

Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2026. Т. 34, № 1  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2026;34(1)

Научная статья  
УДК 53.043

DOI: 10.18500/0869-6632-003199  
EDN: LSIHYF

## Синхронизация и десинхронизация в ансамблях мобильных агентов

Е. М. Варварин<sup>✉</sup>, Г. В. Осипов

Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н. И. Лобачевского, Россия

E-mail: ✉ varvarin@unn.ru, grigori.osipov@itmm.unn.ru

Поступила в редакцию 25.06.2025, принята к публикации 7.11.2025,  
опубликована онлайн 13.11.2025, опубликована 30.01.2026

**Аннотация.** Цель настоящего исследования — анализ механизмов влияния и разрушения, а также характеристик синхронного и асинхронного режимов поведения ансамблей (роев) взаимодействующих мобильных агентов, двигающихся согласно хаотическим фазовым траекториям Рёсслера и Лоренца. **Методы.** Одним из основных способов получения синхронной хаотической динамики является эффект хаотической фазовой синхронизации – процесс установления одинаковой усредненной частоты колебаний и ограниченной по модулю разности фаз при наличии достаточно сильной связи. Для моделирования и получения результатов используются различные методы численного интегрирования систем дифференциальных уравнений. **Результаты.** На примере ансамблей взаимодействующих мобильных агентов, траектории движения которых подчиняются системам Рёсслера и Лоренца в хаотических режимах, было рассмотрено влияние различных видов неоднородностей на коллективную динамику. Была продемонстрирована возможность организации последовательного, параллельного движений агентов и организации различных топологических конфигураций роя агентов при определенном выборе структуры неоднородности. Рассмотрена длительность переходных процессов к синхронному режиму в ансамблях мобильных агентов, движущихся по траекториям системы Рёсслера в различных режимах. Кроме того, для случая хаотических аттракторов Рёсслера был предложен способ десинхронизации роя с помощью сильной фазовой расстройки. **Заключение.** В работе продемонстрирована возможность синхронизации и десинхронизации ансамблей мобильных агентов.

**Ключевые слова:** мобильный агент, ансамбль, хаотическая фазовая синхронизация, система Рёсслера, система Лоренца.

**Благодарности.** Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 23-12-00180 (задача синхронизации) и проекта № 0729-2020-0036 Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (задача десинхронизации).

**Для цитирования:** Варварин Е. М., Осипов Г. В. Синхронизация и десинхронизация в ансамблях мобильных агентов // Известия вузов. ПНД. 2026. Т. 34, № 1. С. 68–83. DOI: 10.18500/0869-6632-003199. EDN: LSIHYF

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Synchronization and desynchronization in ensembles of mobile agents

E. M. Varvarin<sup>✉</sup>, G. V. Osipov

National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Russia

E-mail: ✉ varvarin@unn.ru, grosipov@gmail.com

Received 25.06.2025, accepted 7.11.2025, available online 13.11.2025, published 30.01.2026

**Abstract.** The purpose of this work is to analyze the mechanisms of influence and destruction, as well as the characteristics of synchronous and asynchronous modes of behavior of ensembles (swarms) of interacting mobile agents moving according to chaotic phase trajectories of Rössler and Lorenz. *Methods.* One of the main ways to obtain synchronous chaotic dynamics is the effect of chaotic phase synchronization — the process of establishing the same averaged frequency of oscillations and modulo limited phase difference in the presence of sufficiently strong coupling. Numerical integration methods of systems of differential equations are used for modeling and obtaining results. *Results.* In the context of ensembles of interacting mobile agents whose motion trajectories obey the Rössler and Lorenz systems in chaotic regimes, the influence of different types of individualities on collective dynamics was considered. The possibility of organizing sequential and parallel action of agents and various topological configurations of the organization of a swarm of agents when choosing a uniformity structure was demonstrated. The duration of transient processes in a synchronous regime in ensembles of mobile agents moving along the trajectories of the Rössler system in different regimes was considered. In addition, for cases of chaotic Rössler attractors, a method for swarm desynchronization using independent phase tuning was proposed. *Conclusion.* The article demonstrates the ability to synchronize and desynchronize ensembles of mobile agents.

**Keywords:** mobile agent, ensemble, chaotic phase synchronization, Rossler system, Lorenz system.

**Acknowledgements.** This work was supported by RSF grant №23-12-00180 (synchronization task) and project № 0729-2020-0036 of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (desynchronization task).

**For citation:** Varvarin EM, Osipov GV. Synchronization and desynchronization in ensembles of mobile agents. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2026;34(1):68–83. DOI: 10.18500/0869-6632-003199

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Введение

Концепция мобильного агента как динамической единицы, обладающей пространственной свободой и способностью к автономному взаимодействию, стала важной парадигмой в моделировании коллективного поведения [1, 2]. Такие агенты, в отличие от статичных узлов сетей, характеризуются пространственной подвижностью, возможностью создания локальных правил взаимодействия и эмерджентным поведением.

Как показано в [3], мобильность агентов может усиливать синхронизацию в метапопуляциях, создавая коллективные режимы, недостижимые для статичных систем. Приложения включают роевую робототехнику [4], координацию беспилотников [5] и биологическое моделирование [6]. Фундаментальную роль в таких системах играет *импульсная связь*, где взаимодействие происходит дискретно при сближении агентов. Показано, что даже простые импульсно-связанные осцилляторы способны к глобальной синхронизации [7]. Для мобильных агентов эта модель расширена: пространственное движение становится *активным регулятором* синхронных состояний [8, 9].

Развиваются гибридные подходы, комбинирующие метрические (дистанционные) и топологические (выбор соседей) взаимодействия [10]. Как отмечено в [11], пространственное движение агентов может как подавлять, так и усиливать синхронизацию в зависимости от параметров системы.

В первых исследованиях синхронизации хаотических осцилляторов в основном рассматривалась глобальная связь (см., например, [12]), что удобно при моделировании и теоретическом анализе, но слабо соотносится с реальным миром. В последних же исследованиях предпочтение отдается различным нелокальным связям, во многом отражающим реальные наблюдаемые

явления. Условия включения связи между агентами также могут быть совершенно разнообразны: элементы могут взаимодействовать только с теми, которые входят в их поле зрения [13]; при нахождении в заранее определенных зонах пространства [14] или же при нахождении на достаточно близком расстоянии друг к другу [15, 16].

В данной работе рассматривается вариант связи, при котором взаимодействие активируется только при попадании агентов в цилиндр заданного радиуса. Местоположение мобильного агента в трехмерном пространстве определяется фазовой траекторией трехмерной динамической системы, демонстрирующей хаотическое поведение. В силу хаотичности движения агенты рано или поздно оказываются в достаточной близости для того, чтобы связь была активирована. На примере хаотических аттракторов Рёсслера и Лоренца демонстрируется возможность организации последовательного и параллельного движения агентов на основе эффекта хаотической фазовой синхронизации.

## 1. Модель ансамбля

В качестве мобильного агента рассмотрим материальную точку, движущуюся в трехмерном пространстве  $(x, y, z)$  так, что ее траектория полностью совпадает с траекторией поставленного ей в соответствие осциллятора. Обобщенный вид, описывающий поведение ансамбля взаимодействующих частиц, следующий:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = f_x + d_x [\sum_{j=1}^N (x_j - x_i)], \\ \dot{y}_i = f_y + d_y [\sum_{j=1}^N (y_j - y_i)], \\ \dot{z}_i = f_z + d_z [\sum_{j=1}^N (z_j - z_i)]. \end{cases} \quad i = \overline{1, N}, \quad (1)$$

В отсутствие связей ( $d_x = d_y = d_z = 0$ ) динамика отдельного агента может быть как регулярной, так и хаотической. В общем случае все агенты неидентичные.

Связь между  $i$ -м и  $j$ -м агентами включается только при их достаточной близости: тогда, когда агенты оказываются внутри цилиндра радиуса  $R$ :

$$d_k = \begin{cases} d', & (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 < R^2, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (2)$$

где  $k = \{x, y, z\}$ ,  $d' = \text{const}$  — параметр, определяющий силу связи. Введённую таким образом связь при положительном  $d'$  назовём притягивающей, а при отрицательном  $d'$  — отталкивающей. Условие на область взаимодействия агентов может отличаться от условия (2). Это может быть не цилиндр, а, например, сфера, куб, полоса и т. д. Суть в том, что в силу хаотичности аттрактора и довольно большой области в фазовом пространстве, в которой могут оказаться траектории, попадание в область взаимодействия происходит с высокой (при определенных условиях на радиус  $r$  при условии (2) со стопроцентной) вероятностью. Связь между элементами во времени может быть организована тремя способами:

- а) после попадания траекторий в цилиндр связь между осцилляторами не отключается;
- б) связь может быть отключена после того, как какой-то из осцилляторов покинул цилиндр;
- в) связь может действовать только определенное время.

Если не оговорено специально, в работе рассматривается первый вариант.

Целью работы является исследование коллективной динамики ансамблей взаимодействующих агентов, двигающихся по хаотическим траекториям. При когерентной динамике в ансамблях возникает режим хаотической фазовой синхронизации. Для режима хаотической фазовой

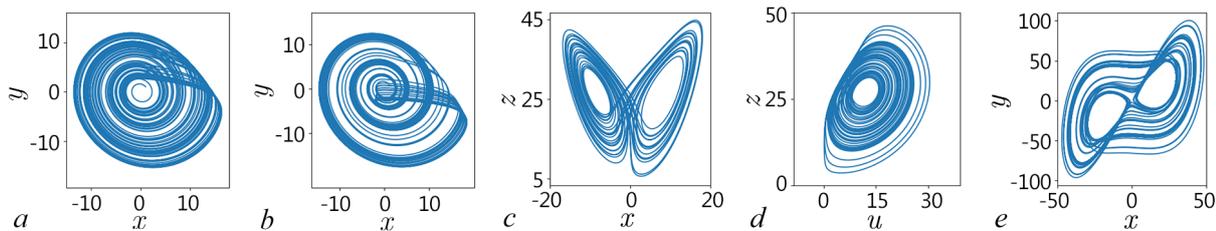


Рис. 1. Проекция хаотических аттракторов. *a* – Проекция на плоскость  $(x, y)$  аттрактора Рёсслера (система (5),  $\omega = 1$ ) в фазо-когерентном режиме ( $a = 0.16$ ,  $b = 0.1$ ,  $c = 8.5$ ); *b* – проекция на плоскость  $(x, y)$  аттрактора Рёсслера в режиме воронки ( $a = 0.22$ ,  $b = 0.1$ ,  $c = 8.5$ ); *c* – проекция на плоскость  $(x, z)$  классического аттрактора Лоренца (система (12) при  $d_y = 0$ ) ( $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$ ,  $r = 28$ ); *d* – проекция классического аттрактора Лоренца на плоскость  $(u = \sqrt{x^2 + y^2}, z)$ ; *e* – проекция на плоскость  $(x, y)$  аттрактора Лоренца, возникающего через перемежаемость  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$ ,  $r = 166.1$

Fig. 1. Projections of chaotic attractors. *a* – projection onto the  $(x, y)$  plane of the Rössler attractor (system (5),  $\omega = 1$ ) in the phase-coherent regime ( $a = 0.16$ ,  $b = 0.1$ ,  $c = 8.5$ ); *b* – projection onto the  $(x, y)$  plane of the Rössler attractor in the funnel regime ( $a = 0.22$ ,  $b = 0.1$ ,  $c = 8.5$ ); *c* – projection onto the  $(x, z)$  plane of the classical Lorenz attractor (system (12) with  $d_y = 0$ ) ( $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$ ,  $r = 28$ ); *d* – projection of the classical Lorenz attractor onto the plane  $(u = \sqrt{x^2 + y^2}, z)$ ; *e* – projection onto the plane  $(x, y)$  of the Lorenz attractor arising through intermittency  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$ ,  $r = 166.1$

синхронизации двух осцилляторов имеет место выполнение двух условий: совпадение средних частот:

$$\Omega_i = \langle \mathbf{v}_i \rangle = \Omega_j = \langle \mathbf{v}_j \rangle \quad (3)$$

и наличие ограниченной разности фаз:

$$\text{const}_1 \leq |\phi_i(t) - \phi_j(t)| \leq \text{const}_2. \quad (4)$$

В ансамблях синхронизация бывает как глобальной, так и кластерной. В первом случае все агенты двигаются по близким траекториям с некоторым интервалом между друг другом. Это обеспечивается наличием фазового сдвига  $\phi_i(t) - \phi_j(t)$ . Во втором случае ансамбли разбиваются на отдельные группы синхронно двигающихся агентов.

В качестве осцилляторов, по траекториям которых двигаются агенты, рассматриваются система Рёсслера и система Лоренца. Напомним, что в системе Рёсслера хаотические колебания возникают в результате каскада бифуркаций удвоения периода предельных циклов. В зависимости от параметров системы хаотический аттрактор бывает фазо-когерентным (phase-coherent) (рис. 1, *a*) или аттрактором-воронкой (funnel) (рис. 1, *b*). В системе Лоренца мы рассматриваем классический аттрактор Лоренца (рис. 1, *c, d*) и хаотический аттрактор, возникающий через перемежаемость (рис. 1, *e*).

## 2. Синхронизация аттракторов Рёсслера

Пусть движение агента происходит по хаотической траектории системы Рёсслера [17]:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = -w_i y_i - z_i, \\ \dot{y}_i = w_i x_i + a y_i, \quad i = \overline{1, N}, \\ \dot{z}_i = b + z_i(x_i - c_i), \end{cases} \quad (5)$$

где  $a, b, c$  – положительные параметры. В последующих экспериментах примем  $a = 0.16$  для фазо-когерентного аттрактора,  $a = 0.22$  и  $a = 0.28$  для аттрактора-воронки,  $b = 0.1$ . Параметр  $w_i$ , выбираемый случайно из интервала  $[0.93; 1.07]$ , характеризует временные масштабы осцилляций.

Параметр  $c_i$ , как будет показано далее, влияет на среднюю амплитуду осциллятора. В нашем исследовании примем  $d' = 0.3, R = 4$ . Значение параметра связи  $d'$  взято таким, что все взаимодействующие хаотические осцилляторы синхронизируются по фазе без введения параметра близости траекторий  $R$  [12, 18].

Параметры системы выбраны так, чтобы при достаточно близких к нулю начальных условиях (в настоящей работе рассматривался куб с длиной ребра 10 с центром в начале координат) фазовые траектории не уходили на бесконечность, а притягивались к хаотическому квазиаттрактору (см, например, [19]). Формально моделирование и указанный бифуркационный сценарий дают только хаотическое множество.

Введём фазу следующим образом:

$$\phi = \arctan \frac{\dot{y}}{\dot{x}}. \quad (6)$$

Тогда формула для вычисления средней частоты примет вид

$$\Omega = \left\langle \frac{\dot{y}\ddot{x} - \ddot{y}\dot{x}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \right\rangle. \quad (7)$$

Формула для вычисления средней амплитуды в проекции фазовой траектории на плоскость  $(x, y)$  следующая:

$$A = \langle (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \rangle. \quad (8)$$

Для подбора типа связи между агентами с целью получения заданного типа их движения было проанализировано влияние параметров  $a$  и  $c$  на амплитуду и среднюю частоту хаотических

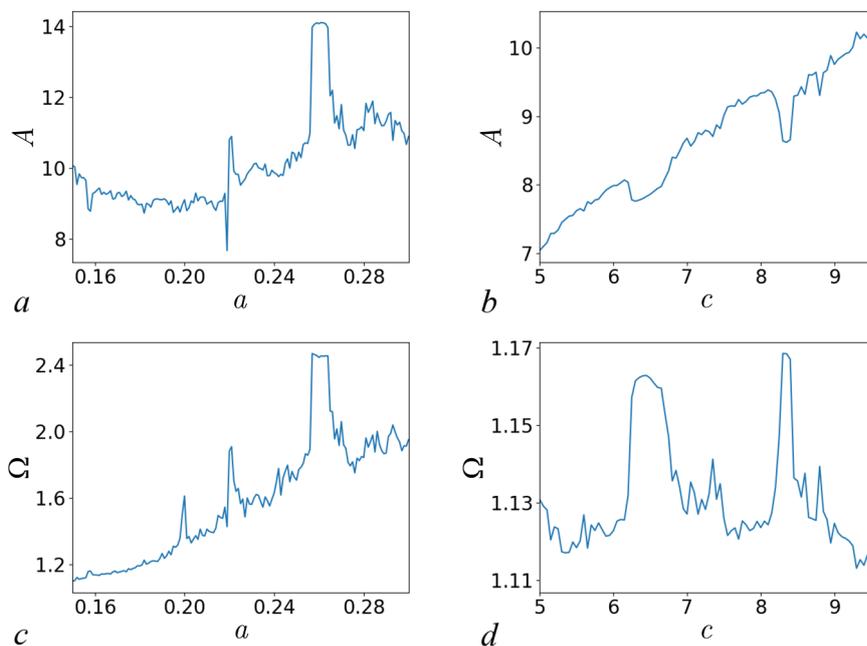


Рис. 2. Средние амплитуды и частоты аттрактора Рёсслера.  $a$  и  $c$  – Зависимости средней амплитуды и средней частоты  $\omega$  от параметра  $a$  (при параметре  $c = 8.5$ ).  $b$  и  $d$  – Зависимость средней амплитуды и средней частоты от параметра  $c$ , аттрактор в фазо-когерентном режиме ( $a = 0.16$ ). Имеют место окна периодического поведения фазовых траекторий

Fig. 2. Average amplitudes and frequencies of the Rössler attractor.  $a$  and  $c$  are the dependences of the average amplitude and average frequency  $\omega$  on the parameter  $a$  (with the parameter  $c = 8.5$ ).  $b$  and  $d$  are the dependences of the average amplitude and average frequency on the parameter  $c$ , the attractor is in the phase-coherent regime ( $a = 0.16$ ). There are windows of periodic behavior of the phase trajectories

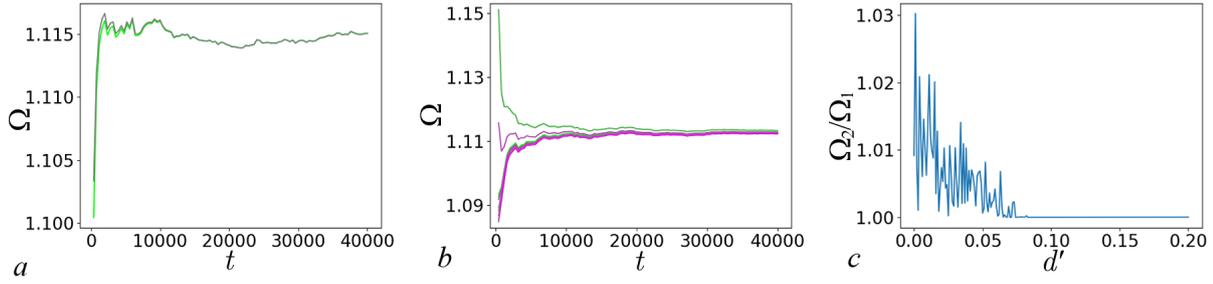


Рис. 3. Эволюция средних частот во времени: *a* — для  $N = 2$  элементов при  $c_1 = 8.5$ ,  $c_2 = 8.501$  и *b* — для  $N = 10$  элементов при  $c_1 = 8.5$ ,  $c_2 = 8.501, \dots, c_{10} = 8.509$  при различных начальных условиях,  $d' = 0.3$ . *c* — Отношение средних частот  $\Omega_2/\Omega_1$  от силы связей для  $N = 2$ . Средние частоты становятся одинаковыми уже при  $d' \approx 0.08$ , что является минимальным необходимым значением силы связи для появления хаотической фазовой синхронизации.  $c_1 = 8.5$ ,  $c_2 = 8.501$ ,  $a = 0.16$  (цвет онлайн)

Fig. 3. Time evolution of average frequencies for *a* —  $N = 2$  elements at  $c_1 = 8.5$ ,  $c_2 = 8.501$  and *b* — for  $N = 10$  elements at  $c_1 = 8.5$ ,  $c_2 = 8.501, \dots, c_{10} = 8.509$  under different initial conditions,  $d' \approx 0.08$ . *c* is the ratio of average frequencies  $\Omega_2/\Omega_1$  on the coupling strength for  $N = 2$ . The average frequencies become the same already at  $d' \approx 0.08$ , which is the minimum required coupling strength for the appearance of chaotic phase synchronization.  $c_1 = 8.5$ ,  $c_2 = 8.501$ ,  $a = 0.16$  (color online)

осцилляций системы (5) (рис. 2). Из рис. 2, *a* можно сделать лишь вывод, что в случае аттрактора-воронки при увеличении параметра  $a$  растет и значение средней амплитуды.

На рис. 2, *b* можно заметить, что по мере увеличения параметра  $c$  средняя амплитуда осциллятора также возрастает. При наличии малой неоднородности по  $c$  выполняется совпадение средних частот для двух и более элементов (условие (3)), что продемонстрировано на рис. 3 *a*, *b* при достаточной силе связи (рис. 3, *c*).

Из рис. 2, *c* видно, что с ростом параметра  $a$  средняя частота осцилляций в системе Рёсслера растет. Следовательно, растёт скорость движения агента. В случае ансамбля связанных агентов увеличение скорости их движения при значениях параметра  $a$  (в экспериментах с ансамблем рассматривались значения  $a = 0.22$  и  $a = 0.28$ ), при которых реализуется аттрактор-воронка, приводит к существенному уменьшению времени переходного процесса к синхронному режиму по сравнению со случаем фазо-когерентного аттрактора ( $a = 0.16$ ). Это нашло подтверждение в экспериментах, описываемых далее.

Рис. 2, *d* демонстрирует слабую зависимость средней частоты  $\Omega$  от параметра  $c$ .

**2.1. Два связанных элемента.** Перед тем как продемонстрировать возможность управления поведением роя мобильных агентов, рассмотрим синхронизацию двух связанных неодинаковых по частотам  $\omega_{1,2}$  и по величинам параметра  $c_{1,2}$  элементов:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -w_1 y_1 - z_1 + d_x(x_2 - x_1), \\ \dot{y}_1 = w_1 x_1 + a y_1 + d_y(y_2 - y_1), \\ \dot{z}_1 = b + z_1(x_1 - c_1) + d_z(z_2 - z_1), \\ \dot{x}_2 = -w_2 y_2 - z_2 + d_x(x_1 - x_2), \\ \dot{y}_2 = w_2 x_2 + a y_2 + d_y(y_1 - y_2), \\ \dot{z}_2 = b + z_2(x_2 - c_2) + d_z(z_1 - z_2). \end{cases} \quad (9)$$

**2.1.1. Последовательное движение.** Последовательным движением двух агентов назовем такое движение, которое в каждый промежуток времени удовлетворяет следующим двум условиям:

- малая разность средних амплитуд:

$$|A_2 - A_1| < \varepsilon; \quad (10)$$

- ненулевая, ограниченная по модулю разность фаз:

$$0 < \text{const}_1 \leq |\phi_2 - \phi_1| \leq \text{const}_2. \quad (11)$$

Для получения последовательного движения добавим в систему из двух элементов связи по переменной  $y$  ( $d_x = d_z = 0$ ) и фазовую расстройку между агентами  $w_{1,2} \in [0.93, 1.07]$ . Начальные условия мобильных агентов различные и случайные в пределах аттрактора. С течением времени в силу хаотичности изображающиеся точки рано или поздно окажутся на расстоянии меньше  $r$ , и при достаточно большом значении силы связи ( $d'$ ) достигается синхронизация, при которой агенты движутся последовательно — друг за другом.

При последовательном варианте следования мобильных агентов временной интервал повторяемости движения может регулироваться с помощью изменения коэффициента связи. При его определенных значениях можно добиться получения такого временного интервала, когда фазовые переменные практически совпадают ( $x_1(t) = x_2(t + \tau), \dots$ ). Этот эффект известен как lag-синхронизация (синхронизация с запаздыванием). При этом временной сдвиг ( $\tau$ ) между состояниями взаимодействующих систем уменьшается в соответствии с гиперболическим законом [20, 21].

Результат численных экспериментов представлен на рис. 4, а. Изображающие точки практически всегда двигаются по одинаковым траекториям, но с ограниченным расстоянием между ними.

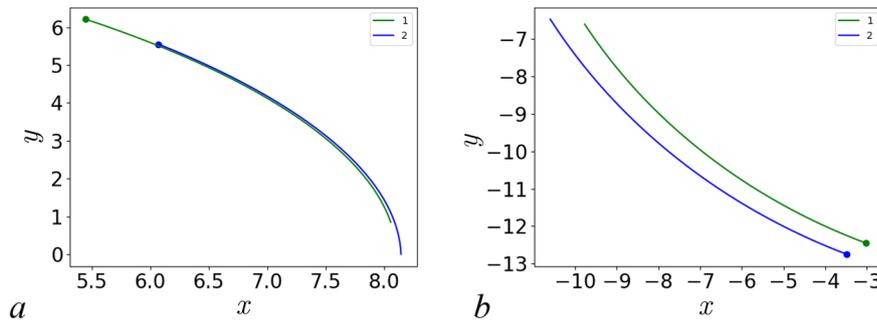


Рис. 4. Фрагмент фазовых портретов двух связанных осцилляторов Рёсслера. *a* — Последовательное движение мобильных агентов,  $c_1 = c_2 = 8.5$ ,  $\omega_1 = 1$ ,  $\omega_2 = 0.94$ . *b* — Параллельное движение мобильных агентов,  $c_1 = 8.5$ ,  $c_2 = 9$ ,  $\omega_1 = \omega_2 = 1$ ,  $d' = 0.3$  (цвет онлайн)

Fig. 4. Fragment of phase portraits of two coupled Rössler oscillators. *a* — sequential motion of mobile agents,  $c_1 = c_2 = 8.5$ ,  $\omega_1 = 1$ ,  $\omega_2 = 0.94$ . *b* — parallel motion of mobile agents,  $c_1 = 8.5$ ,  $c_2 = 9$ ,  $\omega_1 = \omega_2 = 1$ ,  $d' = 0.3$  (color online)

**2.1.2. Параллельное движение.** Параллельным назовем движение двух агентов, удовлетворяющее следующим условиям:

- ограниченная по модулю разность средних амплитуд:

$$\text{const}_1 \leq |A_2 - A_1| \leq \text{const}_2; \quad (12)$$

- малая разность фаз:

$$|\phi_2 - \phi_1| < \varepsilon. \quad (13)$$

Для достижения параллельного движения вместо фазовой расстройки добавим амплитудную расстройку  $c_1 = 8.5, c_2 = 8.51$ , связь по переменной  $y$  ( $d_x = d_z = 0$ ). За счёт разницы в средних амплитудах при достаточной силе связи агенты начинают двигаться с близкими фазами, но разными амплитудами, то есть достигается параллельное движение. Поведение агентов при данной связи проиллюстрировано на рис. 4, *b*.

**2.2. Ансамбль из  $N$  элементов.** В данном разделе мы рассмотрим ансамбль из  $N$  мобильных агентов — аттракторов Рёсслера, описываемых следующими уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = -w_i y_i - z_i + d_x [\sum_{j=1}^N (x_j - x_i)], \\ \dot{y}_i = w_i x_i + a y_i + d_y [\sum_{j=1}^N (y_j - y_i)], \quad i = \overline{1, N}, \\ \dot{z}_i = b + z_i (x_i - c_i) + d_z [\sum_{j=1}^N (z_j - z_i)]. \end{cases} \quad (14)$$

**2.2.1. Последовательное движение.** Рассмотрим коллективное поведение ансамбля из 10 мобильных агентов, движение которых подчиняется хаотической траектории системы Рёсслера — фазо-когерентному аттрактору. Пусть системы Рёсслера связаны только по переменной  $y$  во втором уравнении системы (1), для этого  $d_y$  задаётся выражением (2),  $d_x = 0, d_z = 0$ .

Первые работы по хаотической фазовой синхронизации связанных систем Рёсслера были посвящены анализу систем связанных по переменной  $y$ . Было обнаружено, что пара [12] и цепочка [22] связанных неидентичных систем Рёсслера в хаотическом режиме переходят в синхронный режим при достижении некоторого критического значения параметра связи. В нашем случае связь между элементами включается только тогда, когда фазовые траектории какой-либо пары осцилляторов попадают внутрь цилиндра (2). Так как связь выбрана достаточно большой, то осцилляторы синхронизируются. У них имеет место совпадение средних частот, малая разность амплитуд (10) и ограниченность фазовой расстройки (11) При этом соответствующие мобильные агенты двигаются по близким траекториям на некотором расстоянии друг от друга (рис. 5, *a*) (см. также [23]).

**2.2.2. Параллельное движение.** Для организации параллельного движения ансамбля из  $N$  мобильных агентов, траектории которых подчиняются системе Рёсслера, используем амплитудную расстройку при отсутствии фазовой расстройки, аналогично случаю для двух элементов.

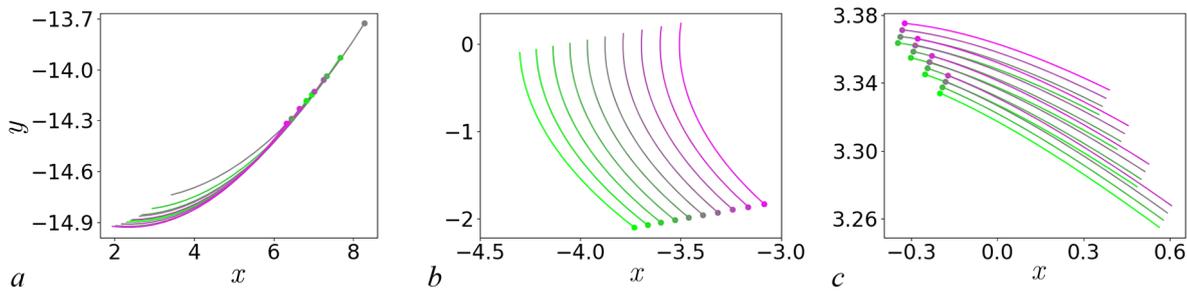


Рис. 5. Синхронизация ансамбля мобильных агентов, связь по переменной  $y$ . *a* — Последовательное движение агентов (друг за другом),  $w_i \in [0.93, 1.07]$ ,  $c_i = 8.5$ ; *b* — параллельное движение агентов (единым фронтом),  $c_1 = 8.5, c_2 = 8.6, c_3 = 8.7, \dots, c_{10} = 9.4$ .  $N = 10, d' = 0.3$ . *c* — Движение в виде структуры «квадрат»  $4 \times 4$  элемента ( $N = 16$ ),  $\forall i \in \{1, 2, \dots, N\} \exists! (w_i, c_i) \in \Omega \times C$  при  $\Omega = [0.9, 0.95, 1.0, 1.05]$ ,  $C = [8.5, 8.51, 8.52, 8.53]$  (цвет онлайн)

Fig. 5. Synchronization of an ensemble of mobile agents, communication by variable  $y$ . *a* — Sequential movement of agents (one after another)  $w_i \in [0.93, 1.07]$ ,  $c_i = 8.5$ ; *b* — parallel movement of agents (as a united front),  $c_1 = 8.5, c_2 = 8.6, c_3 = 8.7, \dots, c_{10} = 9.4$ .  $N = 10, d' = 0.3$ . *c* — Movement in the form of a «square» structure of  $4 \times 4$  elements ( $N = 16$ ),  $\forall i \in \{1, 2, \dots, N\} \exists! (w_i, c_i) \in \Omega \times C$  при  $\Omega = [0.9, 0.95, 1.0, 1.05]$ ,  $C = [8.5, 8.51, 8.52, 8.53]$  (color online)

При достаточной силе связи между элементами и достаточном времени эксперимента выполняется совпадение средних частот (см. рис. 3, *b*), ансамбль агентов движется с близкими фазами, но с разными амплитудами (см. рис. 5).

**2.2.3. Придание рою структуры различных геометрических форм.** Для формирования сложных топологических конфигураций рою агентов, таких как квадрат, прямоугольник, треугольник и др., воспользуемся комбинацией частотной и амплитудной расстроек. Далее, не теряя общности, рассмотрим конфигурацию типа «квадрат» при  $N = 16$  (структура  $4 \times 4$  элемента). В качестве значений параметров  $\omega_i, c_i$  для мобильных агентов выберем все уникальные комбинации наборов

$$\omega = [0.9, 0.95, 1.0, 1.05],$$

$$c = [8.5, 8.501, 8.502, 8.503],$$

то есть

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, N\} \exists! (w_i, c_i) \in \omega \times c.$$

При наличии достаточной силы связи одиночные агенты, в силу хаотичности аттрактора, начинают формировать группы последовательно и параллельно двигающихся агентов. Со временем произойдет объединение кластеров в виде структуры, приведённой на рис. 5 *c*. Нами были также проведены успешные эксперименты по управлению ансамблями мобильных агентов, движения которых подчиняются хаотическим траекториям гиперхаотической системы Рёсслера. В качестве координат положения агентов в трехмерном реальном пространстве можно использовать набор из трех любых фазовых переменных четырехмерной системы Рёсслера.

**2.2.4. Влияние параметров системы на скорость синхронизации рою.** В задачах достижения синхронного режима важную роль играет длительность переходного процесса к этому режиму. Для десяти связанных систем Рёсслера проанализируем влияние двух параметров: параметра  $a$ , характеризующего степень когерентности хаотического аттрактора, и параметра  $\tau$ , который влияет на скорость изменения фазовых переменных.

Рассматриваемая система (5) примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \tau \cdot (-w_i y_i - z_i), \\ \dot{y}_i = \tau \cdot \left( w_i x_i + a_i y_i + d_y \cdot \left[ \sum_{j=1}^N (y_j - y_i) \right] \right), \\ \dot{z}_i = \tau \cdot (b_i + z_i (x_i - c_i)), \end{cases} \quad i = \overline{1, N}, \quad (15)$$

где  $\tau$  — множитель фазовой скорости фазовых переменных.

Для определения момента синхронизации и замера времени воспользуемся условиями (3), (4) и формулами (6), (7). Рассмотрим различные режимы системы Рёсслера: фазо-когерентный ( $a = 0.16$ ), аттрактор-воронка ( $a = 0.22, a = 0.28$ );  $\tau \in \{0.1, 0.5, 1, 2, 5\}$ . Для каждой пары  $(a, \tau)$  проведем 1000 экспериментов при различных случайных начальных условиях, в каждом эксперименте замерим время синхронизации (время интегрирования  $t_{\text{int}} = 500$ , если синхронизация за это время не достигается, добавляем его в последний столбец гистограммы) и по результатам построим гистограмму. Соберем гистограммы в следующую таблицу (рис. 6).

По результатам, приведенным на рис. 6, можно сделать следующие выводы:

- Очевидно, что увеличение параметра  $\tau$  приводит к увеличению скорости синхронизации рою.
- В случае фазо-когерентного аттрактора ( $a = 0.16$ ) синхронизация происходит в среднем значительно медленнее, чем для аттрактора-воронки ( $a = 0.22$  и  $a = 0.28$ ). На рис. 2, *c* представлена зависимость средней частоты  $\Omega$  хаотических осцилляций в зависимости от параметра  $a$ , характеризующего степень когерентности осцилляций. Видно, что с ростом некогерентности (с ростом  $a$ ) имеет место существенное увеличение средней частоты  $\Omega$ .

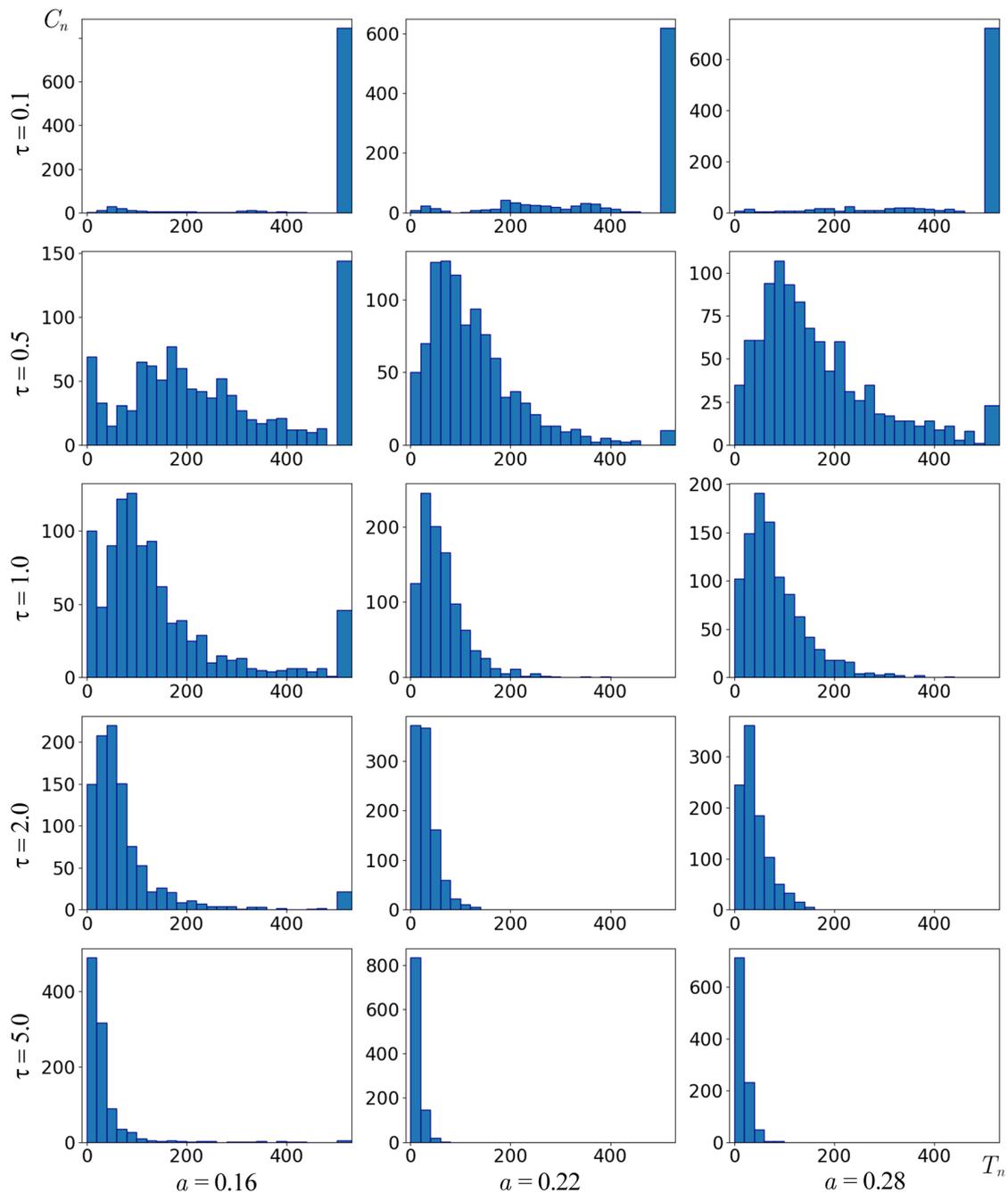


Рис. 6. Синхронизация аттракторов Рёсслера ( $N = 10$ ). Гистограммы зависимости скорости синхронизации ( $T_n$  – время синхронизаций,  $C_n$  – число синхронизаций) для  $n = 1000$  экспериментов при различных  $a$  (столбцы) и  $\tau$  (строки). Во всех экспериментах  $c_i = 8.5$ ,  $d' = 0.3$ ,  $w_i \in [0.93, 1.07]$ . Начальные условия во всех экспериментах случайные

Fig. 6. Synchronization of Rössler attractors ( $N = 10$ ). Histograms of the synchronization rate ( $T_n$  – synchronization time,  $C_n$  – number of synchronizations) for  $n = 1000$  experiments with different  $a$  (columns) и  $\tau$  (rows). In all experiments  $c_i = 8.5$ ,  $d' = 0.3$ ,  $w_i \in [0.93, 1.07]$ . The initial conditions in all experiments are random

Это сказывается на скорости переходных процессов к синхронному режиму. И таким образом, длительность переходных процессов в ансамблях связанных систем Рёсслера с фазо-некогерентным аттрактором значительно меньше по сравнению со случаем тех же систем с фазо-когерентным аттрактором.

### 3. Синхронизация аттракторов Лоренца

Используя связи, описанные выше, попробуем применить те же подходы для синхронизации другого хаотического аттрактора — хаотического аттрактора Лоренца. Динамическая система имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \sigma(y_i - x_i) \\ \dot{y}_i = r_i x_i - y_i - x_i z_i + d_y \cdot [\sum_{j=1}^N (y_j - y_i)], & i = \overline{1, N}, \\ \dot{z}_i = -b z_i + x_i y_i, \end{cases} \quad (16)$$

где  $b = 8/3$ ,  $\sigma = 10$ , значения параметра  $r_i$  будут определяться типом аттрактора Лоренца. Величина параметра связи  $d_y$  определяется согласно условию (2).

Рассмотрим аттракторы Лоренца двух видов:

- Классический аттрактор Лоренца. Для системы из пяти элементов возьмем  $r_i \in [28; 28.1]$ . Для определения фазы воспользуемся следующей формулой:

$$\phi = \arctan \frac{z - z_0}{u - u_0}, \quad (17)$$

где  $u = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $u_0 = 12$  и  $z_0 = 27$ .

- Аттрактор Лоренца, возникающий через перемежаемость (intermittent). В этом случае  $r_i$  равномерно случайно распределены в интервале  $[166.1; 166.2]$

$$\phi(t) = 2\pi \frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n} + 2\pi n, \quad t_n \leq t \leq t_{n+1}, \quad (18)$$

где  $[t_n; t_{n+1}]$  — цикл, состоящий из одной ламинарной и одной турбулентной стадий под номером  $n$ . Подробнее этот подход описан в [24].

Результаты численного моделирования процесса синхронизации для систем Лоренца, демонстрирующие оба типа синхронного по фазе хаотического поведения, представлены на рис. 7. В обоих случаях с течением времени, как и для связанных осцилляторов Рёсслера, сначала наступает кластерная синхронизация, а затем глобальная. Связь подобрана таким образом, что имеет место последовательное движение мобильных агентов. Следует отметить, что переход к режиму глобальной синхронизации происходит в течение короткого времени. В данной постановке реализован режим последовательного движения мобильных агентов.

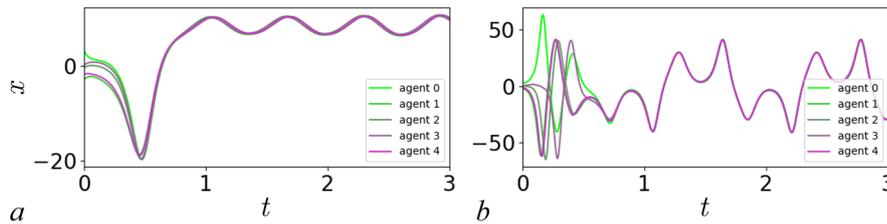


Рис. 7. Синхронизация пяти систем Лоренца. *a* — Синхронизация в случае существования классического аттрактора ( $r_i = [166.1, 166.11, 166.12, 166.13, 166.14]$ ), *b* — синхронизация в случае аттрактора, возникшего через перемежаемость ( $r = [28, 28.05, 28.10, 28.15, 28.20]$ ). Начальные условия для каждого агента генерировались случайно,  $x \in [-5; 5]$ ,  $y \in [-5; 5]$ ,  $z \in [-1; 1]$ .  $d' = 0.2$ , радиус связи  $r = 10$  (цвет онлайн)

Fig. 7. Synchronization of five Lorenz systems. *a* — Synchronization in the case of the classical attractor ( $r_i = [166.1, 166.11, 166.12, 166.13, 166.14]$ ), *b* — synchronization in the case of the attractor that emerged through intermittency ( $r = [28, 28.05, 28.10, 28.15, 28.20]$ ). The initial conditions for each agent were generated randomly,  $x \in [-5; 5]$ ,  $y \in [-5; 5]$ ,  $z \in [-1; 1]$ .  $d' = 0.2$ , the communication radius  $r = 10$  (color online)

#### 4. Десинхронизация роя. Осцилляторная смерть

Если связь между элементами не очень мала, то взаимодействие неидентичного набора элементов может приводить не только к синхронизации, но и к явлению под названием *осцилляторная смерть* (или *подавление колебаний*), при котором колебания полностью подавляются, и система переходит в состояние статического равновесия. Этот эффект возникает при сильной фазовой расстройке и определённых параметрах связи, когда взаимодействие между осцилляторами не синхронизирует, а взаимно гасит их колебания. Явление может быть продемонстрировано для системы (5). Для этого перепишем систему со связью только по переменной  $y$  следующим образом:

$$\dot{y}_i = w_i x_i + (a - Nd_y)y_i + d_y \sum_{j=1}^N y_j. \quad (19)$$

Данная форма позволяет интерпретировать влияние связи как эффект демпфирования. При существенной частотной расстройке сила воздействия других агентов становится нерезонансной и не компенсирует возросшие диссипативные потери. Как следствие, при выполнении условия  $Nd > a$  (в случае синхронизации всех агентов) осциллятор может потерять способность к самовозбуждению, и колебания затухают, что является одним из способов десинхронизации роя, в результате которой все или часть агентов приходят в состояние равновесия  $(0, 0)$ . Ниже представлены временные реализации для осцилляторной смерти при  $N = 10$  (рис. 8).

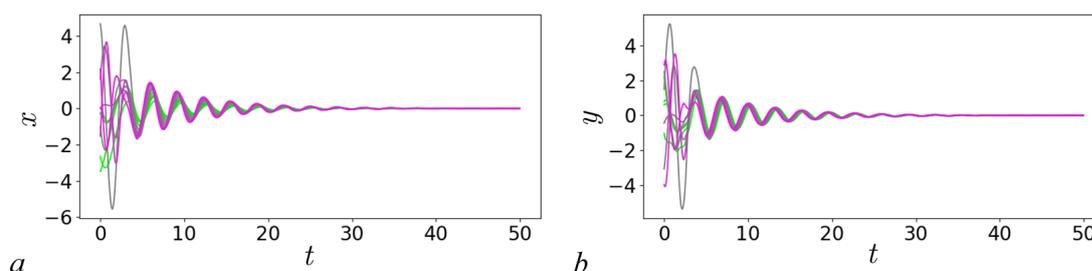


Рис. 8. Осцилляторная смерть для  $N = 10$  связанных аттракторов Рёсслера. Временные реализации  $x(t)$  (a) и  $y(t)$  (b). За довольно короткое время все агенты приходят в состояние равновесия  $(0, 0)$  и остаются в нём.  $d' = 0.3$ ,  $w_1 = 1.0$ ,  $w_2 = 1.2$ , ...,  $w_{10} = 2.8$  (цвет онлайн)

Fig. 8. Oscillatory death for the  $N = 10$  connected Rössler attractor. Time realizations  $x(t)$  (a) and  $y(t)$  (b). In a relatively short time, all agents reach the equilibrium state  $(0, 0)$  and remain there.  $d' = 0.3$ ,  $w_1 = 1.0$ ,  $w_2 = 1.2$ , ...,  $w_{10} = 2.8$  (color online)

#### 5. Анализ влияния нарушения межэлементных связей

В данном разделе мы рассматриваем результаты по надёжности существования заданных геометрических структур ансамблей агентов. То есть определяются зависимости структурной устойчивости ансамбля при удалении из него части агентов. Рассмотрим два способа выбивания агентов из структуры.

1. *Выбивание элементов из центра роя.* Путём численных экспериментов было обнаружено, что при любой структуре роя существует критическое значение числа удалённых агентов, при котором структура разбивается на несколько кластеров. В результате экспериментов на структуре  $10 \times 10$  при удалении 12 элементов уже наступает разделение структуры на два кластера (табл. 1). Интересно отметить, что при определённых условиях появляются уединённые агенты, которые за все время наблюдения не примыкают ни к одному из кластеров.

Таблица 1. Зависимость числа устойчивых кластеров от числа удалённых элементов из ансамбля, имеющего структуру квадрата  $10 \times 10$  элементов. Все элементы удалялись из центра структуры

Table. 1. The number of stable clusters as a function of the number of elements removed from an ensemble with a  $10 \times 10$  square structure. All elements were removed from the center of the structure

Кол-во удалённых элементов	4	8	12	16	24	32	36	44	52	60	64
Кол-во сохранившихся кластеров	1	1	2	2	2	3	3	2	2 и 2 уединённых	3 и 1 уединённый	4

Таблица 2. Зависимость числа устойчивых кластеров от числа удалённых элементов из ансамбля, имеющего структуру квадрата  $10 \times 10$  элементов. Элементы удалялись случайно

Table. 2. Dependence of the number of stable clusters on the number of elements removed from an ensemble with a  $10 \times 10$  square structure. Elements were removed randomly

Кол-во удалённых элементов	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
Кол-во сохранившихся кластеров	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2

2. *Выбивание случайных элементов.* В данном эксперименте элементы удаляются из случайных позиций. Теперь количество объединённых групп агентов зависит не только от числа удалённых элементов, но и от их позиций. Структура связей организована таким образом, что при удалении целой строки агентов глобальная связь ансамбля теряется, и рой разобьётся как минимум на две части — до и после удалённой строки. Результаты представлены в табл. 2. Согласно введённым связям, в результате выбивания случайных элементов число рядов остаётся неизменным, но внутри каждого ряда агенты смыкаются, занимая пространство удалённых элементов.

## Результаты

В результате исследования синхронизации и десинхронизации роя мобильных агентов получено следующее:

- На примере ансамблей взаимодействующих мобильных агентов, траектории движения которых подчиняются системам Рёсслера и Лоренца в хаотических режимах, было рассмотрено влияние различных видов неоднородностей на коллективную динамику при наличии межэлементных связей, в частности, на возникновение синхронных и асинхронных режимов. Была продемонстрирована возможность организации последовательного (друг за другом по цепочке) и параллельного (единым фронтом) движения агентов и организации различных топологических конфигураций роя агентов при определенном выборе структуры неоднородности между элементами. Во всех случаях интервал между агентами может быть изменен в заданную сторону при уменьшении или увеличении силы связи.
- Было показано, что длительность переходных процессов к синхронному режиму в ансамблях мобильных агентов, движущихся по траекториям системы Рёсслера в режиме аттрактора-воронки, существенно меньше по сравнению со случаем фазо-когерентного аттрактора.
- Для случая хаотических аттракторов Рёсслера были предложены и успешно протестированы четыре способа десинхронизации роя: а) при введении дополнительной связи по переменной  $z$  (связь по переменной  $z$  имеет отталкивающий характер), б) при уменьшении межэлементной связи, в) при уменьшении радиуса действия связи и г) при высокой фазовой расстройке и достаточной силе связи.
- Протестирована устойчивость топологических конфигураций роя агентов при удалении агентов двумя различными способами: а) из центра роя и б) случайным образом.

## Список литературы

1. *Liu Y., Bi M., Yuan T., Song J.* Event-triggered consensus tracking for multiple agents with nonlinear dynamics // In: 2018 33rd Youth Academic Annual Conference of Chinese Association of Automation (YAC). 2018, Nanjing, China. P. 1055–1060. DOI: 10.1109/YAC.2018.8406527.
2. *Fujiwara N., Kurths J., Diaz-Guilera A.* Synchronization in networks of mobile oscillators // *Phys. Rev. E.* 2011. Vol. 83. P. 025101. DOI: 10.1103/PhysRevE.83.025101.
3. *Gómez-Gardeñes J., Nicosia V., Sinatra R., Latora V.* Motion-induced synchronization in metapopulations of mobile agents // *Phys. Rev. E.* 2013. Vol. 87. P. 032814. DOI: 10.1103/PhysRevE.87.032814.
4. *Perez-Diaz F., Zillmer R., Groß R.* Control of synchronization regimes in networks of mobile interacting agents // *Phys. Rev. Appl.* 2017. Vol. 7, no. 5. P. 054002. DOI: 10.1103/PhysRevApplied.7.054002.
5. *Wang J., Xu C., Feng J., Chen M.Z., Wang X., Zhao Y.* Synchronization in moving pulse-coupled oscillator networks // *IEEE Trans. Circuits Syst. I.* 2015. Vol. 62, no. 10. P. 2544–2553. DOI: 10.1109/TCSI.2015.2477576.
6. *Uriu K., Ares S., Oates A. C., Morelli L. G.* Dynamics of mobile coupled phase oscillators // *Phys. Rev. E.* 2013. Vol. 87. P. 032911. DOI: 10.1103/PhysRevE.87.032911.
7. *Mirollo R. E., Strogatz S. H.* Synchronization of pulse-coupled biological oscillators // *SIAM J. Appl. Math.* 1990. Vol. 50. P. 1645–1662. DOI: 10.1137/0150098.
8. *Prignano L., Sagarra O., Diaz-Guilera A.* Tuning synchronization of integrate-and-fire oscillators through mobility // *Phys. Rev. Lett.* 2013. Vol. 110. P. 114101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.110.114101.
9. *Janagal L., Parmananda P.* Synchronization in an ensemble of spatially moving oscillators with linear and nonlinear coupling schemes // *Phys. Rev. E.* 2012. Vol. 86. P. 056213. DOI: 10.1103/PhysRevE.86.056213.
10. *Wang L., Chen G.* Synchronization of multi-agent systems with metric-topological interactions // *Chaos.* 2016. Vol. 26, no. 9. P. 094809. DOI: 10.1063/1.4955086.
11. *Sarkar S., Parmananda P.* Synchronization of an ensemble of oscillators regulated by their spatial movement // *Chaos.* 2010. Vol. 20, no. 4. P. 043108. DOI: 10.1063/1.3496399.
12. *Rosenblum M. G., Pikovsky A. S., Kurths J.* Phase synchronization of chaotic oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 1996 Vol. 76, no. 11. P. 1804–1807. DOI: 10.1103/PhysRevLett.76.1804.
13. *Perez-Diaz F., Zillmer R., Groß R.* Firefly-inspired synchronization in swarms of mobile agents // In: Proceedings of the 14th International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems (AAMAS 2015). 4–8 May, 2015, Istanbul, Turkey. P. 279–286.
14. *Kim B., Do Y., Lai Y. C.* Emergence and scaling of synchronization in moving-agent networks with restrictive interactions // *Phys. Rev. E.* 2013. Vol. 88, no. 4. P. 042818. DOI: 10.1103/PhysRevE.88.042818.
15. *Majhi S., Ghosh D., Kurths J.* Emergence of synchronization in multiplex networks of mobile Rössler oscillators // *Phys. Rev. E.* 2019. Vol. 99. P. 012308. DOI: 10.1103/PhysRevE.99.012308.
16. *Wang L., Xue P., Kong Z., Wang X.* Locally and globally exponential synchronization of moving agent networks by adaptive control // *Journal of Applied Mathematics.* 2013. Vol. 2013. P. 241930. DOI: 10.1155/2013/241930.
17. *Левин В. А., Осипов Г. В.* Управление движением группы мобильных роботов // *Письма в ЖТФ.* 2016. Т. 42, № 6. С. 42–48.
18. *Osipov G. V., Hu B., Zhou C., Kurts J.* Three types of transitions to phase synchronization in coupled chaotic oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 2003. Vol. 91, no. 2. P. 024101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.91.024101.

19. *Stankevich N.* Stabilization and complex dynamics initiated by pulsed force in the Rössler system near saddle-node bifurcation // *Nonlinear Dyn.* 2024. Vol. 112. P. 2949–2967. DOI: 10.1007/s11071-023-09183-2.
20. *Rosenblum M. G., Pikovsky A. S., Kurths J.* From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 78. P. 4193–4196. DOI: 10.1103/PhysRevLett.78.4193.
21. *Короновский А. А., Москаленко О. И., Храмов А. Е.* Новый тип универсальности при хаотической синхронизации динамических систем // *Письма в ЖЭТФ* 2004. Т. 80, № 1. С. 25–28.
22. *Osipov G. V., Pikovsky A. S., Rosenblum M. G., Kurths J.* Phase synchronization effects in a lattice of nonidentical Rössler oscillators // *Phys. Rev. E.* 1997. Vol. 55, no. 3. P. 2353–2361. DOI: 10.1103/PhysRevE.55.2353.
23. *Варварин Е. М., Осипов Г. В.* Синхронизация и управление движением ансамбля мобильных агентов // *Письма в ЖТФ* 2024. Т. 50, № 13. С. 39–42. DOI: 10.61011/PJTF.2024.13.58167.19836.
24. *Osipov G. V., Kurths J., Zhou C.* *Synchronization in Oscillatory Networks.* Berlin: Springer, 2007. 370 p. DOI: 10.1007/978-3-540-71269-5.

## References

1. Liu Y, Bi M, Yuan T, Song J. Event-triggered consensus tracking for multiple agents with nonlinear dynamics. In: 2018 33rd Youth Academic Annual Conference of Chinese Association of Automation (YAC), Nanjing, China 2018. P. 1055–1060. DOI: 10.1109/YAC.2018.8406527.
2. Fujiwara N, Kurths J, Diaz-Guilera A. Synchronization in networks of mobile oscillators. *Phys. Rev. E.* 2011;83:025101. DOI: 10.1103/PhysRevE.83.025101.
3. Gómez-Gardeñes J, Nicosia V, Sinatra R, Latora V. Motion-induced synchronization in meta-populations of mobile agents. *Phys. Rev. E.* 2013;87:032814. DOI: 10.1103/PhysRevE.87.032814.
4. Perez-Diaz F, Zillmer R, Groß R. Control of synchronization regimes in networks of mobile interacting agents. *Phys. Rev. Appl.* 2017;7(5):054002. DOI: 10.1103/PhysRevApplied.7.054002.
5. Wang J, Xu C, Feng J, Chen MZ, Wang X, Zhao Y. Synchronization in moving pulse-coupled oscillator networks. *IEEE Trans. Circuits Syst. I.* 2015;62(10):2544–2553. DOI: 10.1109/TCSI.2015.2477576.
6. Uriu K, Ares S, Oates AC, Morelli LG. Dynamics of mobile coupled phase oscillators. *Phys. Rev. E.* 2013;87:032911. DOI: 10.1103/PhysRevE.87.032911.
7. Mirollo RE, Strogatz SH. Synchronization of pulse-coupled biological oscillators. *SIAM J. Appl. Math.* 1990;50:1645–1662. DOI: 10.1137/0150098.
8. Prignano L, Sagarra O, Díaz-Guilera A. Tuning synchronization of integrate-and-fire oscillators through mobility. *Phys. Rev. Lett.* 2013;110:114101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.110.114101.
9. Janagal L, Parmananda P. Synchronization in an ensemble of spatially moving oscillators with linear and nonlinear coupling schemes. *Phys. Rev. E.* 2012;86:056213. DOI: 10.1103/PhysRevE.86.056213.
10. Wang L, Chen G. Synchronization of multi-agent systems with metric-topological interactions. *Chaos.* 2016;26(9):094809. DOI: 10.1063/1.4955086.
11. Sarkar S, Parmananda P. Synchronization of an ensemble of oscillators regulated by their spatial movement. *Chaos.* 2010;20(4):043108. DOI: 10.1063/1.3496399.
12. Rosenblum MG, Pikovsky AS, Kurths J. Phase synchronization of chaotic oscillators. *Phys. Rev. Lett.* 1996;76(11):1804–1807. DOI: 10.1103/PhysRevLett.76.1804.
13. Perez-Diaz F, Zillmer R, Groß R. Firefly-inspired synchronization in swarms of mobile agents. In: *Proceedings of the 14th International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems (AAMAS 2015).* 4–8 May, 2015, Istanbul, Turkey. P. 279–286.
14. Kim B, Do Y, Lai YC. Emergence and scaling of synchronization in moving-agent networks with restrictive interactions. *Phys. Rev. E.* 2013;88(4):042818. DOI: 10.1103/PhysRevE.88.042818.

15. Majhi S, Ghosh D, Kurths J. Emergence of synchronization in multiplex networks of mobile Rössler oscillators. *Phys. Rev. E*. 2019;99:012308. DOI: 10.1103/PhysRevE.99.012308.
16. Wang L, Xue P, Kong Z, Wang X. Locally and globally exponential synchronization of moving agent networks by adaptive control. *Journal of Applied Mathematics*. 2013;2013:241930. DOI: 10.1155/2013/241930.
17. Levin VA, Osipov GV. Controlling the motion of a group of mobile agents. *Tech. Phys. Lett.* 2016;42(3):298–301. DOI: 10.1134/S1063785016030251.
18. Osipov GV, Hu B, Zhou C, Kurths J. Three types of transitions to phase synchronization in coupled chaotic oscillators. *Phys. Rev. Lett.* 2003;91(2):024101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.91.024101.
19. Stankevich N. Stabilization and complex dynamics initiated by pulsed force in the Rössler system near saddle-node bifurcation. *Nonlinear Dyn.* 2024;112:2949–2967. DOI: 10.1007/s11071-023-09183-2.
20. Rosenblum MG, Pikovsky AS, Kurths J. From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators. *Phys. Rev. Lett.* 1997;78:4193–4196. DOI: 10.1103/PhysRevLett.78.4193.
21. Koronovskii AA, Moskalenko OI, Hramov AE. New universality type in chaotic synchronization of dynamic systems. *JETP Lett.* 2004;80(1):20–22. DOI: 10.1134/1.1800207.
22. Osipov GV, Pikovsky AS, Rosenblum MG, Kurths J. Phase synchronization effects in a lattice of nonidentical Rössler oscillators. *Phys. Rev. E*. 1997;55(3):2353–2361. DOI: 10.1103/PhysRevE.55.2353.
23. Varvarin EM, Osipov GV. Synchronization and motion control of an ensemble of mobile agents. *Tech. Phys. Lett.* 2024;50(13):39–42 (in Russian). DOI: 10.61011/TPL.2024.07.58724.19836.
24. Osipov GV, Kurths J, Zhou C. *Synchronization in Oscillatory Networks*. Berlin: Springer; 2007. 370 p. DOI: 10.1007/978-3-540-71269-5.



*Варварин Евгений Михайлович* — лаборант кафедры теории управления и динамики систем, студент второго курса магистратуры по направлению «Прикладная математика и информатика» ИИТММ ННГУ им. Н. И. Лобачевского. Основные научные интересы лежат в области теории колебаний и волн.

Россия, 603022 Нижний Новгород, проспект Гагарина, 23к2  
 Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского  
 E-mail: varvarin@unn.ru  
 ORCID: 0009-0002-5516-0020  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 1297427



*Осипов Григорий Владимирович* — родился в Горьком (1960). Окончил Горьковский государственный университет им. Н. И. Лобачевского (1982). Защитил диссертацию по математическому моделированию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в Научном совете по комплексной проблеме «Кибернетика» АН СССР (1988, Москва) и доктора физико-математических наук по радиопрофизике (2004, ННГУ). С 1988 года работает в ННГУ, с 2007 года — в качестве заведующего кафедрой теории управления и динамики систем. Соавтор монографий «Устойчивость. Структуры и хаос в нелинейных сетях синхронизации» и «Synchronization in oscillatory networks». Опубликовал более 270 научных статей (в том числе 2 обзора) по теории колебаний и волн и математическому моделированию.

Россия, 603022 Нижний Новгород, проспект Гагарина, 23к2  
 Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского  
 E-mail: grosipov@gmail.com  
 ORCID: 0000-0003-2841-8399  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 19695