимум двух крупных направлений: вычислительной нейронауки и машинного обучения. В каждом из этих направлений нейросети рассматриваются со своей точки зрения и с определенным набором методов. Оба указанных способа изучения нейронных сетей уходят своими корнями в общую идею математически описать информационные функции нервной системы и использовать полученные знания в прикладных целях. Исторически в каждом направлении были выработаны свойственные именно ему методы и подходы, однако всегда наблюдался взаимный интерес и попытка заимствовать идеи из соседней области. Такая тенденция сближения особенно ярко наблюдается в последнее десятилетие, когда в области машинного обучения всё чаще делаются попытки включать в модели ранее игнорируемые свойства биологических нейронных сетей (например, спайковую динамику, локальные правила обучения и др.) с целью построения энергоэффективных систем нейроморфного искусственного интеллекта. С другой стороны, в вычислительной нейронауке также всё

*The paper presents materials of a talk given at the conference “Neuroinformatics – 2024”.

больше распространяются примеры успешного применения методов машинного обучения, причём не только для обработки высокоразмерных данных, но и для построения моделей нового класса — функциональных искусственных нейронных сетей [1–5]. В такие модельные сети закладываются определенные аспекты биологического прототипа (например, рекуррентная структура связей, спайковая динамика, принцип Дейла о соотношении возбуждающих/тормозных синапсов и др.), и далее они настраиваются методами машинного обучения на задачах, основанных на экспериментах сенсомоторного преобразования лабораторными животными [1, 3, 6–12]. В экспериментах изучается, как сенсорные и поведенческие переменные отражаются в активности нейронов различных отделов мозга. Одним из ключевых достижений такого анализа стал тот обнаруженный факт, что электрохимическая активность нейронных популяций при выполнении испытуемыми животными целевых задач происходит в соответствующем многомерном фазовом пространстве в окрестности низкоразмерных многообразий [13–15]. Свойства данных многообразий определяются как структурными и динамическими характеристиками нейронных сетей, так и параметрами входных стимулов решаемых задач. Для исследования базовых принципов в основе этого явления как раз и разрабатываются функциональные нейронные сети. В случае рекуррентных связей полученные после обучения сети являются многомерными динамическими системами, которые можно анализировать методами нелинейной динамики, с помощью которых можно сопоставить траектории фазового пространства с параметрами решаемой задачи [16–20].

Рекуррентные искусственные нейронные сети с кусочно-линейной функцией активации — один из наиболее распространённых классов моделей в рамках описанного подхода. Они вычислительно просты и имеют ясную нейробиологическую интерпретацию. Кроме того, модели данного класса часто применяются в прикладных задачах машинного обучения, что значительно расширяет арсенал методов оптимизации. Несмотря на кажущуюся простоту и распространённость, зачастую такие модели остаются своего рода «чёрным ящиком», и лишь в редких случаях исследователи анализируют механизмы их внутренней динамики [21].

Среди широкого набора методов машинного обучения можно выделить три наиболее распространённых: обучение *с учителем*, *без учителя* и *с подкреплением*. Обучение с учителем — наиболее известный класс алгоритмов, и хотя есть множество работ на его основе, которые пролили свет на некоторые детали динамики нейронных сетей [4, 7, 16, 18, 22], данный метод биологически нерелевантен, и интерес представляет лишь непосредственно сама обученная сеть. Обучение с подкреплением, в свою очередь, опирается при обучении на те же данные, что и биологический агент — на сигнал награды, поэтому интерес для исследования представляет также сам процесс обучения модели.

В данной работе обучен с подкреплением ансамбль рекуррентных нейронных сетей с кусочно-линейной функцией активации. Выделены популяции нейронов, которые реализуют динамические механизмы, отвечающие за решение модельной когнитивной задачи — контекстно-зависимого двухальтернативного выбора, а также изучена эволюция популяций в процессе обучения.

1. Когнитивная задача двухальтернативного выбора с контекстом

В качестве целевой в данной работе выбрана задача контекстно-зависимого двухальтернативного выбора [7], которая в экспериментах когнитивной нейронауки применяется для изучения свойств кодирования перцептивных стимулов, рабочей памяти и принятия решения. В прототипном биологическом эксперименте испытуемому животному (как правило, обезьяне) демонстрируют экран с двигающимися точками, имеющими два признака: цвет (один из двух) и выделенное направление движения (одно из двух). В начале каждого испытания испытуемому подается специальный сигнал контекста, который информирует о том, какой признак

в сенсорном сигнале нужно выделить. В конце испытания животное сообщает движением глаз о преобладающем цвете или о преобладающем направлении движения в зависимости от контекста.

В нашей работе в качестве агента выступает нейронная сеть, для которой сенсорные сигналы, поступающие от среды в каждый момент времени, моделировались вектором

$$\mathbf{s}_t = (F, A_1, A_2, B_1, B_2, C_A, C_B), \quad \mathbf{s}_t \in \mathbb{R}^7. \quad (1)$$

Здесь $F \in \{0, 1\}$ — сигнал фиксации, сообщающий о начале и конце испытания, $A_{1,2} \in [0, 1]$ — информационные сигналы, моделирующие долю точек одного цвета и долю точек другого, $B_{1,2} \in [0, 1]$ — аналогичная пара для признака движения, $C_{A,B} \in \{0, 1\} : C_A \neq C_B$ — бинарные сигналы контекста, t — дискретное время.

При обучении и тестировании моделей на входные сигналы накладывался шум $\mathcal{N}(0.1)$.

Параметрами испытания выступали когерентности пар стимулов и контекст:

$$\text{coh}_a = A_1 - A_2, \quad \text{coh}_b = B_1 - B_2, \quad C_A, \quad C_B.$$

Агент должен сравнивать A_1 и A_2 в случае $C_A = 1$ и B_1 и B_2 в случае $C_B = 1$.

Помимо сенсорных сигналов, в каждый момент времени также генерируется скалярный сигнал награды r_t .

В одном испытании можно выделить 4 этапа, в течение каждого из которых компоненты вектора \mathbf{s}_t — постоянный сигнал с наложенным на него нормальным шумом.

1. *Этап фиксации.* Этап, разделяющий испытания. Сигналов стимула нет, присутствуют только сигналы фиксации и контекста (пример $\mathbf{s}_t = (1, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$).
2. *Этап стимулов.* Этап подачи стимулов. В дополнение к сигналам фиксации и контекста подаются также сигналы стимулов (пример $\mathbf{s}_t = (1, 0.3, 0.7, 0.2, 0.8, 1, 0)$).
3. *Этап задержки.* Агент должен запомнить правильный ответ и держать его в памяти некоторое время. Сенсорные сигналы на этом этапе совпадают с сигналами этапа фиксации.
4. *Этап принятия решения.* На данном этапе от агента ожидается ответ. Все сенсорные сигналы, кроме сигнала контекста, равны нулю.

Решение сети — это один из 3 вариантов: $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3) = (\text{Фиксация}, \text{Первый стимул сильнее второго}, \text{Второй сильнее первого})$

В течение этапа фиксации от агента требуется выбирать \mathcal{A}_1 в каждый момент времени, и в случае неверного ответа выдаётся небольшая отрицательная награда ($r_t = -0.1$). Во время этапа принятия решения от агента ожидается ответ. Если на этапе стимулов когерентность пары стимулов, на которую указывает контекст испытания, была отрицательной, — ответ \mathcal{A}_2 , иначе — \mathcal{A}_3 . За правильный ответ агент получает награду ($r_t = 1$). В остальные моменты времени награда $r_t = 0$.

В качестве агента выступала рекуррентная нейронная сеть из N нейронов, внутренняя динамика и выходы которой описываются системой

$$\begin{cases} \mathbf{h}_{t+1} = \text{ReLU}(\mathbf{U}\mathbf{s}_t + \mathbf{W}\mathbf{h}_t), \\ \mathbf{out}_t = \mathbf{O}\mathbf{h}_t, \end{cases}$$

$$\text{ReLU}(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

где $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ — рекуррентные веса сети, $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{N \times 7}$ — входные веса сети, $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^N$ — скрытое состояние сети или активность нейронов, $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^7$ — вход сети, $\mathbf{out} \in \mathbb{R}^3$ — отклик сети, а $\mathbf{O} \in \mathbb{R}^{3 \times N}$ — выходные веса сети.

Для получения дискретного ответа отклик интерпретировался как ненормированная логарифмическая вероятность. Нормировка проводилась с помощью функции Softmax:

$$d_j^t = \frac{e^{\text{out}_j^t}}{\sum_{k=1}^3 e^{\text{out}_k^t}}.$$

На основе полученного распределения вероятностей \mathbf{d} выбирался случайный ответ сети из \mathcal{A} .

2. Динамика рекуррентных нейронных сетей с кусочно-линейной функцией активации

В нашей работе мы рассматриваем динамику полносвязной рекуррентной сети с функцией активации ReLU. Динамика такой системы из N нейронов описывается следующим отображением:

$$\mathbf{h}_{t+1} = \text{ReLU}(\mathbf{U}\mathbf{s}_t + \mathbf{W}\mathbf{h}_t). \quad (2)$$

Временная структура испытания такова, что на вход сети длительное время подаются постоянные стимулы. Это позволяет нам внутри одного этапа испытания рассматривать $\mathbf{s} = \mathbf{U}\mathbf{s}_t$ в (2) как параметр системы, то есть рассматривать автономную динамику системы:

$$\mathbf{h}_{t+1} = \text{ReLU}(\mathbf{s} + \mathbf{W}\mathbf{h}_t). \quad (3)$$

Мы можем разделить действие отображения (3) на шаг линейной системы и последующее применение ReLU к вектору состояния:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_t &= \mathbf{s} + \mathbf{W}\mathbf{h}_t, \\ \mathbf{h}_{t+1} &= \text{ReLU}(\mathbf{g}_t). \end{aligned}$$

В случае если все компоненты вектора $\mathbf{g}_t \geq 0$: $\mathbf{h}_{t+1} = \mathbf{g}_t$, то есть в строго положительной области фазового пространства, динамика системы (3) совпадает с динамикой линейной системы без функции активации:

$$\mathbf{h}_{t+1} = \mathbf{s} + \mathbf{W}\mathbf{h}_t. \quad (4)$$

В системе (4) существует одна неподвижная точка:

$$\mathbf{h}^* = (\mathbf{1} - \mathbf{W})^{-1}\mathbf{s}, \quad (5)$$

где $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ — единичная матрица.

Если все $h_{1,2,\dots,N}^* > 0$, то \mathbf{h}^* — неподвижная точка системы (3), причём единственная в строго положительной области фазового пространства (то есть все $h_{1,2,\dots,N}^* > 0$). Иные неподвижные точки могут существовать только на границах этой области ($\prod_{i=1}^N h_i = 0$).

Предположим, что в системе есть такая неподвижная точка. Так как она находится на границе положительной области, одна или несколько из компонент \mathbf{h}^* равны нулю. Пусть $h_i^* = 0$, тогда справедливо

$$\begin{bmatrix} h_1^* \\ h_2^* \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ h_{N-1}^* \\ h_N^* \end{bmatrix} = \text{ReLU} \left(\begin{bmatrix} W_{1,1} & W_{1,2} & \dots & W_{1,i} & \dots & W_{1,N} \\ W_{2,1} & W_{2,2} & \dots & W_{2,i} & \dots & W_{2,N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{i,1} & W_{i,2} & \dots & W_{i,i} & \dots & W_{i,N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{N-1,1} & W_{N-1,2} & \dots & W_{N-1,i} & \dots & W_{N-1,N} \\ W_{N,1} & W_{N,2} & \dots & W_{N,i} & \dots & W_{N,N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1^* \\ h_2^* \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ h_{N-1}^* \\ h_N^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \dots \\ s_i \\ \dots \\ s_{N-1} \\ s_N \end{bmatrix} \right).$$

Если вычеркнуть из \mathbf{h}^* нулевую компоненту — получим неподвижную точку редуцированной системы, которую мы можем получить, вычеркнув в \mathbf{W} i -е строку и столбец, а в \mathbf{s} — i -й элемент. Этой процедурой мы вычеркнем элементы, которые входили как слагаемые в уравнения других компонент с множителем $h_i^* = 0$, поэтому на остальные компоненты \mathbf{h}^* это не повлияет.

Так как все компоненты рассматриваемой траектории положительные, то опустим функцию ReLU и получим следующую систему:

$$\begin{bmatrix} h_1^* \\ \dots \\ h_{i-1}^* \\ h_{i+1}^* \\ \dots \\ h_N^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{1,1} & \dots & W_{1,i-1} & W_{1,i+1} & \dots & W_{1,N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{i-1,1} & \dots & W_{i-1,i-1} & W_{i-1,i+1} & \dots & W_{i-1,N} \\ W_{i+1,1} & \dots & W_{i+1,i-1} & W_{i+1,i+1} & \dots & W_{i+1,N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{N,N} & \dots & W_{N,i-1} & W_{N,i+1} & \dots & W_{N,N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1^* \\ \dots \\ h_{i-1}^* \\ h_{i+1}^* \\ \dots \\ h_N^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_1 \\ \dots \\ s_{i-1} \\ s_{i+1} \\ \dots \\ s_N \end{bmatrix}.$$

Если неподвижная точка \mathbf{h}^* имеет несколько нулевых координат, то нужно повторить описанную процедуру для каждой нулевой компоненты. Полученную в результате проведенной процедуры систему вида (4) с матрицей рекуррентных связей $\mathbf{W}_{\text{red.}}$ и вектором параметров $\mathbf{s}_{\text{red.}}$ будем называть редуцированной относительно \mathbf{h}^* .

Условимся сохранять индексирование при проведении этой процедуры, тогда каждой неподвижной точке системы (3) можно сопоставить редуцированную линейную систему, в которой координаты этой точки ищутся как

$$\mathbf{h}_{\text{red.}}^* = (\mathbf{1} - \mathbf{W}_{\text{red.}})^{-1} \mathbf{s}_{\text{red.}}. \quad (6)$$

Заполнив нулями пропущенные индексы в $\mathbf{h}_{\text{red.}}^*$, при условии, что для всех пропущенных индексов n изначальной системы выполнено

$$s_n + \sum_i h_i^{\text{red.}} W_{ni} \leq 0,$$

мы получим неподвижную точку изначальной системы (3). Заметим, что характер устойчивости неподвижной точки линейной системы (4) полностью описывается спектром собственных чисел матрицы весов \mathbf{W} . Условимся, что собственные числа λ отсортированы по убыванию их модуля, тогда если $|\lambda_0| < 1$ — точка устойчивая, если $|\lambda_0| > 1$, но $\exists n : |\lambda_n| < 1$ — точка седловая или же седло-фокус. Если все $|\lambda_{1,2,\dots,N}| > 1$, имеем неустойчивые фокус или узел.

Таким образом, можно каждой неподвижной точке системы (3) сопоставить единственную неподвижную точку $\mathbf{h}_{\text{red.}}^*$ в системе вида (4) меньшей размерности. Характер устойчивости точки в полной системе (3) совпадает с характером устойчивости неподвижной точки в соответствующей ей редуцированной системе, но в окрестности точки при переходе от (4) к (3) могут появиться новые особые траектории.

В случае $|\lambda_0| < 1$ устойчивые точки сохраняют свою устойчивость, а новые траектории не появляются.

В случае $|\lambda_0| > 1$, $\text{Im}(\lambda_0) = 0$, на границах положительной области фазового пространства могут появиться новые неподвижные точки.

В случае $|\lambda_0| > 1$, $\text{Im}(\lambda_0) \neq 0$ в окрестности неустойчивого фокуса могут появиться устойчивые квазипериодические траектории.

Для иллюстрации описанных эффектов на рис. 1 даны фазовые портреты систем вида (4) (красным) и систем вида (3) (синим). На рис. 1, *a* неустойчивые сепаратрисы седла пересекаются с границами положительной области и на последних возникают устойчивые неподвижные точки. На рис. 1, *b, f* продемонстрировано появление устойчивой квазипериодической траектории вокруг неустойчивого фокуса. Причем на рис. 1, *f* в системе существует устойчивая квазипериодическая траектория, но нет глобальной устойчивости. Рис. 1, *c, d* иллюстрируют сохранение устойчивости.

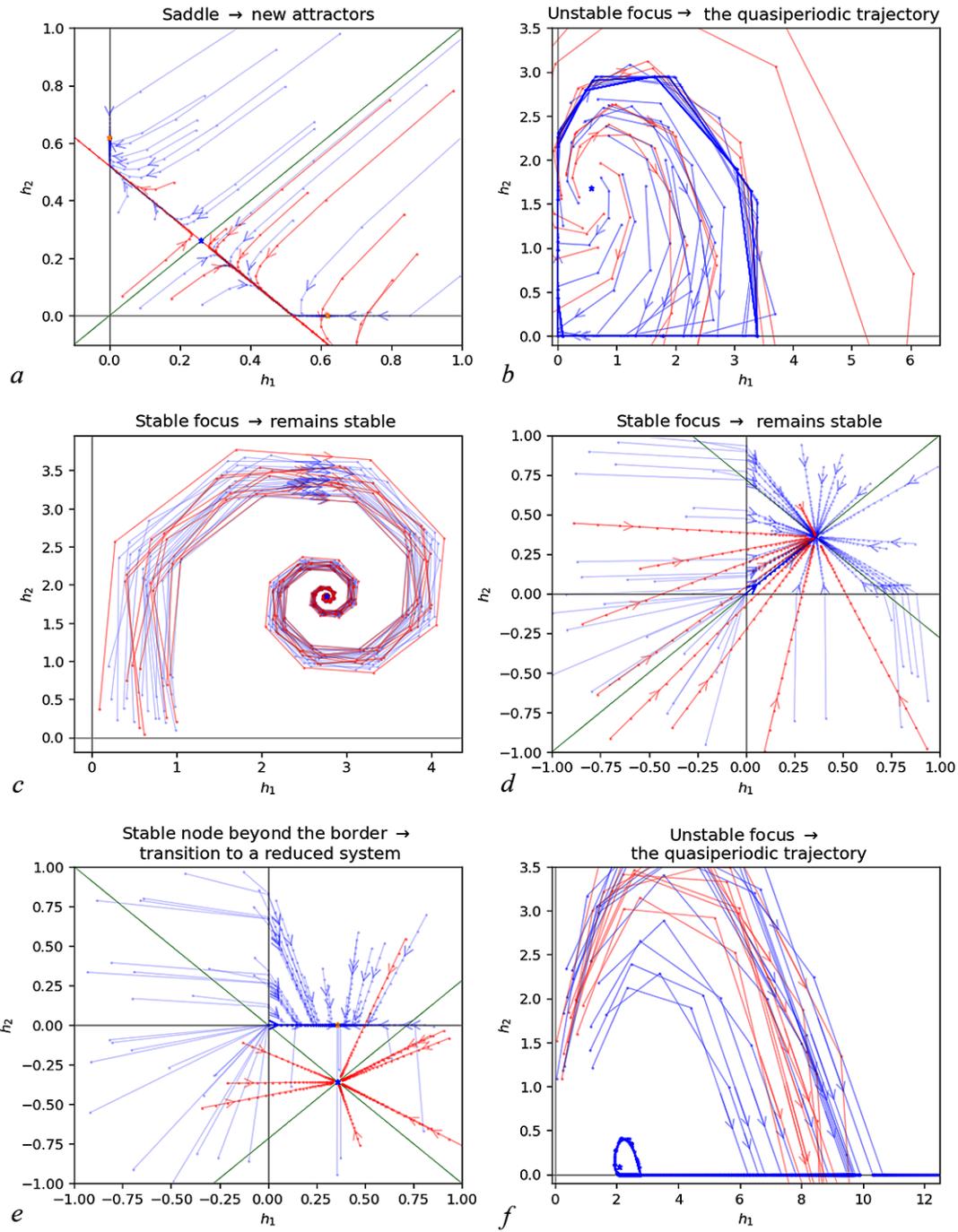


Рис. 1. Изменения фазовых траекторий при переходе от линейной системы к системе с ReLU на примере двумерной системы. Красные траектории — это траектории линейного отображения, а синие — отображения с ReLU. Все траектории выпущены из случайных точек в окрестности неподвижной точки (цвет онлайн)

Fig. 1. Phase trajectory changes during the transition from a linear system to a system employing the ReLU activation function, illustrated using a two-dimensional system. Red lines represent trajectories under linear mapping, while blue lines depict trajectories under ReLU mapping. All trajectories originate from random initial points in the vicinity of a fixed point (color online)

Рис. 1, e показывает, как устойчивая точка линейной системы за границей положительной области притягивает к этой границе траектории, и на ней появляется устойчивая неподвижная точка.

Заметим, что количество редуцированных систем конечно. Перебрав все возможные редуцированные системы и найдя в них неподвижные точки, можно найти все неподвижные точки системы (3). Число редуцированных систем N -мерной системы (3), полученное пересчётом всех комбинаций редуцируемых компонент, равно

$$2^N - 1.$$

Поэтому алгоритм полного обхода может быть применён только для систем с небольшим N или для отдельных систем с привлечением высокопроизводительных параллельных вычислений.

Более эффективно использовать сформулированные критерии для оценки редуцированных систем вдоль траектории исследуемой системы из численного эксперимента. Именно этот подход и продемонстрирован в следующем разделе.

3. Анализ ансамбля функциональных моделей

Мы обучили ансамбль из 89 моделей вида (2) с $N = 250$ решению задачи, описанной в разделе 1. Веса моделей были инициализированы случайным равномерным распределением, как параметры для оптимизации выступали матрицы \mathbf{W} , \mathbf{U} и \mathbf{O} .

Для обучения мы использовали алгоритм обучения с подкреплением — проксимальное обновление стратегии [23]. Данный алгоритм использует для оптимизации весов сигнал награды и не требует отдельного сигнала ошибки. Для градиентного спуска применялся алгоритм Adam [24]. Мы использовали реализацию алгоритма в пакете StableBaselines3, гиперпараметры указаны в Таблице. Количество шагов среды, по которым происходило обновление весов, 32000.

В процессе обучения и тестирования сети на входные сигналы задачи накладывался шум. Для исследования динамики рассматривалась активность сети в ответ на незашумлённые сигналы среды.

Критерием остановки выступало достижение сетью точности ответов 0.95. Под точностью подразумевается средняя вероятность выбора правильного ответа в наборе зашумлённых испытаний.

Мы исследовали аттракторы обученной системы, существующие внутри каждого из этапов испытания, и их взаиморасположение, лежащее в основе решения когнитивной задачи.

Для иллюстрации динамического механизма на рис. 2 дана первая главная компонента активности сети в течение серии испытаний. Для формирования рисунка сеть стартовала с одного и того же состояния, поэтому на первом этапе траектории совпадают. На этапе подачи стимулов активность сети сходится в окрестность неподвижной точки, положение которой определяется когерентностью испытания. На этапе задержки существует мультистабильность — на данном

Таблица. Гиперпараметры алгоритма обучения, с которыми обучался ансамбль

Table. Hyperparameters of the learning algorithm that the ensemble was trained with

PPO		Adam	
γ	0.99	β_1	0.9
λ_{gae}	0.95	β_2	0.999
ϵ	0.2	learning rate	0.0003
ent coef	0	max grad norm	0.5
vf coef	0.5		

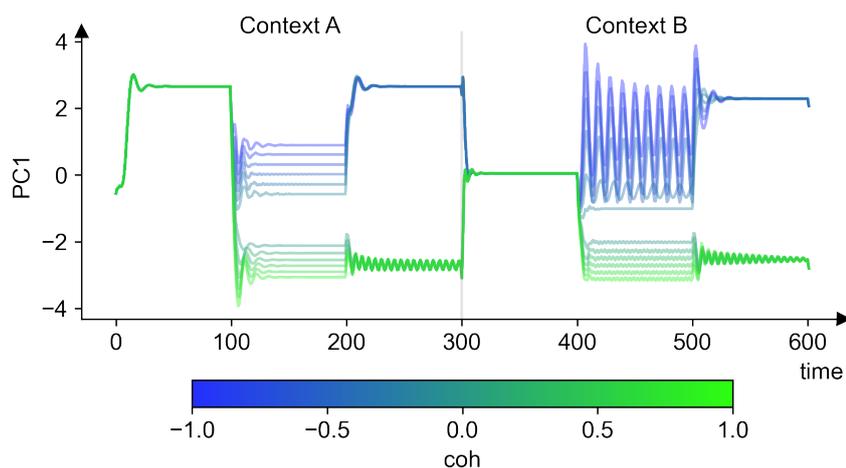


Рис. 2. Главная компонента активности сети в течение двух испытаний с разным контекстом. Сигналы задачи подавались без шума. Цветом обозначена когерентность основной пары стимулов в этих испытаниях. Этап испытания удлинён в 4 раза по сравнению с обучением (цвет онлайн)

Fig. 2. The principal component of network activity during two trials with different contexts. Task signals were transmitted without noise. Color represents the coherence of the primary stimulus pair in these trials. The trial is extended fourfold compared to the training phase (color online)

этапе в системе существует три аттрактора: по одному на каждый ответ системы. В зависимости от того, в бассейн какого из них изображающая точка пришла на прошлом этапе, активность притягивается к одному из этих аттракторов. Заметим, что в сети, приведённой для примера, аттрактор, соответствующий положительной когерентности, является квазипериодическим. Нулевая фиксация «сбрасывает» состояние сети, и в ней появляется третий аттрактор, соответствующий ответу фиксации.

Второе испытание — это испытание с теми же когерентностями, но другим контекстом. Можно видеть, что аттракторы, кодирующие одну и ту же когерентность в разных контекстах, могут быть разного типа.

При рассмотрении главных компонент или активности отдельных нейронов при выходе на аттрактор всегда встаёт вопрос того, завершился ли переходный процесс. Для исследования типов обнаруженных аттракторов мы применили описанный в первом разделе подход. На рис. 3 приведён пример активности, где одна и та же рекуррентная сеть выходит на аттракторы разного типа.

Для поиска аттракторов системы мы получали длинные траектории $(\mathbf{0}, \mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_T)$ на каждом этапе, указанном на рис. 3, *a*. Чтобы убедиться в том, что система вышла в окрестность аттрактора, мы рассматривали редуцированную систему относительно активности \mathbf{h}_t . Активность сети нейронов на соответствующих этапах испытаний приведена на рис. 3, *b*. Знак координат неподвижной точки $\text{sign}(\mathbf{h}_{\text{red.}}^*)$ для редуцированной системы относительно \mathbf{h}_t приведен на рис. 3, *c*. Если все координаты неподвижной точки редуцированной системы положительные и эта точка устойчива, то система вышла на аттрактор — неподвижную точку. Устойчивость точки определяется набором собственных чисел редуцированной системы, описывающей динамику активных нейронов. Собственные числа такой системы для последнего момента каждого из 6 этапов приведены на рис. 3, *d*. Часть траектории квазипериодического аттрактора лежит на границах положительной области, а неподвижная точка в этом случае имеет комплексно-сопряжённые собственные числа с модулем больше единицы.

Мы обнаружили, что вероятность найти квазипериодический аттрактор на плоскости когерентности распределена неравномерно. Для малых по модулю значений когерентности вероятность найти квазипериодический аттрактор значительно выше. Распределение вероятности

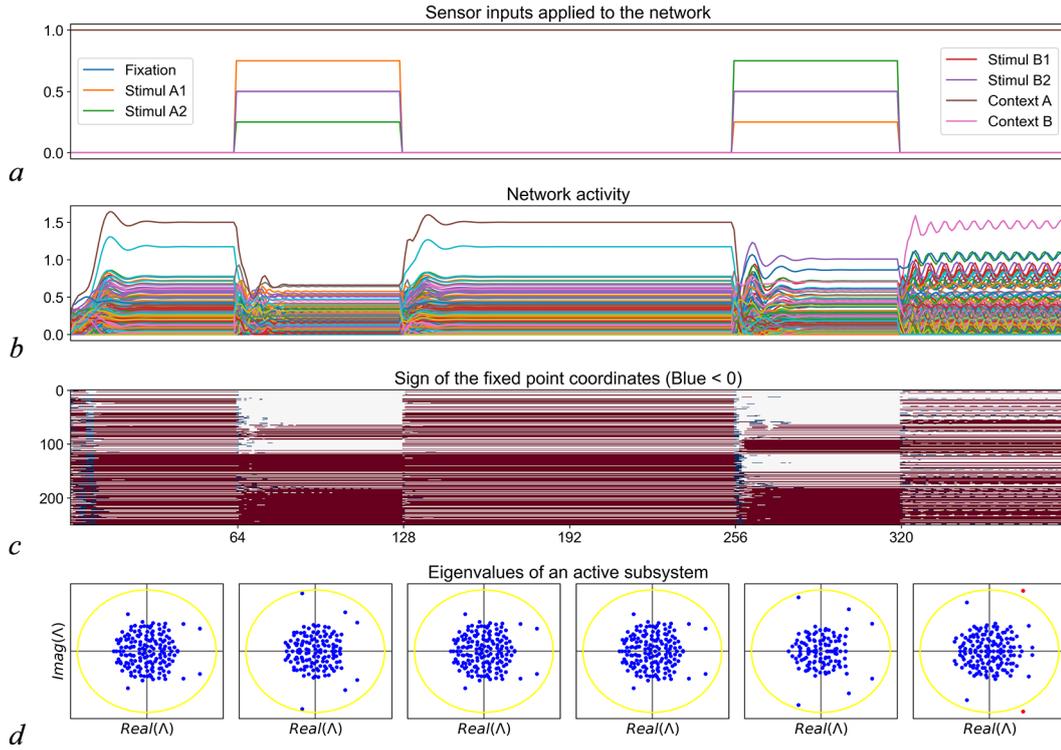


Рис. 3. *a* – Пример двух последовательных испытаний без периода принятия решения. *b* – Активность сети \mathbf{h}_t в течение данной пары испытаний. *c* – Знак активности $\text{sign}(\mathbf{h}_t)$ во время испытаний. Белым цветом обозначен ноль, красным и синим – положительная и отрицательная активность соответственно. *d* – Собственные числа редуцированной системы для \mathbf{h}_t , где $t \in (64, 128, 192, 256, 320)$ (цвет онлайн)

Fig. 3. *a* – Example of two consecutive trials without a decision period. *b* – Network activity \mathbf{h}_t during these two trials. *c* – Sign of \mathbf{h}_t during this pair of trials. White indicates zero, while red and blue represent positive and negative values, respectively. *d* – Eigenvalues of the reduced system calculated for \mathbf{h}_t at time points $t \in (64, 128, 192, 256, 320)$ (color online)

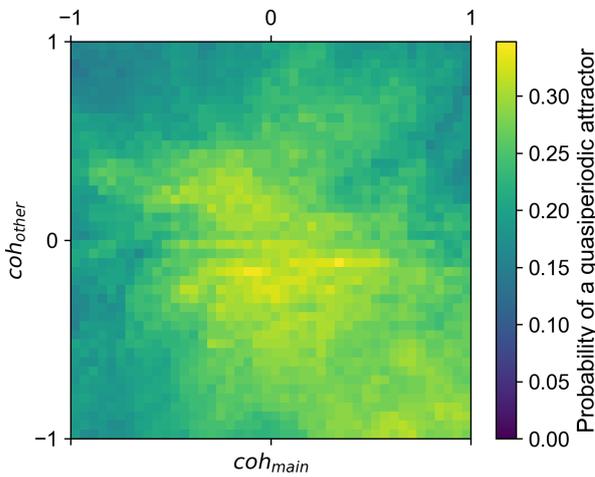


Рис. 4. Вероятность того, что пару когерентностей на этапе стимулов будет кодировать квазипериодический аттрактор, посчитанная для обученного ансамбля (цвет онлайн)

Fig. 4. The probability of encoding a pair of coherences during the stimulus period by a quasi-periodic attractor (color online)

того, что пару когерентностей будет кодировать квазипериодический аттрактор, дано на рис. 4. Данное распределение построено по обученному нами ансамблю из 89 сетей. Для получения вероятности на систему подавался длительный постоянный вход, соответствующий входам с определённой парой когерентностей, по вышеописанному критерию определялся тип аттрактора системы при таком значении входа. Для каждой сети таким образом была получена пара бинарных матриц $\mathbf{V}_A, \mathbf{V}_B \in \mathbb{B}^{\text{coh}_A \times \text{coh}_B}$. Чтобы получить усреднённую матрицу \mathbf{V} , перейдём от конкретных когерентностей к основной и побочной, транспонируя второе слагаемое: $\mathbf{V} = \frac{1}{2}(\mathbf{V}_A + \mathbf{V}_B^T)$. На рис. 4 представлена матрица, усреднённая по всем M моделям:

$$\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \mathbf{V}_i.$$

Мы разделили нейроны сети на 4 популяции на основании следующего критерия: участвует ли каждый из них в стационарной динамике во время удлинённого этапа стимулов для определённого знака когерентности.

1. Не участвует в стационарной динамике.
2. Участвует в стационарной динамике в испытаниях с $coh < 0$.
3. Участвует в стационарной динамике в испытаниях с $coh > 0$.
4. Участвует в стационарной динамике в испытаниях с любой coh .

Разделение нейронов происходило на основе активности в течение серии испытаний с удлинёнными этапами, рассматривалась только активность во второй половине этапа. Эволюция состава этих популяций дана на рис. 5. График по оси абсцисс нормирован по точности сети в процессе обучения, при этом точки снимались через равное количество шагов отображения; ниже даны модули собственных чисел в каждой точке. Плотный кластер точек на уровне 0.5 демонстрирует, что на этом уровне находится плато по точности. Можно видеть, что популяции 2 и 3 появляются на этом плато и растут вместе с точностью. Между этими популяциями в обученной сети существует определённая структура связности, четко различимая на графике матрицы рекуррентных весов.

В процессе обучения равномерно распределённая матрица становится ближе к нормальному распределению. В спектре матрицы смежности появляются собственные числа больше единицы по модулю.

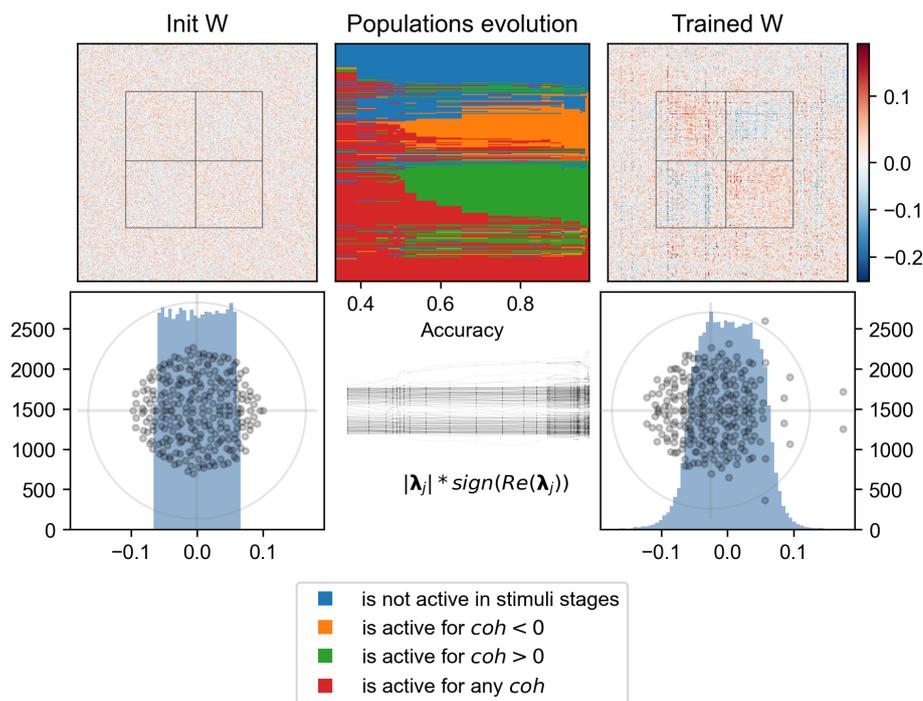


Рис. 5. Эволюция популяций нейронов, селективных в стационарной активности относительно параметров испытания. Нейроны в матрицах смежности отсортированы так же, как на картинке с эволюцией. В нижней строке показано распределение всех рекуррентных весов и собственные числа на комплексной плоскости для инициализации и обученной сети. Между распределениями показана эволюция модулей собственных чисел (цвет онлайн)

Fig. 5. Evolution of neuronal populations exhibiting selectivity for stationary activity in relation to trial parameters. The lower panel shows the distribution of all recurrent weights and eigenvalues in the complex plane at both initialization and after training. The changes in the magnitudes of eigenvalues across these distributions are depicted (color online)

4. Построение двумерной сети, решающей когнитивную задачу двухальтернативного выбора

В данном разделе на основе полученных результатов построим двумерную сеть вида (2), способную решать упрощённую задачу двухальтернативного выбора без контекста. Эта задача фактически представляет собой вышеописанную задачу, в которой отсутствуют сигналы контекста и вторая пара стимулов: $\mathbf{s}_t^{\text{simpl}} = (F, A_1, A_2)$. Модель описывается системой двух уравнений вида

$$\mathbf{h}_{t+1} = \text{ReLU}(\mathbf{U}\mathbf{s}_t^{\text{simpl}} + \mathbf{W}\mathbf{h}_t).$$

Подобная низкоразмерная система наглядно демонстрирует динамический механизм решения рассматриваемой задачи. Для однозначного задания модели необходимо задать входные веса \mathbf{U} и рекуррентные веса \mathbf{W} .

Для того чтобы на фазовой плоскости возникла мультистабильность, выберем параметры таким образом, чтобы в положительной области фазовой плоскости была седловая точка \mathbf{p}^{sad} . Представим матрицу рекуррентных весов в виде

$$\mathbf{W}_{\text{rec}} = \begin{bmatrix} | & | \\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \\ | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | \\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \\ | & | \end{bmatrix}^T,$$

где $v_{1,2}$ — собственные векторы, $\lambda_{1,2}$ — собственные числа. Вектор параметров $\mathbf{s} = \mathbf{U}\mathbf{s}_t^{\text{simpl}}$ определяет координаты неподвижной точки в линейной системе (4). Запишем произведение матрицы входных весов и входного сигнала как сумму трёх векторов:

$$\mathbf{U}\mathbf{s}_t^{\text{simpl}} = \mathbf{f}F + \mathbf{c}A_1 + \mathbf{d}A_2.$$

Тогда в матрицу входных весов эти векторы войдут в виде столбцов

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \mathbf{f} & \mathbf{c} & \mathbf{d} \\ | & | & | \end{bmatrix}.$$

Заметим, что если в линейной системе вида (4) есть седловая точка и мы хотим получить систему с функцией ReLU, в которой есть устойчивая неподвижная точка, необходимо чтобы одна из координат седловой точки была отрицательной. В примере, указанном на рис. 6, отрицательной координатой является h_2 . Траектория, выпущенная из окрестности неподвижной точки (например, p^{+1}), будет двигаться вдоль неустойчивого собственного вектора вправо, пересекая границу положительной области фазового пространства $h_1 = 0$, «прижмётся» к ней и асимптотически будет стремиться к устойчивой неподвижной точке на этой границе. Выберем параметры таким образом, чтобы неподвижные точки линейной системы в период стимулов для всех когерентностей имели одну и ту же координату h_1 .

Обозначим координаты неподвижной точки линейной системы для конкретной когерентности coh как \mathbf{p}^{coh} . Согласно (6) выразим векторы параметров на каждом из этапов испытания через координаты неподвижной точки линейной системы:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}^{\text{fix.}} &= \mathbf{f} = (\mathbf{1} - \mathbf{W})\mathbf{p}^{\text{sad.}}, \\ \mathbf{s}^{\text{coh}=-1} &= \mathbf{f} + \mathbf{c} = (\mathbf{1} - \mathbf{W})\mathbf{p}^{-1}, \\ \mathbf{s}^{\text{coh}=0} &= \mathbf{f} + \frac{1}{2}(\mathbf{c} + \mathbf{d}) = (\mathbf{1} - \mathbf{W})\mathbf{p}^0, \\ \mathbf{s}^{\text{coh}=+1} &= \mathbf{f} + \mathbf{d} = (\mathbf{1} - \mathbf{W})\mathbf{p}^{+1}. \end{aligned}$$

Перейдем к уравнениям для векторов-столбцов матрицы входных весов:

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= (\mathbf{1} - \mathbf{W})\mathbf{p}^{\text{sad.}}, \\ \mathbf{x} &= (\mathbf{1} - \mathbf{W})\mathbf{p}^- - \mathbf{f}, \\ \mathbf{d} &= (\mathbf{1} - \mathbf{W})\mathbf{p}^+ - \mathbf{f}. \end{aligned}$$

Выберем направление собственных векторов матрицы \mathbf{W} таким образом, чтобы устойчивая сепаратриса $\mathbf{p}^{\text{sad.}}$ пересекала ось h_1 в устойчивой неподвижной точке $\mathbf{h}_{\text{coh}=0}^*$:

$$\mathbf{h}_{\text{coh}=0}^* = \left(\frac{s_1^{\text{coh}=0}}{W_{11} - 1}, 0 \right).$$

Таким образом, после перехода от этапа стимулов к этапу задержки изображающая точка притянется к одной из двух точек решения в зависимости от того, с какой стороны сепаратрисы она находится. Пример сети, созданной по описанному алгоритму:

$$\mathbf{h}_{t+1} = \text{ReLU} \left(\begin{bmatrix} 0.7753 & -0.4109 \\ -0.4475 & 0.5196 \end{bmatrix} \mathbf{h}_t + \begin{bmatrix} 0.8602 & -0.8794 & -0.4684 \\ 1.3753 & -1.5826 & -1.1023 \end{bmatrix} \mathbf{s}_t \right). \quad (7)$$

Траектории данной системы в процессе решения пары испытаний с противоположными знаками когерентности приведены на рис. 6. Матрица весов полученной модели качественно повторяет модульную структуру описанных в разделе 3 популяций.

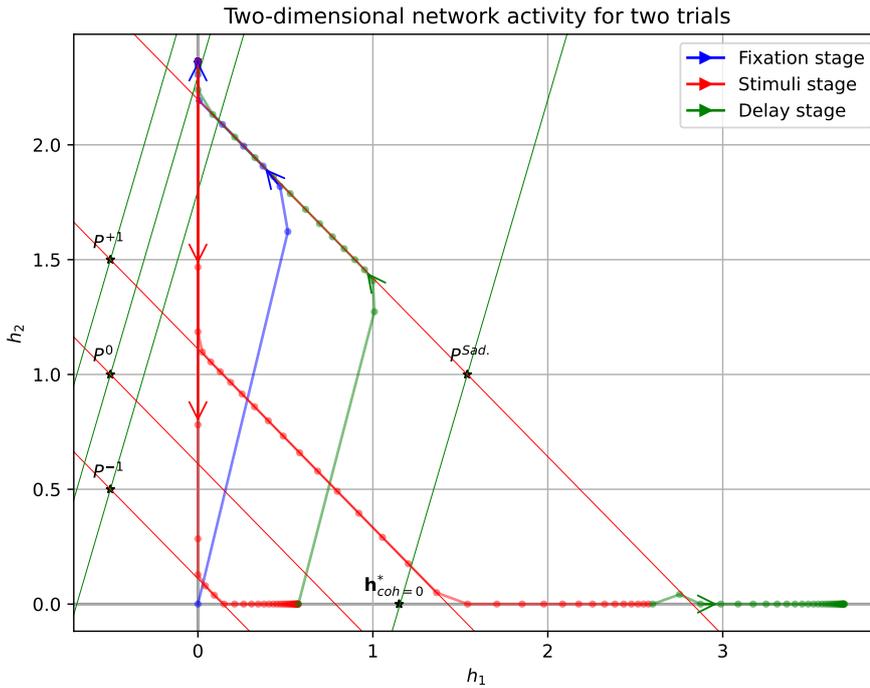


Рис. 6. Фазовые траектории системы (7) в течение двух испытаний упрощённой задачи без контекста с когерентностями -1 и $+1$. В начале испытания система выходит на один из аттракторов решения, в качестве которых в двумерной системе выступают неподвижные точки. При подаче стимулов когерентность кодируется в h_1 единственного аттрактора системы таким образом, что сепаратриса седла, существующего в период задержки, разделяет эти неподвижные точки по нулевой когерентности (цвет онлайн)

Fig. 6. Phase trajectories of system (7) during two trials of a simplified task without context, with coherences of -1 and $+1$. Initially, the system converges to one of the decision attractors, which are fixed points in the two-dimensional system. Upon application of stimuli, coherence is encoded in h_1 of the system's unique attractor such that the separatrix of the saddle present during the delay period separates these fixed points at zero coherence (color online)

Заключение

1. *Ансамбль сетей обучен методами обучения с подкреплением одной из классических в нейронауке когнитивных задач — контекстно-зависимому двухальтернативному принятию решения.* Класс алгоритмов обучения с подкреплением опирается при обучении на те же данные, что и биологический агент в эксперименте — на сигнал награды. С одной стороны, в работе мы опираемся на ранее полученные нами и другими авторами результаты — это схожие целевые задачи и рекуррентная нейронная сеть. С другой стороны, мы формулируем новизну: биологически более релевантный метод обучения, новые методы анализа динамических механизмов на популяционном уровне в процессе обучения, а не только на финальной стадии.
2. *Рассмотрена автономная динамика рекуррентных нейронных сетей с кусочно-линейной функцией активации.* Описаны два типа аттракторов: квазипериодические траектории и неподвижные точки. Сформулирован алгоритм полного перебора редуцированных систем, позволяющий теоретически найти в системе все неподвижные точки. Установлено соответствие между неподвижными точками линейной системы типа «неустойчивый фокус» и устойчивыми квазипериодическими траекториями в нелинейной системе. Использованная для перехода к автономной системе структура испытания свойственна многим когнитивным задачам, что позволяет применить описанный подход к широкому классу других когнитивных задач.
3. *Изучена динамика обученного ансамбля, выявлена взаимосвязь между типом аттрактора и параметрами когнитивной задачи.* Механизм решения когнитивной задачи описан на языке теории динамических систем. Выявлены популяции, активность которых соответствует выходу системы в окрестности соответствующих аттракторов. Эволюция данных популяций коррелирует со способностью сети решать поставленную когнитивную задачу. Исследовано распределение аттракторов разных типов и выявлена корреляция с параметрами когнитивной задачи.
4. *Построена двумерная сеть, решающая упрощённую задачу.* На основе выявленного динамического механизма и свойств автономной динамики системы сконструирована двумерная сеть, решающая упрощённую задачу двухальтернативного выбора без контекста. Данная модель демонстрирует обнаруженный динамический механизм распознавания наибольшего стимула и последующего удержания решения в рабочей памяти. Структура связей низкоразмерной модели качественно повторяет структуру связей между популяциями в обученных многомерных моделях.

Список литературы

1. *Sussillo D.* Neural circuits as computational dynamical systems // *Curr. Opin. Neurobiol.* 2014. Vol. 25. P. 156-163. DOI: 10.1016/j.conb.2014.01.008.
2. *Marblestone A. H., Wayne G., Kording K. P.* Toward an integration of deep learning and neuroscience // *Frontiers in Computational Neuroscience.* 2016. Vol. 10. P. 94. DOI: 10.3389/fncom.2016.00094.
3. *Barak O.* Recurrent neural networks as versatile tools of neuroscience research // *Curr. Opin. Neurobiol.* 2017. Vol. 46. P. 1–6. DOI: 10.1016/j.conb.2017.06.003.
4. *Richards B. A., Lillicrap T. P., Beaudoin P., Bengio Y., Bogacz R., Christensen A., Clopath C., Costa R. P., de Berker A., Ganguli S., Gillon C. J., Hafner D., Kepecs A., Kriegeskorte N., Latham P., Lindsay G. W., Miller K. D., Naud R., Pack Ch. C., Poirazi P., Roelfsema P., Sacramento J., Saxe A., Scellier B., Schapiro A. C., Senn W., Wayne G., Yamins D., Zenke F., Zylberberg J., Therien D., Kording K. P.* A deep learning framework for neuroscience // *Nature Neuroscience.* 2019. Vol. 22, no. 11. P. 1761–1770. DOI: 10.1038/s41593-019-0520-2.
5. *Ehrlich D. B., Stone J. T., Brandfonbrener D., Atanasov A., Murray J. D.* PsychRNN: An Accessible

- and Flexible Python Package for Training Recurrent Neural Network Models on Cognitive Tasks // *Eneuro*. 2021. Vol. 8, no. 1. DOI: 10.1523/ENEURO.0427-20.2020.
6. *Durstewitz D., Koppe G., Thurm M. I.* Reconstructing computational system dynamics from neural data with recurrent neural networks // *Nature Reviews Neuroscience*. 2023. Vol. 24, no. 11. P. 693–710. DOI: 10.1038/s41583-023-00740-7.
 7. *Mante V., Sussillo D., Shenoy K. V., Newsome W. T.* Context-dependent computation by recurrent dynamics in prefrontal cortex // *Nature*. 2013. Vol. 503, no. 7474. P. 78–84. DOI: doi.org/10.1038/nature12742.
 8. *McNaughton B. L., Battaglia F. P., Jensen O., Moser E. I., Moser M.-B.* Path integration and the neural basis of the “cognitive map” // *Nature Reviews Neuroscience*. 2006. Vol. 7, no. 8. P. 663–678. DOI: 10.1038/nrn1932.
 9. *Yang G. Rt., Wang X.-J.* Artificial neural networks for neuroscientists: A primer // *Neuron*. 2020. Vol. 107, no. 6. P. 1048–1070. DOI: 10.1016/j.neuron.2020.09.005.
 10. *Bernáez T. L., Ekelmans P., Kraynyukova N., Rose T., Busse L., Tchumatchenko T.* How to incorporate biological insights into network models and why it matters // *The Journal of Physiology*. 2023. Vol. 601(15). P. 3037–3053. DOI: 10.1113/JP282755.
 11. *Vyas S., Golub M. D., Sussillo D., Shenoy K. V.* Computation through neural population dynamics // *Annual Review of Neuroscience*. 2020. Vol. 43. P. 249–275. DOI: 10.1146/annurev-neuro-092619-094115.
 12. *Sussillo D., Abbott L. F.* Generating coherent patterns of activity from chaotic neural networks // *Neuron*. 2009. Vol. 63, no. 4. P. 544–557. DOI: 10.1016/j.neuron.2009.07.018.
 13. *Kriegeskorte N., Xue-Xin W.* Neural tuning and representational geometry // *Nature Reviews Neuroscience*. 2021. Vol. 22, no. 11. C. 703–718. DOI: 10.1038/s41583-021-00502-3.
 14. *Khona M., Fiete I. R.* Attractor and integrator networks in the brain // *Nature Reviews Neuroscience*. 2022. Vol. 23, no. 12. P. 744–766. DOI: 10.1038/s41583-022-00642-0.
 15. *Langdon Ch., Genkin M., Engel T. A.* A unifying perspective on neural manifolds and circuits for cognition // *Nature Reviews Neuroscience*. 2023. Vol. 24, no. 6. P. 363–377. DOI: 10.1038/s41583-023-00693-x.
 16. *Масленников О. В., Пугавко М. М., Щапин Д. С., Некоркин В. И.* Нелинейная динамика и машинное обучение рекуррентных спайковых нейронных сетей // *Успехи физических наук*. 2022. Т. 65, № 12. DOI: 10.3367/UFNr.2021.08.039042.
 17. *Maslennikov O. V., Nekorkin V. I.* Stimulus-induced sequential activity in supervisory trained recurrent networks of firing rate neurons // *Nonlinear Dynamics*. 2020. Vol. 101, no. 2. P. 1093–1103. DOI: 10.1007/s11071-020-05787-0.
 18. *Pugavko M. M., Maslennikov O. V., Nekorkin V. I.* Dynamics of spiking map-based neural networks in problems of supervised learning // *Communications in Nonlinear Science, Numerical Simulation*. 2020. Vol. 90. P. 105399. DOI: 10.1016/j.cnsns.2020.105399.
 19. *Пугавко М. М., Масленников О. В., Некоркин В. И.* Динамика сети дискретных модельных нейронов при контролируемом обучении системы резервуарных вычислений // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2020. Т. 28, № 1. С. 77–89. DOI: 10.18500/0869-6632-2020-28-1-77-89.
 20. *Maslennikov O. V., Nekorkin V. I.* Collective dynamics of rate neurons for supervised learning in a reservoir computing system // *Chaos*. 2019. Vol. 29, no. 10. P. 103126. DOI: 10.1063/1.5119895.
 21. *Parga N., Serrano-Fernández L., Falcó-R. J.* Emergent computations in trained artificial neural networks and real brains // *Journal of Instrumentation*. 2023. Vol. 18, no. 02. P. C02060. DOI: 10.1088/1748-0221/18/02/C02060.
 22. *Pugavko M. M., Maslennikov O. V., Nekorkin V. I.* Multitask computation through dynamics in recurrent spiking neural networks // *Scientific Reports*. 2023. Vol. 13, no. 1. P. 3997. DOI: 10.1038/s41598-023-31110-z.
 23. *Schulman J., Wolski F., Dhariwal P., Radford A., Klimov O.* Proximal policy optimization algorithms. arXiv:1707.06347; 2017. DOI: 10.48550/arXiv.1707.06347.

24. *Diederik P.K., Jimmy B. Adam: A Method for Stochastic Optimization.* arXiv:1412.6980; 2017. DOI: 10.48550/arXiv.1412.6980.

References

1. Sussillo D. Neural circuits as computational dynamical systems. *Curr. Opin. Neurobiol.* 2014;25:156–163. DOI: 10.1016/j.conb.2014.01.008.
2. Marblestone AH, Wayne G, Kording KP. Toward an integration of deep learning and neuroscience. *Frontiers in Computational Neuroscience.* 2016;10:94 DOI: 10.3389/fncom.2016.00094.
3. Barak O. Recurrent neural networks as versatile tools of neuroscience research. *Current Opinion in Neurobiology.* 2017;46:1–6. DOI: 10.1016/j.conb.2017.06.003.
4. Richards BA, Lillicrap TP, Beaudoin P, Bengio Y, Bogacz R, Christensen A, Clopath C, Costa RP, de Berker A, Ganguli S, Gillon CJ, Hafner D, Kepecs A, Kriegeskorte N, Latham P, Lindsay GW, Miller KD, Naud R, Pack ChC, Poirazi P, Roelfsema P, Sacramento J, Saxe A, Scellier B, Schapiro AC, Senn W, Wayne G, Yamins D, Zenke F, Zylberberg J, Therien D, Kording KP. A deep learning framework for neuroscience. *Nature Neuroscience.* 2019;22(11):1761–1770. DOI: 10.1038/s41593-019-0520-2.
5. Ehrlich DB, Stone JT, Brandfonbrener D, Atanasov A, Murray JD. PsychRNN: An Accessible and Flexible Python Package for Training Recurrent Neural Network Models on Cognitive Tasks. *Eneuro.* 2021;8(1). DOI: 10.1523/ENEURO.0427-20.2020.
6. Durstewitz D, Koppe G, Thurm MI. Reconstructing computational system dynamics from neural data with recurrent neural networks. *Nature Reviews Neuroscience.* 2023;24(11): 693–710. DOI: 10.1038/s41583-023-00740-7.
7. Mante V, Sussillo D, Shenoy KV, Newsome WT. Context-dependent computation by recurrent dynamics in prefrontal cortex. *Nature.* 2013;503(7474):78–84. DOI: doi.org/10.1038/nature12742.
8. McNaughton BL, Battaglia FP, Jensen O, Moser EI, Moser M-B. Path integration and the neural basis of the “cognitive map”. *Nature Reviews Neuroscience.* 2006;7(8):663–678. DOI: 10.1038/nrn1932.
9. Yang GRt, Wang X-J. Artificial neural networks for neuroscientists: A primer. *Neuron.* 2020;107(6): 1048–1070. DOI: 10.1016/j.neuron.2020.09.005.
10. Bernáez TL, Ekelmans P, Kraynyukova N, Rose T, Busse L, Tchumatchenko T. How to incorporate biological insights into network models and why it matters. *The Journal of Physiology.* 2023;601(15):3037–3053. DOI: 10.1113/JP282755.
11. Vyas S, Golub MD, Sussillo D, Shenoy KV. Computation through neural population dynamics. *Annual Review of Neuroscience.* 2020;43:249–275. DOI: 10.1146/annurev-neuro-092619-094115.
12. Sussillo D, Abbott LF. Generating coherent patterns of activity from chaotic neural networks. *Neuron.* 2009;63(4):544–557. DOI: 10.1016/j.neuron.2009.07.018.
13. Kriegeskorte N, Xue-Xin W. Neural tuning and representational geometry. *Nature Reviews Neuroscience.* 2021;22(11):703–718. DOI: 10.1038/s41583-021-00502-3.
14. Khona M, Fiete IR. Attractor and integrator networks in the brain. *Nature Reviews Neuroscience.* 2022;23(12):744–766. DOI: 10.1038/s41583-022-00642-0.
15. Langdon Ch, Genkin M, Engel TA. A unifying perspective on neural manifolds and circuits for cognition. *Nature Reviews Neuroscience.* 2023;24(6):363–377. DOI: 10.1038/s41583-023-00693-x.
16. Maslennikov OV, Pugavko MM, Shchapin DS, Nekorkin VI. Nonlinear dynamics and machine learning of recurrent spiking neural networks. *Phys. Usp.* 2022;65:1020–1038. DOI: 10.3367/UFNe.2021.08.039042.
17. Maslennikov OV, Nekorkin VI. Stimulus-induced sequential activity in supervisedly trained recurrent networks of firing rate neurons. *Nonlinear Dynamics.* 2020;101(2):1093–1103. DOI: 10.1007/s11071-020-05787-0.
18. Pugavko MM, Maslennikov OV, Nekorkin VI. Dynamics of spiking map-based neural networks

in problems of supervised learning. *Communications in Nonlinear Science, Numerical Simulation*. 2020;90:105399. DOI: 10.1016/j.cnsns.2020.105399

19. Pugavko MM, Maslennikov OV, Nekorkin VI. Dynamics of a network of map-based model neurons for supervised learning of a reservoir computing system. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2020;28(1):77–89. DOI: 10.18500/0869-6632-2020-28-1-77-89.
20. Maslennikov OV, Nekorkin VI. Collective dynamics of rate neurons for supervised learning in a reservoir computing system. *Chaos*. 2019;29(10):103126. DOI: 10.1063/1.5119895.
21. Parga N, Serrano-Fernández L, Falcó-RJ. Emergent computations in trained artificial neural networks and real brains. *Journal of Instrumentation*. 2023;18(02):C02060. DOI: 10.1088/1748-0221/18/02/C02060.
22. Pugavko MM, Maslennikov OV, Nekorkin VI. Multitask computation through dynamics in recurrent spiking neural networks. *Scientific Reports*. 2023;13(1):3997. DOI: 10.1038/s41598-023-31110-z.
23. Schulman J, Wolski F, Dhariwal P, Radford A, Klimov O. Proximal policy optimization algorithms. arXiv:1707.06347; 2017. DOI: 10.48550/arXiv.1707.06347.
24. Diederik PK, Jimmy B. Adam: A Method for Stochastic Optimization. arXiv:1412.6980; 2017. DOI: 10.48550/arXiv.1412.6980.



Кононов Роман Андреевич — родился в Выксе (1999). Окончил магистратуру радиофизического факультета Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского (2023). С 2022 года работает в Институте прикладной физики РАН. Область научных интересов — нелинейные колебания и волны, машинное обучение, нейродинамика, сложные сети.

Россия, 603950 Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46
Институт прикладной физики РАН
E-mail: vnekorkin@appl.sci-nnov.ru
ORCID: 0000-0003-0173-587X
AuthorID (eLibrary.Ru): 2740



Масленников Олег Владимирович — родился в Горьком (1988). Окончил радиофизический факультет Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского (2011). С 2007 года работает в Институте прикладной физики РАН. Кандидат физико-математических наук (2014, ИПФ РАН). Область научных интересов — нелинейные колебания и волны, синхронизация, сложные сети, нейродинамика. Имеет более 40 научных публикаций по указанным направлениям. Награжден медалью РАН с премией для молодых ученых (2016).

Россия, 603950 Нижний Новгород, Ульянова, 46
Институт прикладной физики РАН
E-mail: olmaov@ipfran.ru
ORCID: 0000-0002-8909-321X
AuthorID (eLibrary.Ru): 643949



Некоркин Владимир Исаакович — родился в 1948 году. Окончил радиофизический факультет Горьковского государственного университета им. Н. И. Лобачевского (1971). Член-корреспондент РАН (2022), профессор (1995), доктор физико-математических наук (1992). Профессор кафедры теории колебаний и автоматического регулирования ННГУ, заведующий отделом нелинейной динамики Института прикладной физики РАН. Лауреат премии им. А. А. Андропова (2012). Область научных интересов — динамика нелинейных систем, нейродинамика, теория синхронизации, пространственно-временной хаос, структурообразование и нелинейные волны. Имеет более 350 научных публикаций в отечественных и зарубежных изданиях, в том числе 5 книг.

Россия, 603950 Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46
Институт прикладной физики РАН
E-mail: vnekorkin@appl.sci-nnov.ru
ORCID: 0000-0003-0173-587X
AuthorID (eLibrary.Ru): 2740