Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2026. Т. 34, № 1
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2026;34(1)

Научная статья
УДК 517.9

DOI: 10.18500/0869-6632-003197
EDN: KBINPI

Локальная динамика непериодических цепочек с односторонними связями

С. А. Кащенко

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Россия
E-mail: ✉kasch@uniyar.ac.ru

*Поступила в редакцию 4.08.2025, принята к публикации 1.10.2025,
опубликована онлайн 15.10.2025, опубликована 30.01.2026*

Аннотация. Рассматриваются цепочки N односторонне связанных нелинейных уравнений первого порядка, у которых значение последнего элемента определяется через первый элемент цепочки. *Цель работы* состоит в исследовании локальной — в окрестности нулевого состояния равновесия — динамики этой системы. Выделены критические случаи в задаче об устойчивости состояния равновесия и построены нормальные формы, определяющие локальное поведение решений. В простейших случаях, когда $N = 2$ и $N = 3$, проведен детальный анализ. Наиболее интересная часть исследований относится к случаю, когда значение N достаточно велико. Показано, что критические случаи тогда имеют бесконечную размерность. *Методы.* Стандартная схема исследования, базирующаяся на использовании метода локальных инвариантных многообразий и метода нормальных форм, оказывается неприменимой. Используется разработанный автором специальный метод бесконечномерной нормализации. *Основные результаты* состоят в построении так называемых квазинормальных форм — аналогов нормальных форм для бесконечномерного случая. Важно подчеркнуть, что даже при достаточно больших значениях количества элементов N цепочки квазинормальные формы, определяющие динамику исходной системы, существенно зависят от варьирования величины N. Отметим, что при определенных значениях коэффициентов системы динамика ее может быть достаточно сложной.

Ключевые слова: динамика, дифференциальное уравнение, цепочка, нормальная форма, устойчивость.

Благодарности. Работа выполнена в рамках программы развития Регионального научно-образовательного математического центра Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (Соглашение о предоставлении субсидии из федерального бюджета № 075-02-2025-1636).

Для цитирования: *Кащенко С. А.* Локальная динамика непериодических цепочек с односторонними связями // Известия вузов. ПНД. 2026. Т. 34, № 1. С. 9–33. DOI: 10.18500/0869-6632-003197. EDN: KBINPI

Article DOI: 10.18500/0869-6632-003197

Local dynamics of aperiodic chains with unidirectional couplings

S. A. Kashchenko

P. G. Demidov Yaroslavl State University, Russia
E-mail: ✉kasch@uniyar.ac.ru

*Received 4.08.2025, accepted 1.10.2025,
available online 15.10.2025, published 30.01.2026*

Abstract. Chains of N unidirectionally coupled nonlinear first-order equations are considered, where the value of the last element is determined through the first element of the chain. The *aim* of this work is to investigate the local — in the neighborhood of the zero equilibrium state — dynamics of this system. Critical cases in the problem of equilibrium state stability are identified, and normal forms determining the local behavior of solutions are constructed. A detailed analysis is performed in the simplest cases, where $N = 2$ and $N = 3$. The most interesting part of the research concerns the case where the value of N is sufficiently large. It is shown that the critical cases then have infinite dimension. *Methods.* The standard research scheme, based on the use of the method of local invariant manifolds and the method of normal forms, turns out to be inapplicable. A special method of infinite-dimensional normalization developed by the author is used. The main *results* consist in the construction of so-called quasi-normal forms — analogs of normal forms for the infinite-dimensional case. It is important to emphasize that even for sufficiently large values of the number of chain elements N, the quasi-normal forms determining the dynamics of the original system significantly depend on variations in the value of N. Note that for certain values of the system coefficients, its dynamics can be quite complex.

Keywords: dynamics, differential equation, chain, normal form, stability.

Acknowledgements. This work was carried out within the framework of a development programme for the Regional Scientific and Educational Mathematical Center of the Yaroslavl State University with financial support from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement on provision of subsidy from the federal budget No. 075-02-2025-1636).

For citation: Kashchenko SA. Local dynamics of aperiodic chains with unidirectional couplings. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2026;34(1):9–33. DOI: 10.18500/0869-6632-003197

Постановка задачи

Рассмотрим одно из простейших нелинейных уравнений первого порядка

$$\dot{u} + au = f(u), \tag{1}$$

где $a > 0$, а достаточно гладкая функция $f(u)$ имеет в нуле порядок малости выше первого:

$$f(u) = f_2u^2 + f_3u^3 + O(u^4).$$

Цепочкой из N уравнений вида (1) с односторонними связями называется система уравнений

$$\dot{u}_j + au_j = f(u_j) + bu_{j+1} \quad (b \neq 0), \tag{2}$$

в которой $j = 1, \ldots, N$ и на правом конце этой цепочки для $u_{N+1}(t)$ выполнено граничное условие

$$u_{N+1} = \gamma u_1 \quad (\gamma \neq 0). \tag{3}$$

Цепочки вида (2) являются важными объектами для исследований. Им уделяется особое внимание. Такие цепочки возникают при моделировании многих прикладных задач в радиофизике [1–8], лазерной физике [9–13], математической экологии [14, 15], теории нейронных сетей [16–21], оптике [3, 8, 22, 23], биофизике [24] и др. Релаксационные колебания в связанных цепочках с финитной нелинейностью и запаздыванием для небольшого количества элементов изучались в [25, 26]. Отметим еще работу [27], в которой рассмотрена динамика периодической цепочки с большим количеством элементов.

Поставим задачу исследования поведения при $t \to \infty$ всех решений цепочки (2), (3) с начальными условиями из некоторой достаточно малой окрестности нулевого состояния равновесия.

Важную роль в этом вопросе играет линеаризованная в нуле система уравнений:

$$\dot{u}_j + au_j = bu_{j+1}, \quad u_{N+1} = \gamma u_1 \quad (j = 1, \ldots, N). \tag{4}$$

Характеристическое уравнение для системы (4) имеет вид

$$[(\lambda + a)b^{-1}]^N = \gamma, \tag{5}$$

поэтому для корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ этого уравнения верны равенства

$$\ln \gamma = \ln |\gamma| + i \arg(\gamma), \tag{6}$$

где $\arg(\gamma) = 0$ при $\gamma > 0$ и $\arg(\gamma) = \pi$ при $\gamma < 0$.

При условии, когда все N корней (6) имеют отрицательные вещественные части, все решения системы (4) и системы (2), (3) с начальными условиями из достаточно малой окрестности нулевого состояния равновесия стремятся к нулю при $t \to \infty$. Если же в (6) есть корень с положительной вещественной частью, то система (4) имеет экспоненциально растущее при $t \to \infty$ решение, а задача о динамике (2), (3) перестает быть локальной: ее нулевое решение неустойчиво, и в его достаточно малой окрестности не может быть аттрактора.

Ниже будем рассматривать критический случай в задаче об устойчивости, когда у (6) нет корней с положительной вещественной частью, но существует корень с нулевой вещественной частью.

Поскольку параметр a положителен, то при достаточно малых значениях параметра b все корни (6) имеют отрицательные вещественные части. Через b^+ будем обозначать наименьшее положительное значение параметра b, при котором в (6) есть корень с нулевой вещественной частью. Если такого значения не существует, то полагаем $b^+ = \infty$. Соответственно, через b^- обозначим наибольшее отрицательное значение b (если оно существует, иначе положим $b^- = -\infty$). Таким образом, при $b \in (b^-, b^+)$ все корни (6) имеют отрицательные вещественные части.

Введем в рассмотрение еще две величины: γ^+ и γ^-, которые по смыслу «похожи» на b^+ и b^- соответственно. При малых значениях γ все корни (6) имеют отрицательные вещественные части. Через γ^+ будем обозначать наименьшее положительное значение параметра γ, при котором в (6) есть корень с нулевой вещественной частью. Если такого значения не существует, то полагаем $\gamma^+ = \infty$. Соответственно, через γ^- обозначим наибольшее отрицательное значение γ (если оно существует, иначе положим $\gamma^- = -\infty$). Таким образом, при $\gamma \in (\gamma^-, \gamma^+)$ все корни (6) имеют отрицательные вещественные части.

В разделах 1 и 2 изучим две ситуации, когда $N = 2$ и $N = 3$. В разделе 3 приведем результаты для произвольного N. В разделе 4, который является центральным в настоящей работе, предполагается, что количество уравнений N достаточно велико, то есть

$$N \gg 1. \tag{7}$$

В частности, для этих случаев будут определены значения $b^{\pm}$ и $\gamma^{\pm}$. В методическом плане исследования локальной динамики в разделах 1–3 базируются на использовании методов локальных инвариантных интегральных многоообразий и метода нормальных форм (см., например, [28, 29]).

В условиях раздела 4 эти методы непосредственно не применимы, поскольку критические случаи тогда имеют бесконечную размерность. Используется разработанный автором специальный метод бесконечномерной нормализации [13, 14, 30]. Основные результаты состоят в построении так называемых квазинормальных форм — аналогов нормальных форм для бесконечномерного случая.

В плане одного из важных обобщений модели цепочки (2), (3) укажем, что полученные результаты распространяются и на цепочки уравнений (1) с другими односторонними связями

$$\dot{u}_j + au_j = f(u_j) + b(u_{j+1} - u_j),$$

в которых, как и для цепочки (2),

$$j = 1, \ldots, N; \quad u_{N+1} = \gamma u_1.$$

Отметим, что в наиболее интересном случае (7) цепочки, для которых выполнено условие «периодичности»

$$u_{N+1} = u_1,$$

изучались в [27]. Сразу подчеркнем, что граничное условие (3) при $\gamma \neq 1$ принципиально усложняет динамические свойства системы (2).

1. Случай $N = 2$

Этот случай наиболее простой. Рассматривается система двух уравнений

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 + au_1 &= f(u_1) + bu_2, \\ \dot{u}_2 + au_2 &= f(u_2) + b\gamma u_1. \end{aligned} \tag{8}$$

При $\gamma < 0$ имеем $b^{\pm} = \pm\infty$. Тем самым при всех b корни (6) имеют отрицательные вещественные части.

Пусть
$$\gamma > 0.$$

Тогда $b^{\pm} = \pm a(\sqrt{\gamma})^{-1}$ ($\sqrt{\gamma} > 0$ — арифметический корень из γ). При $b = b^{\pm}$ линейная система (4) (для $N = 2$) имеет постоянные решения

$$\begin{pmatrix} u_{10} \\ u_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^{\pm} \\ a \end{pmatrix} \cdot \mathrm{const}.$$

Фиксируем произвольно значение b_1 и введем малый параметр $\varepsilon : 0 < \varepsilon \ll 1$. Положим в (8)

$$b = b^{\pm} + \varepsilon b_1. \tag{9}$$

Тогда в (6) имеется один отрицательный (и отделенный от нуля при $\varepsilon \to 0$) корень и один корень $\lambda_0(\varepsilon)$, близкий к нулю:

$$\lambda_0(\varepsilon) = \varepsilon b_1 \sqrt{\gamma} + O(\varepsilon^2).$$

При малых ε в фазовом пространстве системы (8) имеется локальное инвариантное одномерное интегральное устойчивое многообразие (см., например, [31]), на котором система (8) (при некотором условии невырожденности) с точностью до слагаемых порядка $O(\varepsilon)$ принимает вид скалярного обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d\xi}{d\tau} = b_1\sqrt{\gamma}\,\xi + a\big(1 + (\sqrt{\gamma})^{-1}\big)\xi^2, \tag{10}$$

где $\tau = \varepsilon t$ — «медленное» время, а функция $\xi(\tau)$ связана с решениями (8) асимптотическим равенством

$$\begin{pmatrix} u_1(t,\varepsilon) \\ u_2(t,\varepsilon) \end{pmatrix} = \varepsilon\xi(\tau)\begin{pmatrix} b^{\pm} \\ a \end{pmatrix} + O(\varepsilon^2). \tag{11}$$

При $b_1 \neq 0$ уравнение (10) имеет ненулевое состояние равновесия $\xi_0 = -b_1\sqrt{\gamma}\big[a + (1 + (\sqrt{\gamma})^{-1})\big]^{-1}$. Оно устойчиво при $b_1 > 0$ и неустойчиво при $b_1 < 0$. Поэтому и система (8) при $\gamma > 0$, при условии (9) и при достаточно малых ε имеет состояние равновесия

$$\begin{pmatrix} u_{10} \\ u_{20} \end{pmatrix} = \varepsilon\,\xi_0\begin{pmatrix} b^{\pm} \\ a \end{pmatrix} + O(\varepsilon^2),$$

которое устойчиво (неустойчиво) при $b_1 > 0$ ($b_1 < 0$). В рассмотренном близком к критическому случаю уравнение (10) называют нормальной формой. Упомянутое выше условие невырожденности состоит в том, что $f_2 \neq 0$. При $f_2 = 0$ и $f_3 \neq 0$ изменения не существенны. В нормальной форме квадратичное слагаемое заменится на кубическое, а асимптотическое разложение — аналог (11) — идет по степеням $\varepsilon^{1/2}$.

Тем самым изучение локальной динамики системы (8) завершено.

Приведем для системы (8) значения γ^+ и γ^- :

$$\gamma^+ = \left(\frac{a}{b}\right)^2, \quad \gamma^- = -\infty.$$

2. Случай $N = 3$

Система (2), (3) при $N = 3$ принимает вид

$$\begin{aligned} \dot u_1 + au_1 &= f(u_1) + bu_2, \\ \dot u_2 + au_2 &= f(u_2) + bu_3, \\ \dot u_3 + au_3 &= f(u_3) + b\gamma u_1. \end{aligned} \tag{12}$$

Для линеаризованной системы

$$\dot v = A_\gamma v, \quad \text{где } v = (v_1, v_2, v_3), \quad A_\gamma = \begin{pmatrix} -a & b & 0 \\ 0 & -a & b \\ b\gamma & 0 & -a \end{pmatrix}, \tag{13}$$

корни λ_1, λ_2 и λ_3 характеристического уравнения определяются равенствами

$$\lambda_1 + a = b\sqrt[3]{\gamma}, \quad \lambda_2 + a = b\sqrt[3]{\gamma}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \lambda_3 + a = b\sqrt[3]{\gamma}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \tag{14}$$

где $\sqrt[3]{\gamma}$ — арифметический корень ($\sqrt[3]{\gamma} > 0$ при $\gamma > 0$ и $\sqrt[3]{\gamma} < 0$ при $\gamma < 0$).

Для значений $\gamma^{\pm}$ верны равенства

$$\gamma^+ = \begin{cases} \left(\dfrac{a}{b}\right)^3, & \text{если } b > 0, \\ \left(\dfrac{2a}{|b|}\right)^3, & \text{если } b < 0, \end{cases} \qquad \gamma^- = \begin{cases} -\left(\dfrac{2a}{b}\right)^3, & \text{если } b > 0, \\ \left(\dfrac{a}{b}\right)^3, & \text{если } b < 0. \end{cases}$$

Приведем значения величины $b^{\pm}$:

$$b^+ = \begin{cases} \dfrac{a}{\sqrt[3]{\gamma}}, & \text{если } \gamma > 0, \\ -\dfrac{2a}{\sqrt[3]{\gamma}}, & \text{если } \gamma < 0, \end{cases} \qquad b^- = \begin{cases} -\dfrac{2a}{\sqrt[3]{\gamma}}, & \text{если } \gamma > 0, \\ \dfrac{a}{\sqrt[3]{\gamma}}, & \text{если } \gamma < 0. \end{cases}$$

При условиях $\gamma \in (\gamma^-, \gamma^+)$ $\big(b \in (b^-, b^+)\big)$ корни (14) имеют отрицательные вещественные части, а при $\gamma \in (-\infty, \gamma^-)$ и $\gamma \in (\gamma^+, \infty)$ $\big(b \in (-\infty, b^-)$ и $b \in (b^+, \infty)\big)$ среди корней (14) есть корень с положительной вещественной частью. При условиях $\gamma = \gamma^{\pm}$ $\big(b = b^{\pm}\big)$ в задаче об устойчивости решений (12) возникают критические случаи нулевого корня или критические случаи пары чисто мнимых корней. Рассмотрим их.

2.1. Критический случай нулевого корня. Данный случай возникает при условии, когда $b > 0$ и $\gamma = \gamma^+$, либо при $b < 0$ и $\gamma = \gamma^-$. Ограничимся рассмотрением только первого из приведенных условий, то есть ниже считаем, что

$$b > 0 \ \text{ и } \ \gamma = \gamma^+ = \left(\frac{a}{b}\right)^3.$$

Линейная система (13) при $\gamma = \gamma^+$ имеет постоянные решения $v = d_0 = \mathrm{const}$, где $d_0 = \big(1, ab^{-1}, a^2b^{-2}\big)$.

Фиксируем произвольно значение γ_1 и положим в (12)

$$\gamma = \gamma^+ + \varepsilon\gamma_1, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

Тогда корни λ_2 и λ_3 имеют при малых ε отрицательные вещественные части: $\operatorname{Re}\lambda_{2,3} = -\frac{1}{2}a + O(\varepsilon)$, а для корня $\lambda_1(\varepsilon)$ верно асимптотическое равенство

$$\lambda(\varepsilon) = \varepsilon\mu_1\gamma_1 + O(\varepsilon^2), \ \text{ где } \ \mu_1 = b^3(3a^2)^{-1}.$$

Отсюда следует, что в достаточно малой и не зависящей от ε окрестности нулевого состояния равновесия системы (12) существует устойчивое локальное инвариантное одномерное интегральное многообразие, на котором эта система с точностью до $O(\varepsilon)$ представима в виде нормальной формы (при выполнении некоторого условия невырожденности)

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \alpha\xi + \beta\xi^2, \quad \tau = \varepsilon t. \tag{15}$$

Для определения коэффициентов α и β подставим в (12) решение $u = (u_1, u_2, u_3)$ в виде асимптотического ряда

$$u(t, \varepsilon) = \varepsilon\xi(\tau)d_0 + \varepsilon^2 U_2(\tau) + \ldots.$$

Собирая коэффициенты при первой степени ε в получившемся формальном тождестве, получаем верное равенство, а учитывая коэффициенты при ε^2, приходим к системе для определения функции $U_2(\tau)$:

$$A_{\gamma_+}U_2 = -d_0\frac{d\xi}{d\tau} + f_2\xi^2 d_0 \cdot d_0 + b\gamma_1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{16}$$

здесь и ниже умножение векторов покоординатное.

Система (16) разрешима тогда и только тогда, когда ее правая часть ортогональна вектору $h_0 = (1, ba^{-1}, b^2a^{-2})$ — ненулевому решению однородного сопряженного уравнения $A^*h_0 = 0$. Учитывая это, получаем, что в (15)

$$\alpha = \mu_1\gamma_1 = b^3(3a^2)^{-1}\gamma_1, \quad \beta = \frac{1}{3}f_2(d_0 \cdot d_0, h_0). \tag{17}$$

Упомянутое выше условие невырожденности состоит в выполнении неравенства $f_2 \neq 0$. Используя (17) в (15), получаем полную картину поведения решений (15), а значит, и решений (12) в малой окрестности нулевого состояния равновесия.

2.2. Критический случай пары чисто мнимых корней. Данный случай возникает при условиях

$$b<0 \;\text{ и }\; \gamma^+ = \left(\frac{2a}{|b|}\right)^3, \;\text{ либо }\; b>0 \;\text{ и }\; \gamma^- = -\left(\frac{2a}{b}\right)^3.$$

Пусть выполнены первые из этих условий

$$b<0, \quad \gamma^+ = \left(\frac{2a}{|b|}\right)^3.$$

Тогда $\lambda_1 = -a + b\sqrt[3]{\gamma^+} < 0$ и $\lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{3}a$. Линейная система (13) при этом имеет периодические решения

$$v_0(t) = g_0\exp(ia\sqrt{3}t), \quad g_0 = \begin{pmatrix} -{\gamma^+}^{1/3}(1+i\sqrt{3}) \\ {\gamma^+}^{2/3} \\ -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Фиксируем произвольно значение γ_1 и положим в (12) и (13):

$$\gamma = \gamma^+ + \varepsilon\gamma_1, \quad 0<\varepsilon\ll 1.$$

При всех достаточно малых ε в не зависящей от ε достаточно малой окрестности нулевого состояния равновесия (12) существует (см., например, [31]) двумерное устойчивое локально инвариантное интегральное многообразие, на котором система (12) может быть с точностью до слагаемых порядка ε представлена в виде нормальной формы — комплексного скалярного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка вида

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \delta\xi + \sigma\xi|\xi|^2, \quad \tau = \varepsilon t. \tag{18}$$

Для определения коэффициентов δ и σ подставим в (12) решение в виде формального ряда

$$\begin{aligned} U(t,\varepsilon) =& \varepsilon^{1/2}\big(\xi(\tau)g_0\exp(ia\sqrt{3}t) + \bar{\xi}(\tau)\bar{g}_0\exp(-ia\sqrt{3}t)\big) + \varepsilon U_2(t,\tau) + \\ &+ \varepsilon^{3/2}U_3(t,\tau) + \ldots, \end{aligned}$$

где зависимость от t — $2\pi(a\sqrt{3})^{-1}$-периодическая. В получившемся формальном тождестве будем собирать коэффициенты при одинаковых степенях ε. На первом шаге, собирая коэффициенты при $\varepsilon^{1/2}$, приходим к верному равенству. На следующем шаге получаем систему уравнений для определения функции $U_2(t,\tau) = U_{20}|\xi|^2 + U_{21}\xi^2\exp(2ia\sqrt{3}t) + \bar{U}_{21}\bar{\xi}\exp(-2ia\sqrt{3}t)$:

$$AU_{20} = f_2\begin{pmatrix} 4(\gamma^+)^{2/3} \\ (\gamma^+)^{4/3} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (A-2ia\sqrt{3}I)U_{21} = f_2\begin{pmatrix} (\gamma^+)^{2/3}(4+2i\sqrt{3}) \\ (\gamma^+)^{4/3} \\ 1-\frac{1}{2}i\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Отсюда находим, что

$$U_{20} = f_2A^{-1}\begin{pmatrix} 4(\gamma^+)^{2/3} \\ (\gamma^+)^{4/3} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad U_{21} = f_2(A-2ia\sqrt{3}I)^{-1}\begin{pmatrix} (\gamma^+)^{2/3}(4+2i\sqrt{3}) \\ (\gamma^+)^{4/3} \\ 1-\frac{1}{2}i\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

На третьем шаге собираем коэффициенты при $\varepsilon^{3/2}$. В результате приходим к системе уравнений относительно вектор-функции $U_3(t,\tau)$, которую будем искать в виде

$$U_3(t,\tau) = U_{31}(\tau)\exp\left(ia\sqrt{3}t\right) + \overline{cc} + U_{33}(\tau)\exp\left(3ia\sqrt{3}t\right) + \overline{cc}.$$

Здесь и ниже через $\overline{cc}$ обозначается слагаемое, комплексно сопряженное к предыдущему.

Выражение для $U_{33}(\tau)$ просто находится. Ниже оно не понадобится, поэтому приводить его не будем. Для $U_{31}(\tau)$ получаем систему уравнений

$$\left(A_{\gamma+} - ia\sqrt{3}I\right)U_{31}(\tau) = -b\gamma_1(\gamma^+)^{1/3}(1+i\sqrt{3})\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\xi - g_0\frac{d\xi}{d\tau} + \xi|\xi|^2 B, \tag{19}$$

где $B = 2f_2(g_0U_{20} + \bar{g}_0U_{21}) + 3f_3g_0\cdot g_0\cdot\bar{g}_0$.

Необходимым и достаточным условием разрешимости этой системы является условие ортогональности правой части (19) вектору h — ненулевому решению однородного сопряженного уравнения $A_{\gamma_+}h = -ia\sqrt{3}h$. Находим, что $h = \left((1+i\sqrt{3})^2a^2, (1+i\sqrt{3})ab, b^2\right)$.

В итоге для определения $\xi(\tau)$ получаем уравнение (18), в котором

$$\delta = b^2(6a)^{-1}(1+i\sqrt{3})\gamma_1, \quad \sigma = (B,h)\left((g_0,h)\right)^{-1}.$$

Для примера сформулируем один результат.

Теорема 1. *Пусть параметры* γ_1, f_2 *и* f_3 *таковы, что* $\operatorname{Re}\delta > 0$ *и* $\operatorname{Re}\sigma < 0$. *Тогда уравнение* (18) *имеет устойчивый цикл* $\rho_0\exp(i\varphi_0\tau)$, *где* $\rho_0 = \left(\operatorname{Re}\delta\cdot(\operatorname{Re}\sigma)^{-1}\right)^{1/2}$, $\psi = \sqrt{3}\gamma_1\operatorname{Re}\delta + \rho_0^2\operatorname{Im}\sigma$, *а система* (12) *при достаточно малых* ε *имеет устойчивый цикл*

$$u_0(t,\varepsilon) = \varepsilon^{1/2}\left(g_0\rho_0\exp\left((ia\sqrt{3} + \varepsilon i\psi + O(\varepsilon^2))t\right) + \overline{cc}\right) + O(\varepsilon).$$

3. Случай произвольного номера N

Прежде всего определим значения $\gamma^\pm$:

$$\gamma^+ = \begin{cases} \left(ab^{-1}\right)^N, & \text{если } b > 0,\\ \left(a|b|^{-1}\right)^N, & \text{если } b < 0 \quad \text{и} \quad N \text{ — нечетно},\\ \left(a|b|^{-1}\right)^N\left(\cos\dfrac{\pi}{N}\right)^{-N}, & \text{если } b < 0 \quad \text{и} \quad N \text{ — четно}; \end{cases}$$

$$\gamma^- = \begin{cases} -\left(ab^{-1}\right)^N\left(\cos\dfrac{\pi}{N}\right)^{N}, & \text{если } b > 0 \quad \text{и} \quad N \text{ — четно},\\ -\left(ab^{-1}\right)^N, & \text{если } b > 0 \quad \text{и} \quad N \text{ — нечетно},\\ -\left(a|b|^{-1}\right)^N, & \text{если } b < 0 \quad \text{и} \quad N \text{ — нечетно},\\ -\left(a|b|^{-1}\right)^N\left(\cos\dfrac{\pi}{N}\right)^{N}, & \text{если } b < 0 \quad \text{и} \quad N \text{ — четно}. \end{cases}$$

Напомним, что при $\gamma \in (\gamma^-,\gamma^+)$ нулевое решение системы (20) асимптотически устойчиво, а при $\gamma < \gamma^-$ или $\gamma > \gamma^+$ — неустойчиво. Критические случаи в задаче об устойчивости нулевого состояния равновесия возникают при $\gamma = \gamma^+$ или при $\gamma = \gamma^-$. В этом разделе рассмотрим локальную динамику системы (20) в случаях, близких к критическим.

Приведем несколько формул, которые понадобятся в дальнейшем. Пусть γ_N — арифметический корень N-й степени из $|\gamma|$. Положим

$$\gamma_0 = \begin{cases} \gamma_N, & \text{если } \gamma > 0, \\ \gamma_N \exp\left(i\dfrac{\pi}{N}\right), & \text{если } \gamma < 0, \end{cases}$$

и пусть

$$\alpha_k = \gamma_0 \exp\left(\frac{2\pi i k}{N}\right), \quad k = 1, \ldots, N.$$

Отметим, что $\alpha_k^N = \gamma$. Систему (2), (3) запишем в виде

$$\dot{u} = Au + F(u), \tag{20}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} -a & b & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -a & b & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & b \\ b\gamma & 0 & 0 & \ldots & -a \end{pmatrix}, \quad F(u) = f_2 u \cdot u + f_3 u \cdot u \cdot u + \ldots.$$

Здесь и ниже умножение векторов покоординатное, $u = (u_1, \ldots, u_N)$.

Матрица A имеет собственные значения

$$\lambda_k = -a + b\alpha_k \quad (k = 1, \ldots, N)$$

и отвечающие им собственные векторы

$$g_k = (1, \alpha_k, \alpha_k^2, \ldots, \alpha_k^{N-1}).$$

Отметим, что у сопряженной к A матрицы A^* соответствующие собственные векторы $h_k = (1, \alpha_k^{-1}, \alpha_k^{-2}, \ldots, \alpha_k^{-(N-1)})$.

3.1. Случай произвольного номера N. Здесь предполагаем, что $N > 2$ и матрица A имеет нулевое собственное значение, то есть

$$b > 0 \ \text{ и } \ \gamma = \gamma^+ = (ab^{-1})^N, \tag{21}$$

либо

$$b < 0, \ \ \gamma = \gamma^- = (a|b|^{-1})^N \ \text{ и } \ N - \text{нечетно}.$$

Коротко остановимся только на случае (21). Собственные значения $\lambda_2, \ldots, \lambda_N$ имеют отрицательные вещественные части. Собственному значению $\lambda_1 = 0$ отвечает собственный вектор $g^0 = (1, a/b, a^2/b^2, \ldots, a^{N-1}/b^{N-1})$. Фиксируем произвольно γ_1 и положим в (1)

$$g = g^+ + \varepsilon\gamma_1, \ \text{ где } \ 0 < \varepsilon \ll 1. \tag{22}$$

Для нахождения в рассматриваемом случае коэффициентов α и β нормальной формы — скалярного уравнения

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \alpha\xi + \beta|\xi|^2, \quad \tau = \varepsilon t, \tag{23}$$

будем решения $u(t,\varepsilon)$ системы (1) искать в виде формального ряда

$$u(t,\varepsilon) = \varepsilon\xi(\tau)g_0 + \varepsilon^2 U_2(\tau) + \dots .$$

Тогда для нахождения $U_2(\tau)$ получим систему уравнений

$$AU_2 = -g_0\frac{d\xi}{d\tau} + b\gamma_1\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\xi + f_2\xi^2 g^0\cdot g^0.$$

Для разрешимости этой системы необходимо и достаточно, чтобы ее правая часть была ортогональна вектору $h^0 = (1, b/a, b^2/a^2, \dots, b^{N-1}/a^{N-1})$. Отсюда приходим к выводу, что в уравнении (23)

$$\alpha = \frac{a\gamma_1}{N\gamma^+}, \quad \beta = \frac{1-\gamma^+}{N(1-ab^{-1})}. \tag{24}$$

Итак, показано, что при достаточно малых ε динамические свойства решений (20) с начальными условиями из некоторой достаточно малой и не зависящей от ε окрестности нулевого состояния равновесия описываются уравнением (23) с коэффициентами (24).

3.2. Критический случай пары чисто мнимых корней. Здесь предполагаем, что матрица A имеет пару чисто мнимых собственных значений $\pm i\omega$ $(\omega > 0)$, а все остальные ее собственные значения имеют отрицательные вещественные части, то есть выполнены условия

$$b < 0, \ \ \gamma^+ = (a|b|^{-1})^N\left(\cos\frac{\pi}{N}\right)^N \ \text{ и } N \ \text{ — четно,} \tag{25}$$

либо

$$b > 0, \ \ \gamma^- = -(ab^{-1})^N\left(\cos\frac{\pi}{N}\right)^N \ \text{ и } \ N \ \text{ — четно,}$$

либо

$$b < 0, \ \ \gamma^- = -(a|b|^{-1})^N\left(\cos\frac{\pi}{N}\right)^N \ \text{ и } \ N \ \text{ — четно.}$$

Остановимся только на случае (25). Матрица A тогда имеет собственные значения $\lambda^\pm = \pm i\omega$, где $\omega = a\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{N}$. Им отвечают собственные векторы g_0 и $\bar{g}_0$ соответственно, и $g_0 = (1, \alpha_{N/2}, \alpha_{N/2}^2, \dots, \alpha_{N/2}^{N-1})$.

Пусть для γ выполнено равенство (22). Нормальной формой, описывающей динамические свойства системы (20) при условии (22) и (25), является скалярное комплексное уравнение (18). Для нахождения коэффициентов этого уравнения рассмотрим формальный ряд

$$\begin{aligned} U(t,\varepsilon) =& \varepsilon^{1/2}\big(\xi(\tau)g_0\exp(i\omega t) + \overline{cc}\big) + \varepsilon\big(|\xi|^2U_{20} + \xi^2U_{21}\exp(2i\omega t) + \overline{cc}\big) + \\ &+ \varepsilon^{3/2}\big(\big(U_{31}\exp(i\omega t) + \overline{cc}\big) + \overline{cc} + \xi^3U_{32}\exp(3i\omega t) + \overline{cc}\big) + \dots . \end{aligned} \tag{26}$$

Подставим (26) в (20) и будем собирать коэффициенты при одинаковых степенях ε. При $\varepsilon^{1/2}$ получаем верное равенство. На следующем шаге находим, что

$$U_{20} = 2f_2A^{-1}g_0\cdot\bar{g}_0, \quad U_{21} = f_2(A - 2i\omega I)^{-1}g_0\cdot g_0.$$

Собирая коэффициенты при $\varepsilon^{1/2}$, получаем уравнения для U_{31} и U_{32}. Выражение для U_{32} определяется просто. Ниже оно не понадобится, поэтому его приводить не будем. Для определения U_{31} приходим к системе

$$(A - i\omega I)U_{31} = B, \tag{27}$$

где

$$B = -g_0 \frac{d\xi}{d\tau} + \gamma_1 b \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xi + 2f_2 g_0 U_{20} + 2f_2 \bar{g}_0 U_{21} + 3f_3 g_0 \cdot g_0 \cdot \bar{g}_0.$$

Для разрешимости системы (27) необходимо и достаточно, чтобы вектор B стал ортогонален вектору h_0 — решению однородного сопряженного уравнения $A^*h = -i\omega h$. В итоге для коэффициентов уравнения (18) получаем равенства

$$\delta = -b\gamma_1(\gamma^+)^{(1/N-1)}N^{-1}, \tag{28}$$

$$\sigma = \frac{1}{N}\Big[2f_2\big((g_0U_{20}, h_0) + (\bar{g}_0U_{21}, h_0)\big) + 3f_3(g_0 \cdot g_0 \cdot \bar{g}_0, h_0)\Big]. \tag{29}$$

При условиях невырожденности $\operatorname{Re}\delta \neq 0$ и $\operatorname{Re}\sigma \neq 0$ уравнение (18) с коэффициентами (28), (29) полностью определяет локальную динамику уравнения (20). С помощью (26) получаем асимптотическое представление решений (20) через решения (18).

4. Случай достаточно больших значений N

Построения для этого случая существенно сложнее предыдущих. Здесь предполагаем, что значение N достаточно велико, то есть достаточно малой является величина

$$\varepsilon = N^{-1} \ll 1.$$

Исследуем локальную динамику системы (20) в этом случае.

Сначала сформулируем одно простое утверждение, вытекающее из формулы (6) для корней характеристического уравнения (5).

Лемма 1. *Пусть выполнено неравенство*

$$a|b|^{-1} < 1. \tag{30}$$

Тогда при всех достаточно малых ε все корни (6) *имеют отрицательные вещественные части, которые отделены от нуля при $\varepsilon \to 0$. Если*

$$a|b|^{-1} > 1, \tag{31}$$

то при достаточно малых значениях ε найдется корень уравнения (5)*, вещественная часть которого положительна и отделена от нуля при $\varepsilon \to 0$.*

В случае (30) при малых ε решения (20) с начальными условиями из малой и не зависящей от ε при $\varepsilon \to 0$ окрестности нулевого состояния равновесия стремятся к нулю при $t \to \infty$. В случае (31) нулевое решение (20) неустойчиво и задача о динамике (20) становится нелокальной. Поэтому ниже предполагаем, что

$$|b| = a. \tag{32}$$

В частности, $b^+ = a + O(\varepsilon)$, $b^- = -a + O(\varepsilon)$. При условии (32) у (5) нет корней с положительной и отделенной от нуля при $\varepsilon \to 0$ вещественной частью, но есть бесконечно много корней, вещественные части которых стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$. Тем самым в задаче об устойчивости нулевого состояния равновесия (20) реализуется критический случай бесконечной размерности. Отдельно рассмотрим случай, когда $b = a$ и когда $b = -a$.

Отметим работы автора [13, 14, 17, 32], в которых в других ситуациях изучались динамические свойства систем в бесконечномерных критических случаях.

Элементы $u_j(t)$ удобно переобозначить с помощью функции двух переменных $u_j(t) = u(t, x_j)$, где $x_j \in [0, 1)$ — равномерно распределенные на отрезке $[0, 1]$ точки $x_j = 2\pi j/N = 2\pi i\varepsilon j$ $(j = 0, 1, \ldots, N)$.

Систему (2), (3) для $x = x_j$ тогда можно записать в виде уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + au = bu(t, x + \varepsilon) - f(u) \tag{33}$$

с краевыми условиями

$$u(t, 1) = \gamma u(t, 0), \tag{34}$$

а для линеаризованного в нуле уравнения (33) получим выражение

$$\frac{\partial v}{\partial t} + av = bv(t, x + \varepsilon), \tag{35}$$

$$v(t, 1) = \gamma v(t, 0). \tag{36}$$

Уравнения (33) и (35) нельзя рассматривать для непрерывного аргумента $x \in [0, 1]$, поскольку неопределены выражения $u(t, x + \varepsilon)$ и $v(t, x + \varepsilon)$ при $x + \varepsilon > 1$. Исключение составляет случай, когда $\gamma = 1$. Он был рассмотрен в [27]. Тогда считаем, что $x \in (-\infty, \infty)$, а функции u, v рассматривались как периодические по x с периодом 1. Для корней $\lambda_k(\varepsilon)$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ характеристического уравнения для (35) при $\gamma = 1$ имеет место формула

$$\lambda_k(\varepsilon) = -a + b\exp(2\pi k i\varepsilon),$$

а для соответствующих собственных функций $\varphi_k(t, x, \varepsilon)$ получаем выражение

$$\varphi_k(t, x, \varepsilon) = \exp(\lambda_k(\varepsilon)t)\exp(2\pi k i\varepsilon).$$

Отметим, что при условии (32) бесконечно много корней $\lambda_k(\varepsilon)$ стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$. Важно подчеркнуть, что при $b = a + o(\varepsilon)$ функции $\varphi_k(t, x, \varepsilon)$ гладко зависят от ε и, что то же самое, выполнено условие регулярности

$$\varphi_k(t, x, \varepsilon) = \varphi_k(t, x, 0) + \varepsilon\frac{\partial\varphi_k(t, x, 0)}{\partial x} + \frac{1}{2}\varepsilon^2\frac{\partial^2\varphi_k(t, x, 0)}{\partial x^2} + o(\varepsilon^2).$$

Если же $b = -a + o(\varepsilon)$, то для тех целых k, для которых $\lambda_k(\varepsilon)$ стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$, получаем, что

$$\varphi_k(t, x, \varepsilon) = \exp(i\pi\varepsilon^{-1}x)\psi_k(t, x, \varepsilon),$$

где $\psi_k(t, x, \varepsilon)$ регулярно зависит от ε.

Вернемся к случаю произвольного γ. Для корней $\lambda_k(\varepsilon)$ уравнения (35) имеет место формула

$$\lambda_k(\varepsilon) = -a + b\exp\big(\varepsilon(\ln\gamma + 2\pi k i)\big), \tag{37}$$

в которой номер k принимает значения $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Фиксируем произвольно значение b_1, и пусть либо

$$b = a + \varepsilon b_1, \tag{38}$$

либо

$$b = -a(1 + \varepsilon b_1). \tag{39}$$

В случае (38) применим в (35) условие регулярности

$$v(t, x + \varepsilon) = v(t, x) + \varepsilon \frac{\partial v(t, x)}{\partial x} + O(\varepsilon^2).$$

Тогда с точностью до $O(\varepsilon^2)$ приходим к уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \varepsilon b_1 v + \varepsilon a \frac{\partial v}{\partial x}, \quad v(t, 1) = \gamma v(t, 0).$$

В нерегулярном случае, когда выполнено условие (39), получаем, что

$$v(t, x) = \exp(i\pi\varepsilon^{-1} x)\bar{v} + \overline{cc}$$

и

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = \varepsilon b_1 \bar{v} + \varepsilon a \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}, \quad (\bar{v}(t, 1) + \overline{cc}) \exp(i\pi N) = \gamma \bar{v}(t, 0) + \overline{cc}.$$

Положим в (37) $\lambda_k(\varepsilon) = \varepsilon \lambda_{k1}(\varepsilon)$. Вещественные части всех $\lambda_{k1}(\varepsilon)$ имеют асимптотику

$$b_1 + \ln|\gamma| + O(\varepsilon).$$

Отсюда получаем критерий устойчивости нулевого состояния равновесия: при $b_1 + \ln|\gamma| > 0$ состояние равновесия неустойчиво, а при $b_1 + \ln|\gamma| < 0$ — устойчиво.

Отметим, что в случае (6) все решения (33) (при условии (9)) из некоторой достаточно малой и не зависящей от ε окрестности нулевого состояния равновесия стремятся к нулю при $t \to \infty$, а в случае (7) задача о локальной динамике (33), (34) не является локальной. Ниже рассмотрим критический случай, когда параметр $\gamma = \gamma_0$ выбран так, что

$$|\gamma_0| \exp\left(a^{-1} b_1\right) = 1.$$

Рассмотрим отдельно случаи, когда параметр b близок к параметру a и когда близок к параметру $-a$. В первом случае в разделах 4.1 и 4.2 речь пойдет о регулярных решениях, а во-втором случае в разделе 4.3 — о нерегулярных.

4.1. Случай, когда параметр b близок к значению a и параметр γ положителен. В этом разделе полагаем, что выполнено равенство (38) и

$$\gamma > 0 \quad \text{и} \quad f_2 \neq 0.$$

Тогда для каждого целого k выполняется асимптотическое равенство

$$\lambda_k(\varepsilon) = \varepsilon[b_1 + a(\ln\gamma + 2\pi k i)] + O(\varepsilon^2), \tag{40}$$

а собственные функции $v_k(t, x)$, отвечающие корню $\lambda_k(\varepsilon)$, представимы в виде

$$v_k(t, x) = \exp(2\pi i k x + \lambda_k(\varepsilon) t). \tag{41}$$

Рассмотрим регулярные решения краевой задачи (33), (34), то есть положим

$$u(t,x+\varepsilon)=u(t,x)+\varepsilon\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}+O(\varepsilon^2).$$

Через t_1 обозначим «медленное» время $t_1=\varepsilon t$ и произведем замену $u(t,x)=\varepsilon u_1(t_1,x)$. Тогда, отбрасывая слагаемые порядка ε^2, приходим к краевой задаче

$$\frac{\partial u_1}{\partial t_1}=a\frac{\partial u_1}{\partial x}+b_1u_1-f_2u_1^2,\quad u_1(t_1,1)=\gamma u_1(t_1,0). \tag{42}$$

В (42) существует нулевое состояние равновесия $u_1\equiv 0$ и, возможно, ненулевое

$$u_1=u_0(x)=[-f_2b_1^{-1}+c_0\exp(b_1a^{-1}x)]^{-1},\quad c_0=f_2b_1^{-1}(\gamma-1)(\gamma\exp(b_1a^{-1})-1),$$

если выполнены условия $\gamma>0,\gamma\neq 1,-f_2+c_0b_1\exp(b_1a^{-1}x)\neq 0$ для $x\in[0,1]$.

Краевая задача (42) является квазинормальной формой для краевой задачи (33), (34). Это означает, что по ограниченному при $t_1\to\infty, x\in[0,1]$ решению $u_1(t_1,x)$ определяется функция $u(t,x,\varepsilon)=\varepsilon u_1(\varepsilon t,x)$, которая удовлетворяет (33), (34) с точностью до $O(\varepsilon^2)$.

Исследуем поведение всех решений (42) (а значит, и (33), (34)) из некоторой достаточно малой окрестности нулевого состояния равновесия.

Сформулируем простое утверждение.

Лемма 2. *При условии* $\exp(-b_1a^{-1})>\gamma$ $(<\gamma)$ *нулевое состояние равновесия в* (42) *и в* (33), (34) *асимптотически устойчиво (неустойчиво).*

Рассмотрим критический случай, когда $\gamma=\gamma_0$, где

$$\gamma_0=\exp(-b_1a^{-1}), \tag{43}$$

и повторим схему нормализации. Фиксируем произвольно значение b_2 и положим

$$b=a+\varepsilon b_1+\varepsilon^2b_2. \tag{44}$$

Для регулярных решений $u(t,x+\varepsilon)$ учтем в (33) слагаемые порядка ε^2. В результате получаем, что

$$\frac{\partial u_1}{\partial t_1}=a\frac{\partial u_1}{\partial x}+(b_1+\varepsilon b_2)u_1+\frac{1}{2}a\varepsilon\frac{\partial^2u_1}{\partial x^2}+f_2u_1^2+\varepsilon f_3u_1^3,\quad u_1(t_1,1)=\gamma u_1(t_1,0). \tag{45}$$

Линеаризованная в нуле при $\varepsilon=0$ краевая задача имеет вид

$$\frac{\partial u_1}{\partial t_1}=a\frac{\partial u_1}{\partial x}+b_1u_1,\quad u_1(t_1,1)=\gamma u_1(t_1,0). \tag{46}$$

Её характеристическое уравнение

$$(\lambda-b_1)v=a\frac{dv}{dx},\quad v(1)=\gamma v(0), \tag{47}$$

в силу (43), имеет бесконечно много корней $\lambda_k=2\pi kia$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$.

Корню λ_k отвечает собственная функция $v_k(x)=\exp(-b_1a^{-1}x)\exp(\lambda_ka^{-1}x)$. Положим $y=t_1-a^{-1}x$ и $w_k(y)=\exp(\lambda_ky)$. Тогда $v_k(t_1,x)=\exp(-b_1a^{-1}x)\exp(\lambda_ky)=\exp(-b_1a^{-1}x)w_k(y)$.

Поэтому произвольная линейная комбинация функций

$$w(x,y)=\exp(-b_1a^{-1}x)\cdot\sum_{k\to-\infty}^{+\infty}c_kw_k(y)$$

тоже является решением (46).

Опираясь на алгоритм метода построения квазинормальных форм [13, 14, 17, 32], решения нелинейной краевой задачи (45) ищем в виде формального ряда

$$u_1(\tau, x, \varepsilon) = \varepsilon w(\tau, y) \exp(-b_1 a^{-1} x) + \varepsilon^2 U_2(\tau, x, y) + \ldots, \tag{48}$$

где $\tau = \varepsilon t_1$, а по переменной y выполнено условие 1-периодичности.

Подставим (48) в (45) и будем собирать коэффициенты при одинаковых степенях ε. На первом шаге, собирая коэффициенты при нулевой степени ε, получим верное равенство. На следующем шаге соберем коэффициенты при ε^2. В результате получаем соотношение

$$a\frac{\partial U_2}{\partial x} + b_1 U_2 = \varphi(\tau, x, y), \quad U_2(1) = \gamma U_2(0).$$

Здесь

$$\varphi(\tau, x, y) = \Big[-\frac{\partial w}{\partial \tau} + \frac{1}{2}a\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - b_1\frac{\partial w}{\partial y} + (b_1^2(2a)^{-1} + b_2)w\Big] \exp(-b_1 a^{-1} x) + \\ + f_2 w \exp(-2b_1 a^{-1} x). \tag{49}$$

Воспользуемся следующим простым утверждением.

Лемма 3. *Пусть функция $\varphi(x)$ непрерывна. Тогда для разрешимости краевой задачи*

$$a\frac{\partial \psi}{\partial x} + b_1\psi = \varphi(x), \quad \psi(1) = \gamma_0\psi(0) + \alpha$$

в классе непрерывных функций необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\int_0^1 \varphi(s) \exp(b_1 a^{-1} s) ds = a \cdot \alpha\gamma_0. \tag{50}$$

Учитывая в (50) равенство (49), приходим к краевой задаче для определения функции $w(\tau, y)$

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{1}{2}a\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - b_1\frac{\partial w}{\partial y} + (b_1^2(2a)^{-1} + b_2)w + f_2(1-\gamma)b_1^{-1}a_1 w^2, \tag{51}$$

$$w(\tau, y+1) \equiv w(\tau, y). \tag{52}$$

Сформулируем основной результат этого раздела.

Теорема 2. *Пусть краевая задача (51), (52) имеет ограниченное при $\tau \to \infty, y \in [0, 1]$ решение $w_0(\tau, y)$. Тогда функция $u(t_1, x) = \varepsilon^2 w_0(\varepsilon^2 t, y) \exp(-b_1 a^{-1} x)$ удовлетворяет краевой задаче (33), (34) с точностью до $o(\varepsilon^3)$.*

Отметим, что в случае, когда $f_2 = 0$ (или $\gamma = 1$), в (51) вместо квадратичной нелинейности появляется кубическая нелинейность. Важно подчеркнуть, что устойчивым решением краевой задачи (51), (52) может быть только однородное состояние равновесия.

4.2. Случай, когда параметр b близок к a и параметр γ отрицателен. Здесь полагаем, что

$$\gamma < 0. \tag{53}$$

Повторяя построения предыдущего раздела, то есть учитывая формулы (40)–(41), приходим также к краевой задаче (42). При условии (53) у (42) есть только нулевое состояние равновесия. Исследуем его устойчивость.

Лемма 4. *При условии* $\exp(-b_1 a^{-1}) > |\gamma|$ $(< |\gamma|)$ *нулевое состояние равновесия в* (42) *и в* (33), (34) *асимптотически устойчиво (неустойчиво).*

Рассмотрим критический случай, когда

$$|\gamma| = \gamma_0 = \exp(-b_1 a^{-1}). \tag{54}$$

Пусть выполнено равенство (44). Для регулярных решений $u(t, x + \varepsilon)$ учтем в (33) слагаемые порядка ε^2. Тогда снова приходим к краевой задаче (45). Для линеаризованной краевой задачи (46) исследуем характеристическое уравнение (47). Оно, в отличие от предыдущего случая, имеет бесконечно много корней $\lambda_k = \pi i(2k + 1)$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Как и выше, положим $y = t_1 - a^{-1}x$, $w_k(y) = \exp(\lambda_k y)$. Тогда $v_k(t, x) = \exp(-b_1 a^{-1}) w_k(y)$.

Решения нелинейной краевой задачи (45) в случае (53) ищем в виде

$$u_1(\tau, x, y) = \varepsilon^{1/2} w(\tau, y) \exp(-b_1 a^{-1}) + \varepsilon U_2(\tau, x, y) + \varepsilon^{3/2} U_3(\tau, x, y) + \ldots, \tag{55}$$

где $\tau = \varepsilon t_1$, а функция $w(\tau, y)$ имеет структуру

$$w(\tau, y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(\tau) w_k(y).$$

Подставим формальное выражение (55) в (45) и будем собирать коэффициенты при одинаковых степенях ε. На первом шаге, собирая коэффициенты при $\varepsilon^{1/2}$, получим верное равенство. На следующем шаге соберем коэффициенты при первой степени ε. В результате приходим к краевой задаче для нахождения $U_2(\tau, x, y)$:

$$a\frac{\partial U_2}{\partial x} + bU_2 = f_2 \exp(-2b_1 a^{-1} x) w^2(\tau, y), \quad U_2(\tau, 1, y) = \gamma U_2(\tau, 0, y).$$

Отсюда находим, что

$$U_2 = \exp(-b_1 a^{-1} x)\Big[c(\tau, y) + f_2 w^2(\tau, y) \cdot a b_1^{-1}(1 - \exp(-b_1 a^{-1} x))\Big],$$

где

$$c(\tau, y) = a f_2 (b_1(\gamma - 1))^{-1} w^2(\tau, y) |\gamma| (1 - |\gamma|).$$

На третьем шаге получаем уравнение для определения $U_3(\tau, x, y)$. Из условия его разрешимости (согласно лемме 3) получаем краевую задачу для нахождения функции $w(\tau, y)$:

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{1}{2} a \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - b_1 \frac{\partial w}{\partial y} + (b_1^2 (2a)^{-1} + b_2) w + \delta w^3, \tag{56}$$

$$w(\tau, y + 1) \equiv -w(\tau, y), \tag{57}$$

в которой

$$\delta = 2 f_2^2 (b_1^{-2}) \big[2a\gamma(1 + \gamma)^2 + 3a(|\gamma|^3 - 1)\big].$$

Приведем основной результат.

Теорема 3. *Пусть краевая задача* (56), (57) *имеет ограниченное при* $\tau \to \infty, y \in (-\infty, \infty)$ *решение* $w_0(\tau, y)$. *Тогда функция* $u(t_1, x, \varepsilon) = \varepsilon^{3/2} w_0(\varepsilon^2 t_1, t_1 + a^{-1x})$ *удовлетворяет краевой задаче* (33), (34) *с точностью до* $o(\varepsilon^2)$.

Отметим, что краевая задача (56), (57) может иметь неоднородное устойчивое состояние равновесия.

4.3. Случай, когда параметр b близок к параметру $-a$. Пусть для произвольно фиксированного значения b_1 выполнено условие (39). Рассмотрим линеаризованную краевую задачу (35), (36). Ее характеристическое уравнение (37) при условии (39) имеет бесконечно много корней $\lambda_k(\varepsilon)$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, которые стремятся к мнимой оси при $\varepsilon \to 0$. Тем самым реализуется критический случай бесконечной размерности. Корню $\lambda_k(\varepsilon)$ отвечает собственная функция $\varphi_k(t, x, \varepsilon)$, которая асимптотически быстро осциллирует по пространственной переменной x. Это означает, что соответствующие решения имеют нерегулярную структуру.

В (35), (36) полагаем

$$u(t, x) = v(t, x) \exp(i\pi\varepsilon^{-1}x) + \overline{cc}. \tag{58}$$

Учитывая, что $u(t, 1) = v(t, 1) \exp(i\pi N) + \overline{cc}$ и что $\varepsilon = N^{-1}$, получаем равенство

$$v(t, 1) + \overline{v}(t, 1) = \gamma(-1)^N (v(t, 0) + \overline{v}(t, 0)). \tag{59}$$

Тогда для $v(t, x)$ приходим к уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial t} + av = -bv(t, x + \varepsilon). \tag{60}$$

Используя равенство (39), заключаем, что функция $v(t, x)$ является регулярной, то есть

$$v(t, x + \varepsilon) = v(t, x) + \varepsilon \frac{\partial v(t, x)}{\partial t} + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \ldots.$$

Подставим это выражение в (33), (34). Тогда на основании (58) приходим к уравнению

$$\frac{\partial v_1}{\partial t_1} + a\frac{\partial v_1}{\partial x} + b_1 v_1 = \exp(-b_1 a^{-1} x) f_2 \big(v_1 \exp(i\pi\varepsilon^{-1}x) + \overline{cc}\big)^2 \tag{61}$$

с краевым условием (59). Здесь $t_1 = \varepsilon t$, $v = \varepsilon v_1$. Для этой краевой задачи имеет место утверждение, аналогичное лемме 2.

Лемма 5. *При условии* $\exp(-b_1 a^{-1}) > |\gamma|$ $(< |\gamma|)$ *нулевое состояние равновесия в* (61), (59) *и в* (33), (34) *асимптотически устойчиво (неустойчиво).*

Остановимся на рассмотрении критического случая, когда выполнены равенства (54). В этом случае линеаризованная краевая задача (60), (59) имеет бесконечно много периодических по y решений $v_{1k} = \exp(-b_1 a^{-1} x) w_k(y)$, где $y = t_1 - a^{-1}x,\ w_k(y) = \exp(\lambda_k y)$, где $\lambda_k = 2\pi i k a$, если $\gamma(-1)^N > 0$ и $\lambda_k = \pi i a(2k + 1)$, если $\gamma(-1)^N < 0$.

Положим

$$b = -(a + \varepsilon b_1 + \varepsilon^2 b_2) \quad \text{и} \quad \gamma = \gamma_0 + \varepsilon\gamma_1. \tag{62}$$

Рассмотрим вопрос о поведении при условиях (54) и (62) всех решений (33), (34) из некоторой достаточно малой окрестности нулевого состояния равновесия.

Введем в рассмотрение формальное выражение

$$
\begin{aligned}
v(t_1,x) =&\varepsilon\big(w(\tau,y)\exp(-b_1a^{-1}x)\exp(i\pi\varepsilon^{-1}x)+\overline{cc}\big)+\\
&+\varepsilon^2\Big[u_{20}(t,x,y)+\overline{cc}+\exp(i\pi z)u_{21}(t,x,y)+\overline{cc}+\\
&+\exp(2i\pi z)u_{22}(t,x,y)+\overline{cc}+\\
&+\exp(3i\pi z)u_{23}(t,x,y)+\overline{cc}\Big]+\ldots,
\end{aligned}
\tag{63}
$$

где $z=x\varepsilon^{-1}$, $u_1(t_1,x,y)=w(\tau,y)\exp(-b_1a^{-1}x)$, $\tau=\varepsilon t_1$, $w(\tau,y)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}c_k(\tau)w_k(y)$, а по переменной y все функции из (63) периодичны.

Рассмотрим отдельно два случая. В первом из них предполагаем, что

$$
(-1)^N\gamma_0>0, \tag{64}
$$

а во втором случае выполнено неравенство

$$
(-1)^N\gamma_0<0. \tag{65}
$$

4.3.1. Построение асимптотики решений при условии (64). Пусть выполнено условие (64). Подставим (63) в (33), (34) и будем собирать коэффициенты при одинаковых степенях ε. В результате получим равенства

$$
a\frac{\partial u_1}{\partial x}+b_1u_1=0, \tag{66}
$$

$$
2au_{20}=f_2|u_1|^2,\quad 2au_{22}=f_2u_1^2, \tag{67}
$$

$$
\begin{aligned}
&a\frac{\partial u_{21}}{\partial x}+b_1u_{21}=\Big[-(b_2+b_1^2(2a)^{-1})w-\frac{\partial w}{\partial\tau}+\frac{a}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-b_1\frac{\partial w}{\partial y}\Big]\times\\
&\times\exp(-b_1a^{-1}x)+\big[f_2u_{20}+2f_2u_{22}+3f_3\big]\cdot w|w|^2\exp(-3b_1a^{-1}x),
\end{aligned}
\tag{68}
$$

$$
a\frac{\partial u_{23}}{\partial x}+b_1u_{23}=[a^{-1}f_2^2+f_3]u_1^3. \tag{69}
$$

Из граничных условий получаем соотношения

$$
(-1)^N(u_1+\overline{cc})\Big|_{x=1}=\gamma_0(u_1+\overline{cc})\Big|_{x=0}, \tag{70}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Big(u_{20}+\overline{cc}+(-1)^Nu_{21}+\overline{cc}+u_{22}+\overline{cc}+(-1)^Nu_{23}+\overline{cc}\Big)\Big|_{x=1}=\\
&=\gamma_0\Big(u_{20}+\overline{cc}+u_{21}+\overline{cc}+u_{22}+\overline{cc}+u_{23}+\overline{cc}\Big)\Big|_{x=0}+\gamma_1(u_1+\overline{cc})\Big|_{x=0}.
\end{aligned}
\tag{71}
$$

Равенства (66) и (70) выполнены в силу определения u_1. Из (67) и (68) находим, что

$$
u_{20}=(2a)^{-1}f_2|u_1|^2,\quad u_{22}=(2a)^{-1}f_2u_1^2, \tag{72}
$$

а из (69) получаем, что

$$
u_{23}=-(2b_1)^{-1}(f_2^2+af_3)\Big[\exp\Big(-\frac{3b_1}{a}x\Big)-\exp\Big(-\frac{b_1}{a}x\Big)\Big]w^3. \tag{73}
$$

Рассмотрим вопрос о разрешимости относительно $u_{21}(\tau, x, y)$ уравнения (68) с краевым условием (71). Согласно лемме 3, необходимыми и достаточными условиями разрешимости этой краевой задачи является выполнение равенств

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{a}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - b_1\frac{\partial w}{\partial y} + c_1 w + c_2|w|^2 + c_2 w^2 + c_3 w^3 + c_4 w|w|^2, \tag{74}$$

$$w(\tau, y+1) \equiv w(\tau, y), \tag{75}$$

где

$$c_1 = -(b_2 + (2a)^{-1}b_1^2) + a\gamma_0^2\gamma_1,$$

$$c_2 = \frac{1}{2}\gamma_0^2 f_2(1-\gamma_0), \quad c_3 = c_2,$$

$$c_4 = -a(2b_1)^{-1}(f_2^2 + af_3)\gamma_0^2(\gamma_0^2 - 1), \quad c_5 = 3(2b_1)^{-1}a(\gamma_0^2 - 1)\cdot[f_3 + a^{-1}f_2^2].$$

Сформулируем основное утверждение, которое вытекает из приведенного выше алгоритма построения асимптотики решений.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (62) *и* (64)*. Пусть функция* $w(\tau, y)$ *является ограниченным при* $\tau \to \infty$, $y \in [0, 1]$ *решением краевой задачи* (74)*,* (75)*. Тогда функция*

$$\begin{aligned} u(t,x,y) =& \varepsilon\big(w(\tau,y)\exp(-b_1a^{-1}x)\exp(i\pi\varepsilon^{-1}x) + \overline{cc}\big) + \\ &+ \varepsilon^2\Big[u_{20}(t,x,y) + \overline{cc} + \exp(i\pi z)u_{21}(t,x,y) + \overline{cc} + \\ &+ \exp(2i\pi z)u_{22}(t,x,y) + \overline{cc} + \\ &+ \exp(3i\pi z)u_{23}(t,x,y) + \overline{cc}\Big] + \ldots, \end{aligned}$$

удовлетворяет краевой задаче (33)*,* (34) *с точностью до* $O(\varepsilon^4)$*.*

4.3.2. Построение асимптотики решений при условии (65). Пусть выполнено неравенство (65). В этом случае соответствующие построения усложняются. Снова рассмотрим асимптотическое выражение (63), но фигурирующую в нем функцию $u_{21}(\tau, x, y)$ представим в виде суммы двух функций

$$u_{21}(\tau, x, y) = v_1(\tau, x, y) + v_2(\tau, x, y). \tag{76}$$

Первая из них — 1-антипериодическая по y, как и функция $w(\tau, y)$, то есть содержит только гармоники с нечетными номерами $\exp(i\pi(2k+1))$ $(k = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$. Вторая функция — $v_2(\tau, x, y)$ — 1-периодична по y, то есть ее разложение в ряд Фурье содержит только гармоники $\exp(2i\pi k)$ $(k = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$. Подставим (63) с учетом (76) в (33), (34) и произведем стандартные действия. В результате получим равенства (66), (67), (69), (70). Равенства (66), (70) определяют функцию $u_1(\tau, x, y) = w(\tau, y)\exp(-b_1a^{-1}x)$, а из (67) и (69) находим u_{20}, u_{22} и u_{23} согласно формулам (72), (73). Уравнение для v_1 получаем, заменив в левой части уравнения (68) функцию u_{21} и v_1, а уравнение v_2 имеет вид

$$a\frac{\partial v_2}{\partial x} + b_1 v_2 = 0. \tag{77}$$

Основываясь на формуле для краевых условий (71), определим краевые условия для функций v_1 и v_2 :

$$(-1)^N v_1\Big|_{x=1} = -(-1)^N u_{23}\Big|_{x=1} + \Big[\gamma_0 v_1 + \gamma_0 u_{23} + \gamma_0\gamma_1 u_1\Big]\Big|_{x=0}, \tag{78}$$

$$(-1)^N v_2\Big|_{x=1} = -u_{20}\Big|_{x=1} - u_{22}\Big|_{x=1} + \gamma_0\Big[v_2 + u_{20} + u_{22}\Big]\Big|_{x=0}. \tag{79}$$

Из краевой задачи (77), (79) находим, что

$$v_2 = v_2(\tau, x, y) = (2a|\gamma_0|)^{-1} f_2 \gamma_0 (1-\gamma_0) w \Big[\bar{w} - \frac{1}{2} w\Big] \exp(-b_1 a^{-1} x).$$

Для разрешимости краевой задачи (68) (с заменой u_{21} на v_1), (78), как следует из леммы 3, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{a}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - b_1 \frac{\partial w}{\partial y} + c_1 w + c_3 w^3 + c_4 w |w|^2$$

и 1-антипериодические краевые условия

$$w(\tau, y+1) \equiv -w(\tau, y). \tag{80}$$

Сформулируем основной результат

Теорема 5. *Пусть выполнены условия* (62) *и* (65). *Пусть функция* $w(\tau, y)$ *является ограниченным при* $\tau \to \infty$, $y \in [0,1]$ *решением краевой задачи* (74), (75). *Тогда функция*

$$\begin{aligned} u(t,x,y) = &\varepsilon\big(w(\tau,y)\exp(-b_1 a^{-1} x)\exp(i\pi\varepsilon^{-1} x) + \overline{cc}\big) + \\ &+ \varepsilon^2\Big[u_{20}(t,x,y) + \overline{cc} + \exp(i\pi z) u_{21}(t,x,y) + \overline{cc} + \\ &+ \exp(2i\pi z) u_{22}(t,x,y) + \overline{cc} + \\ &+ \exp(3i\pi z) u_{23}(t,x,y) + \overline{cc}\Big] + \ldots, \end{aligned}$$

удовлетворяет краевой задаче (33), (34) *с точностью до* $O(\varepsilon^4)$.

Замечание 1. *Можно рассмотреть задачу, в которой варьируются граничные условия: вместо граничных условий* (3) *выполнено равенство*

$$u_N(t) = \gamma u_M(t),$$

где M $(M < N)$ *— некоторое целое. Наибольший интерес представляет изучение влияния этих граничных условий при достаточно больших значениях* N.

Отметим сначала, что при условии $M \sim \mathrm{const}$ *(при* $\varepsilon \to 0$*) задача о динамике рассматриваемой системы сводится к случаю малого возмущения параметра* γ *в задаче* (33), (34).

Существенные изменения могут происходить в случаях, когда номер M *тоже является достаточно большим. Пусть, например,* $M = \frac{m}{n}N$, *где* m *и* n *— натуральные числа и* $m < n$. *Тогда в граничных условиях* (70), (71) *появляются множители* $\exp(i\pi N)$ *и* $\exp\big(i\pi\frac{m}{n}N\big)$. *Отсюда следует, что при* $\varepsilon \to 0$ $(N \to \infty)$ *возникают порядка* n *различных и чередующихся при* $N \to \infty$ *граничных условий. Тем самым динамические свойства решений описываются при увеличении* N *чередующимися* n *сценариями.*

Выводы

Рассмотрена задача о локальной — в окрестности состояния равновесия — динамике системы N односторонне связанных простейших нелинейных уравнений первого порядка. Выделены критические случаи в задаче об устойчивости состояния равновесия. Показано, что уже при

$N = 2$ может возникнуть критический случай нулевого корня, а при $N = 3$ могут реализоваться критические случаи одного нулевого корня или пары чисто мнимых корней. В этих случаях построены соответствующие нормальные формы и рассмотрены бифуркационные задачи. Приведены построения для произвольного значения N. В разделе 4, который является основным, рассмотрены случаи, когда значение N является достаточно большим, то есть параметр $\varepsilon = N^{-1}$ является достаточно малым. В этом случае от дискретной системы N уравнений осуществлен переход к пространственно-непрерывной задаче.

Определены значения параметров, при которых могут реализоваться критические случаи. Главная особенность состоит в том, что критические случаи имеют бесконечную размерность, то есть бесконечно много корней характеристического уравнения линеаризованной задачи стремятся к мнимой оси при $\varepsilon \to 0$.

Применяя развитый в работах автора [13,14,17,32] метод бесконечномерной нормализации — метод квазинормальных форм — удалось построить специальные нелинейные уравнения в частных производных параболического типа с граничными условиями. Эти краевые задачи не содержат малого параметра, и их нелокальная динамика определяет поведение всех решений исходной системы из достаточно малой окрестности состояния равновесия.

При определенных условиях соответствующие уравнения могут иметь нестандартный вид и содержать как квадратичные, так и кубические нелинейности. Динамика таких краевых задач может быть достаточно сложной (см., например, [33]).

Построена асимптотика главных членов асимптотического представления решений.

Важно отметить, что решения исходной системы могут иметь особую «чувствительность» динамических свойств к изменению малого параметра ε. Это следует из того, что изменение количества (большого) N всего на 1 может существенно менять даже внешний вид соответствующих уравнений с частными производными и менять периодические граничные условия на антипериодические.

Список литературы

1. *Kuznetsov A. P., Kuznetsov S. P., Sataev I. R., Turukina L. V.* About Landau–Hopf scenario in a system of coupled self-oscillators // Physics Letters A. 2013. Vol. 377, no. 45–48. P. 3291–3295. DOI: 10.1016/j.physleta.2013.10.013.
2. *Osipov G. V., Pikovsky A. S., Rosenblum M. G., Kurths J.* Phase synchronization effects in a lattice of nonidentical Rössler oscillators // Phys. Rev. E. 1997. Vol. 55, no. 3. P. 2353–2361. DOI: 10.1103/physreve.55.2353.
3. *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences. Cambridge: Cambridge University Press, 2001. 411 p.
4. *Dodla R., Sen A., Johnston G. L.* Phase-locked patterns and amplitude death in a ring of delay-coupled limit cycle oscillators // Phys. Rev. E. 2004. Vol. 69, no. 5. P. 056217. DOI: 10.1103/PhysRevE.69.056217.
5. *Williams C. R. S., Sorrentino F., Murphy T. E., Roy R.* Synchronization states and multistability in a ring of periodic oscillators: Experimentally variable coupling delays // Chaos. 2013. Vol. 23, no. 4. P. 043117. DOI: 10.1063/1.4829626.
6. *Rao R., Lin Z., Ai X., Wu J.* Synchronization of epidemic systems with Neumann boundary value under delayed impulse // Mathematics. 2022. Vol. 10, no. 12. P. 2064. DOI: 10.3390/math10122064.
7. *Van der Sande G., Soriano M. C., Fischer I., Mirasso C. R.* Dynamics, correlation scaling, and synchronization behavior in rings of delay-coupled oscillators // Phys. Rev. E. 2008. Vol. 77, no. 5. P. 055202. DOI: 10.1103/PhysRevE.77.055202.

8. *Клиньшов В. В., Некоркин В. И.* Синхронизация автоколебательных сетей с запаздывающими связями // УФН. 2013. Т. 183, № 12. С. 1323–1336. DOI: 10.3367/UFNr.0183.201312c.1323.
9. *Heinrich G., Ludwig M., Qian J., Kubala B., Marquardt F.* Collective dynamics in optomechanical arrays // Phys. Rev. Lett. Vol. 107, no. 4. P. 043603. DOI: 10.1103/PhysRevLett.107.043603.
10. *Zhang M., Wiederhecker G. S., Manipatruni S., Barnard A., McEuen P., Lipson M.* Synchronization of micromechanical oscillators using light // Phys. Rev. Lett. 2012. Vol. 109, no. 23. P. 233906. DOI: 10.1103/PhysRevLett.109.233906.
11. *Lee T. E., Sadeghpour H. R.* Quantum synchronization of quantum van der Pol oscillators with trapped ions // Phys. Rev. Lett. 2013. Vol. 111, no. 23. P. 234101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.111. 234101.
12. *Yanchuk S., Wolfrum M.* Instabilities of stationary states in lasers with longdelay optical feedback // SIAM J. Appl. Dyn. Syst. 2012. Vol. 9, no. 2. P. 519–535. DOI: 10.20347/WIAS.PREPRINT.962.
13. *Grigorieva E. V., Haken H., Kashchenko S. A.* Complexity near equilibrium in model of lasers with delayed optoelectronic feedback // In: 1998 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications. NOLTA'98. 14–17 September, 1998, Crans-Montana, Switzerland. NOLTA Society, 1998. P. 495–498.
14. *Kashchenko S. A.* Quasinormal forms for chains of coupled logistic equations with delay // Mathematics. 2022. Vol. 10, no. 15. P. 2648. DOI: 10.3390/math10152648.
15. *Кащенко С. А.* Динамика цепочки логистических уравнений с запаздыванием и с антидиффузионной связью // Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр. 2022. Т. 502, № 1. С. 23–27. DOI: 10.31857/S2686954322010064.
16. *Thompson J. M. T., Stewart H. B.* Nonlinear Dynamics and Chaos. New York: Wiley, 2002. 458 p.
17. *Kashchenko S. A.* Dynamics of advectively coupled Van der Pol equations chain // Chaos. 2021. Vol. 31, no. 3. P. 033147. DOI: 10.1063/5.0040689.
18. *Kanter I., Zigzag M., Englert A., Geissler F., Kinzel W.* Synchronization of unidirectional time delay chaotic networks and the greatest common divisor // Europhysics Letters. 2011. Vol. 93, no. 6. P. 60003. DOI: 10.1209/0295-5075/93/60003.
19. *Rosin D. P., Rontani D., Gauthier D. J., Schöll E.* Control of synchronization patterns in neural-like Boolean networks // Phys. Rev. Lett. 2013. Vol. 110, no. 10. P. 104102. DOI: 10.1103/PhysRevLett. 110.104102.
20. *Yanchuk S., Perlikowski P., Popovych O. V., Tass P. A.* Variability of spatiotemporal patterns in non-homogeneous rings of spiking neurons // Chaos. 2011. Vol. 21, no. 4. P. 047511. DOI: 10.1063/1.3665200.
21. *Klinshov V., Nekorkin V.* Synchronization in networks of pulse oscillators with time-delay coupling // Cybern. Phys. 2012. Vol. 1, no. 2. P. 106–112.
22. *Stankovski T., Pereira T., McClintock P. V. E., Stefanovska A.* Coupling functions: Universal insights into dynamical interaction mechanisms // Rev. Mod. Phys. 2017. Vol. 89, no. 4. P. 045001. DOI: 10.1103/RevModPhys.89.045001.
23. *Klinshov V., Shchapin D., Yanchuk S., Wolfrum M., D'Huys O., Nekorkin V.* Embedding the dynamics of a single delay system into a feed-forward ring // Phys. Rev. E. 2017. Vol. 96, no. 4. P. 042217. DOI: 10.1103/PhysRevE.96.042217.
24. *Караваев А. С., Ишбулатов Ю. М., Киселев А. Р., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д., Миронов С. А., Шварц В. А., Гриднев В. И., Безручко Б. П.* Модель сердечно-сосудистой системы человека с автономным контуром регуляции среднего артериального давления // Физиология человека. 2017. Т. 43, № 1. С. 70–80. DOI: 10.7868/S0131164616060096.
25. *Кащенко А. А.* Зависимость динамики модели связанных осцилляторов от числа осциллято-

ров // Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр. 2021. Т. 501. С. 46–51. DOI: 10.31857/S2686954321060096.
26. *Kashchenko A. A.* Relaxation modes of a system of diffusion coupled oscillators with delay // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2021. Vol. 93, no. 6. P. 105488. DOI: 10.1016/j.cnsns.2020.105488.
27. *Кащенко С. А.* Динамика цепочек из большого числа осцилляторов с односторонней и двусторонней запаздывающими связями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2023. Т. 63, № 10. С. 1617–1636. DOI: 10.31857/S0044466923090107.
28. *Hartman P.* Ordinary Differential Equations. New York: Wiley, 1964. 612 p.
29. *Henry D.* Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations. Berlin: Springer, 1981. 350 p. DOI: 10.1007/BFb0089647.
30. *Kaschenko SA.* Normalization in the systems with small diffusion // Int. J. Bifurc. Chaos. 1996. Vol. 6, no. 6. P. 1093–1109. DOI: 10.1142/S021812749600059X.
31. *Григорьева Е. В., Кащенко С. А.* Локальная динамика модели цепочки лазеров с оптоэлектронной запаздывающей однонаправленной связью // Известия вузов. ПНД. 2022. Т. 30, № 2. С. 189–207. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-2-189-207.
32. *Клиньшов В. В.* Коллективная динамика сетей активных элементов с импульсными связями: Обзор // Известия вузов. ПНД. 2020. Т. 28, № 5. С. 465–490. DOI: 10.18500/0869-6632-2020-28-5-465-490.
33. *Ахромеева Т. С., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А.* Нестационарные структуры и диффузионный хаос. М.: Наука, 1992. 544 с.

References

1. Kuznetsov AP, Kuznetsov SP, Sataev IR, Turukina LV. About Landau–Hopf scenario in a system of coupled self-oscillators. Physics Letters A. 2013;377(45–48):3291–3295. DOI: 10.1016/j.physleta.2013.10.013.
2. Osipov GV, Pikovsky AS, Rosenblum MG, Kurths J. Phase synchronization effects in a lattice of nonidentical Rössler oscillators. Phys. Rev. E. 1997;55(3):2353–2361. DOI: 10.1103/physreve.55.2353.
3. Pikovsky A, Rosenblum M, Kurths J. Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences. Cambridge: Cambridge University Press; 2001. 411 p.
4. Dodla R, Sen A, Johnston GL. Phase-locked patterns and amplitude death in a ring of delay-coupled limit cycle oscillators. Phys. Rev. E. 2004;69(5):056217. DOI: 10.1103/PhysRevE.69.056217.
5. Williams CRS, Sorrentino F, Murphy TE, Roy R. Synchronization states and multistability in a ring of periodic oscillators: Experimentally variable coupling delays. Chaos. 2013;23(4):043117. DOI: 10.1063/1.4829626.
6. Rao R, Lin Z, Ai X, Wu J. Synchronization of epidemic systems with Neumann boundary value under delayed impulse. Mathematics. 2022;10(12):2064. DOI: 10.3390/math10122064.
7. Van der Sande G, Soriano MC, Fischer I, Mirasso CR. Dynamics, correlation scaling, and synchronization behavior in rings of delay-coupled oscillators. Phys. Rev. E. 2008;77(5):055202. DOI: 10.1103/PhysRevE.77.055202.
8. Klinshov VV, Nekorkin VI. Synchronization of delay-coupled oscillator networks. Phys. Usp. 2013;56(12):1217-1229. DOI: 10.3367/UFNe.0183.201312c.1323.
9. Heinrich G, Ludwig M, Qian J, Kubala B, Marquardt F. Collective dynamics in optomechanical arrays. Phys. Rev. Lett. 2011;107(4):043603. DOI: 10.1103/PhysRevLett.107.043603.
10. Zhang M, Wiederhecker GS, Manipatruni S, Barnard A, McEuen P, Lipson M. Synchronization

of micromechanical oscillators using light. Phys. Rev. Lett. 2012;109(23):233906. DOI: 10.1103/PhysRevLett.109.233906.
11. Lee TE, Sadeghpour HR. Quantum synchronization of quantum van der Pol oscillators with trapped ions. Phys. Rev. Lett. 2013;111(23):234101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.111.234101.
12. Yanchuk S, Wolfrum M. Instabilities of stationary states in lasers with long-delay optical feedback. SIAM J. Appl. Dyn. Syst. 2012;9(2):519–535. DOI: 10.20347/WIAS.PREPRINT.962.
13. Grigorieva EV, Haken H, Kashchenko SA. Complexity near equilibrium in model of lasers with delayed optoelectronic feedback. In: 1998 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications. 14–17 September, 1998, Crans-Montana, Switzerland. NOLTA Society; 1998. P. 495–498.
14. Kashchenko SA. Quasinormal forms for chains of coupled logistic equations with delay. Mathematics. 2022;10(15):2648. DOI: 10.3390/math10152648.
15. Kashchenko SA. Dynamics of a chain of logistic equations with delay and antidiffusive coupling. Dokl. Math. 2022;105:18-22. DOI: 10.1134/S1064562422010069.
16. Thompson JMT, Stewart HB. Nonlinear Dynamics and Chaos. New York: Wiley; 2002. 458 p.
17. Kashchenko SA. Dynamics of advectively coupled Van der Pol equations chain. Chaos. 2021;31(3):033147. DOI: 10.1063/5.0040689.
18. Kanter I, Zigzag M, Englert A, Geissler F, Kinzel W. Synchronization of unidirectional time delay chaotic networks and the greatest common divisor. Europhysics Letters. 2011;93(6):60003. DOI: 10.1209/0295-5075/93/60003.
19. Rosin DP, Rontani D, Gauthier DJ, Schöll E. Control of synchronization patterns in neural-like Boolean networks. Phys. Rev. Lett. 2013;110(10):104102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.110.104102.
20. Yanchuk S, Perlikowski P, Popovych OV, Tass PA. Variability of spatiotemporal patterns in non-homogeneous rings of spiking neurons. Chaos. 2011;21(4):047511. DOI: 10.1063/1.3665200.
21. Klinshov V, Nekorkin V. Synchronization in networks of pulse oscillators with time-delay coupling. Cybern. Phys. 2012;1(2):106–112.
22. Stankovski T, Pereira T, McClintock PVE, Stefanovska A. Coupling functions: Universal insights into dynamical interaction mechanisms. Rev. Mod. Phys. 2017;89(4):045001. DOI: 10.1103/RevModPhys.89.045001.
23. Klinshov V, Shchapin D, Yanchuk S, Wolfrum M, D’Huys O, Nekorkin V. Embedding the dynamics of a single delay system into a feed-forward ring. Phys. Rev. E. 2017;96(4):042217. DOI: 10.1103/PhysRevE.96.042217.
24. Karavaev AS, Ishbulatov YuM, Kiselev AR, Ponomarenko VI, Prokhorov MD, Mironov SA, Schwartz VA, Gridnev VI, Bezruchko BP. Model of the human cardiovascular system with an autonomous regulation circuit of mean arterial pressure. Human Physiology. 2017;43(1):70–80. DOI: 10.1134/S0362119716060098.
25. Kashchenko AA. Dependence of the dynamics of a model of coupled oscillators on the number of oscillators. Dokl. Math. 2021;104(3):355–359. DOI: 10.1134/S1064562421060090.
26. Kashchenko AA. Relaxation modes of a system of diffusion coupled oscillators with delay. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2021;93(6):105488. DOI: 10.1016/j.cnsns.2020.105488.
27. Kashchenko SA. Dynamics of chains of many oscillators with unidirectional and bidirectional delay coupling. Comput. Math. and Math. Phys. 2023;63(10):1817–1836. DOI: 10.1134/S0965542523090105.
28. *Hartman P.* Ordinary Differential Equations. New York: Wiley; 1964. 612 p.
29. Henry D. Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations. Berlin: Springer; 1981. 352 p. DOI: 10.1007/BFb0089647.

30. Kaschenko SA. Normalization in the systems with small diffusion. Int. J. Bifurc. Chaos. 1996;6(6): 1093–1109. DOI: 10.1142/S021812749600059X.
31. Grigorieva EV, Kashchenko SA. Local dynamics of a model of a chain of lasers with optoelectronic delayed unidirectional coupling. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2022;30(2): 189–207 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-2-189-207.
32. Klinshov VV. Collective dynamics of networks of active elements with impulsive connections: Review. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2020;28(5):465–490 (in Russian).
33. Akhromeeva TS, Kurdyumov SP, Malinetskii GG, Samarskii AA. Nonstationary Structures and Diffusion Chaos. M.: Nauka; 1992. 544 p.

Кащенко Сергей Александрович — родился в Ярославле (1953), окончил Ярославский государственный университет (1975). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ННГУ (1976) и доктора физико-математических наук в МГУ (1989) в области теории нелинейных колебаний. Профессор, директор объединенного Института математики и компьютерных наук им. А. Н. Колмогорова. Автор монографий «Модели волновой памяти» (совместно с В. В. Майоровым) и «Релаксационные колебания в лазерах» (совместно с Е. В. Григорьевой). Опубликовал более 500 научных работ и 10 монографий. За заслуги в разработке приоритетных направлений науки, создании научной школы, воспитании и подготовке научных кадров в 2020 году награжден почетным званием «Заслуженный деятель науки Российской Федерации». В 2023 году награжден медалью «За вклад в реализацию государственной политики в области образования и научно-технологического развития» Министерства науки и высшего образования Российской Федерации.

Россия, 150003 Ярославль, ул. Советская, 14
Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова
E-mail: kasch@uniyar.ac.ru
ORCID: 0000-0002-8777-4302
AuthorID (eLibrary.Ru): 8238