Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2026. Т. 34, № 2
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2026;34(2)

Научная статья DOI: 10.18500/0869-6632-003208
УДК 517.929.7 EDN: RIFMQY

Об асимптотической устойчивости по выходу для систем с запаздыванием

Н. О. Седова

Ульяновский государственный университет, Россия
E-mail: ✉sedovano@ulsu.ru

Поступила в редакцию 22.09.2025, принята к публикации 25.12.2025, опубликована онлайн 27.12.2025, опубликована 31.03.2026

Аннотация. *Цель* настоящего исследования — получить достаточные условия асимптотической устойчивости по выходу для нелинейных неавтономных систем с запаздыванием, описываемых уравнениями с обыкновенными производными. Отдельно рассматривается равномерная и неравномерная асимптотическая устойчивость по выходу; в отличие от классической асимптотической устойчивости по Ляпунову, эти свойства в общем случае не равносильны даже для автономной системы. *Методы.* Исследуются возможности прямого метода Ляпунова для формулировки достаточных условий асимптотической устойчивости по выходу для нелинейных систем с запаздыванием. На примере наиболее хорошо изученной задачи по части переменных анализируются известные результаты об асимптотической устойчивости по выходу для систем с запаздыванием в терминах функций и функционалов Ляпунова, обсуждаются отличия требований к вспомогательным конструкциям по сравнению с достаточными условиями классической асимптотической устойчивости, а также условия, обеспечивающие равномерность сходимости. *Результаты.* Представлены новые результаты об асимптотической устойчивости и равномерной асимптотической устойчивости по выходу для неавтономной системы с запаздыванием в терминах функции Ляпунова–Разумихина, от которой не требуется знакоопределенность по выходу. *Заключение.* Сформулированы новые достаточные условия асимптотической устойчивости по выходу для нелинейных неавтономных систем с запаздыванием. В терминах функций Ляпунова–Разумихина получены условия простой и равномерной асимптотической устойчивости по выходу. При этом требования к этим функциям и к правой части системы менее строгие по сравнению с известными подобными результатами, что расширяет возможности применения метода к исследованию конкретных систем.

Ключевые слова: нелинейная неавтономная динамическая система с запаздыванием, асимптотическая устойчивость по выходу, прямой метод Ляпунова, условия Разумихина.

Для цитирования: *Седова Н. О.* Об асимптотической устойчивости по выходу для систем с запаздыванием // Известия вузов. ПНД. 2026. Т. 34, № 2. С. 183–205. DOI: 10.18500/0869-6632-003208. EDN: RIFMQY

Article DOI: 10.18500/0869-6632-003208

On asymptotic output stability for delay differential systems

N. O. Sedova

Ulyanovsk State University, Russia
E-mail: ✉sedovano@ulsu.ru
Received 22.09.2025, accepted 25.12.2025,
available online 27.12.2025, published 31.03.2026

Abstract. The *purpose* of this study is to obtain sufficient conditions for output asymptotic stability of nonlinear nonautonomous time-delay systems described by ordinary differential equations. Both uniform and non-uniform output asymptotic stability are considered separately — unlike classical Lyapunov asymptotic stability, these two properties are not equivalent in general, even for autonomous systems. *Methods.* This work investigates the capabilities of Lyapunov's direct method in formulating sufficient conditions for output asymptotic stability of nonlinear time-delay systems. Using the well-studied problem of partial stability as an example, known results on output asymptotic stability for time-delay systems are analyzed in terms of Lyapunov functions and Lyapunov–Krasovskii functionals. The differences in requirements for auxiliary constructions compared to sufficient conditions for classical asymptotic stability are discussed, as well as conditions ensuring uniform convergence. *Results.* New results on output asymptotic stability and uniform output asymptotic stability for nonautonomous time-delay systems are presented in terms of a Lyapunov–Razumikhin function, which is not required to be sign-definite with respect to the output. *Conclusion.* New sufficient conditions for output asymptotic stability of nonlinear nonautonomous time-delay systems are formulated. Conditions for both non-uniform and uniform output asymptotic stability are obtained in terms of Lyapunov–Razumikhin functions. The requirements imposed on these functions as well as on the right-hand side of the system are less restrictive than those in known similar results, thus expanding the applicability of the method to the analysis of specific systems.

Keywords: nonlinear nonautonomous time-delay dynamical system, output asymptotic stability, Lyapunov's direct method, Razumikhin conditions.

For citation: Sedova NO. On asymptotic output stability for delay differential systems. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2026;34(2):183–205. DOI: 10.18500/0869-6632-003208

Введение

Классическое определение устойчивости по Ляпунову в последние десятилетия было дополнено рядом обобщений, отражающих важные для приложений свойства. Одним из таких обобщений является устойчивость по выходу. Задача об устойчивости по выходу (и ее частные случаи) была сформулирована и исследована изначально для конечномерных систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями [1], см. также ссылки в [2].

Однако, как и другие задачи анализа динамических систем, эта задача актуальна и для бесконечномерных систем, в частности, описываемых дифференциальными уравнениями с запаздыванием. Такие уравнения в последние десятилетия широко используются в качестве математических моделей разнообразных процессов [3–5].

В статье рассматривается задача асимптотической устойчивости по выходу для нелинейной неавтономной системы с запаздыванием. Основные предположения, используемые обозначения и определения приведены в разделе 1.

Широко известным частным случаем устойчивости по выходу является устойчивость по части переменных [6, 7]. Такая постановка особенно актуальна при проектировании систем управления и наблюдения: например, в случае адаптивного управления состояние замкнутой системы включает как состояние управляемого объекта (которое требуется привести к началу координат), так и вектор ошибок оценки параметров (который может, вообще говоря, к нулю не сходиться);

при проектировании наблюдателя, напротив, малой должна быть ошибка наблюдения, при этом к состоянию может никаких требований не предъявляться.

Известно, что для автономной системы асимптотическая устойчивость по Ляпунову является равномерной (относительно как отклонения от начала координат, так и момента этого отклонения); это справедливо как для обыкновенных, так и для функционально-дифференциальных уравнений [8]. Возникает вопрос: сохраняется ли это свойство для асимптотической устойчивости по выходу.

Ответ на этот вопрос имеет практическое значение. Неравномерность сходимости может приводить к произвольно позднему возникновению переходных процессов и перерегулирования, а также снижать робастность системы.

Для нелинейных систем этот вопрос оказался нетривиальным; например, вслед за результатами о равномерной асимптотической устойчивости по части переменных, представляющими естественное обобщение достаточных условий равномерной асимптотической устойчивости по всем переменным, появляются обсуждения и контрпримеры [9–11]. Эти и другие известные результаты, обсуждаемые в разделе 2, получены с применением прямого метода Ляпунова, который остается основным методом анализа качественных свойств решений нелинейных динамических систем.

Применение этого метода к системам с запаздыванием требует адаптации: либо используется функционал Ляпунова–Красовского [8], либо оценивается производная обычной функции Ляпунова при выполнении специального ограничения [12, 13]. В последнем случае говорят, что функция удовлетворяет так называемому условию Разумихина (этот термин используется, строго говоря, для обозначения не одного условия, а любого ограничения определенного типа; сама же вспомогательная функция при этом часто называется функцией Ляпунова–Разумихина). В англоязычной литературе довольно распространенным является альтернативный подход на основе неравенств типа Халаная (см., например, [9]), которые позволяют не только утверждать факт сходимости решений, но и оценивать скорость этой сходимости. Отметим, что выполнение неравенства Халаная для функции влечет за собой выполнение классического условия Разумихина (см. подробное обсуждение в [14]).

В разделе 3 предлагаются новые достаточные условия асимптотической устойчивости по выходу, сформулированные в терминах функций Ляпунова–Разумихина для изучаемой системы, в том числе обеспечивающие равномерность этой устойчивости. Обсуждение полученных результатов и иллюстративные примеры представлены в заключительном разделе.

1. Основные обозначения, определения и предположения

Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение запаздывающего типа:

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \tag{1}$$

$$y(t) = h(x_t). \tag{2}$$

Здесь и далее используем следующие стандартные обозначения: $R^+ = [0, +\infty)$, R^n — n-мерное пространство векторов $x = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ с нормой $|x|$, $C^n = C([-r, 0], R^n)$ — банахово пространство с нормой $\|\varphi\| = \max_{-r \leqslant s \leqslant 0} |\varphi(s)|$, $r{>}0$ — величина запаздывания, $C_q^n = \{\varphi \in C^n : \|\varphi\| < q\}$, $q > 0$. Для непрерывной функции $x(t) \in C([t_0 - r, t_0 + T), R^n)$ ($t_0 \in R^+$, $T > 0$) элемент $x_t \in C^n$ определяется для любого $t \in [t_0, t_0 + T)$ формулой $x_t(s) = x(t + s)$, $-r \leqslant s \leqslant 0$, $\dot{x}(t)$ обозначает правостороннюю производную функции $x(t)$ в точке t.

Если не оговорено иное, считаем выполненными следующие предположения относительно правой части уравнения (1).

Предложение 1. *Функционал f непрерывен, и $f(t,0)=0$ для всех $t\in R^+$.*

Предложение 2. *Для каждого $q>0$ существует $l=l(q)>0$ такое, что для всех $\varphi_1,\varphi_2\in\bar{C}^n_q$ и $t\in R^+$ выполняется неравенство $|f(t,\varphi_2)-f(t,\varphi_1)|\leqslant l\|\varphi_2-\varphi_1\|$.*

Заметим, что эти предположения гарантируют ограниченность функционала $f(t,\varphi)$ на множествах вида $R^+\times\bar{C}^n_q$ $(q>0)$.

Предполагаем также, что функционал $h: C^n\to R^m$ $(m\leqslant n)$ в (2) липшицев на ограниченных множествах и $h(0)=0$. Решение с начальным значением $t_0\in R^+$ и начальной функцией $x_0\in C^n$ обозначим $x(t;t_0,x_0)$, а соответствующий выход — $y(t;t_0,x_0)=h(x_t(t_0,x_0))$.

Наконец, будем использовать традиционные обозначения для непрерывных функций с некоторыми дополнительными свойствами.

Определение 1.

- *Функция $\alpha\in C(R^+,R^+)$ принадлежит классу $\mathcal{P}$, если $\alpha(0)=0$ и $\alpha(s)>0$ для всех $s>0$.*
- *Функция $\alpha\in C(R^+,R^+)$ принадлежит классу $\mathcal{K}$, если $\alpha\in\mathcal{P}$ и является возрастающей.*
- *Функция $\alpha\in C(R^+,R^+)$ принадлежит классу $\mathcal{K}_\infty$, если $\alpha\in\mathcal{K}$ и $\lim_{s\to+\infty}\alpha(s)=+\infty$.*
- *Функция $\beta\in C(R^+\times R^+,R^+)$ принадлежит классу $\mathcal{K}L$, если $\beta(\cdot,t)\in\mathcal{K}$ для каждого фиксированного $t\in R^+$ и для каждого фиксированного $s\in R^+$ функция $\beta(s,\cdot)$ не возрастает и $\lim_{t\to+\infty}\beta(s,t)=0$.*

Для систем с запаздыванием определение глобальной асимптотической устойчивости по выходу было введено (для случая правой части, не зависящей от времени) в [15].

Определение 2. *Система (1)–(2) называется равномерно асимптотически устойчивой по выходу, если существуют $\rho>0$ и функция $\beta\in\mathcal{K}L$ такие, что для всех $\varphi_0\in C^n_\rho$, $t_0\in R^+$ выполняется условие*

$$|y(t;t_0,\varphi_0)|\leqslant\beta(\|\varphi_0\|,t-t_0)\quad\forall t\geqslant t_0. \tag{$*$}$$

Если при этом неравенство $(*)$ выполняется для любого $\rho>0$, то система называется глобально равномерно асимптотически устойчивой по выходу.

Такая устойчивость эквивалентна комбинации двух свойств.

1. Равномерная устойчивость по выходу: для каждого $\varepsilon>0$ найдется $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для любой начальной точки $(t_0,\varphi_0)\in R^+\times C^n$, удовлетворяющей неравенству $\|\varphi_0\|<\delta$, выполняется условие $|y(t;t_0,\varphi_0)|<\varepsilon$ для всех $t\geqslant t_0$.

2. Равномерное притяжение по выходу: существует $\rho>0$ такое, что для любых $\varepsilon>0$, $\rho_1\in(0,\rho)$ найдется значение $T=T(\varepsilon,\rho_1)>0$, обладающее свойством: для всех $\varphi_0\in C^n_{\rho_1}$, $t_0\in R^+$ и $t\geqslant t_0+T$ выполняется неравенство $|y(t;t_0,\varphi_0)|<\varepsilon$.

Если в определении равномерного притяжения по выходу число $\rho>0$ может быть выбрано произвольным, то говорят о глобальном равномерном притяжении по выходу. Наконец, глобальная равномерная асимптотическая устойчивость по выходу, согласно определению 2, означает глобальное равномерное притяжение по выходу в сочетании с глобальной равномерной устойчивостью по выходу: существует функция $\gamma\in\mathcal{K}$ такая, что для всех $\varphi_0\in C^n$, $t_0\in R^+$ $\|y(t;t_0,\varphi_0)\|\leqslant\gamma(\|\varphi_0\|),\quad\forall t\geqslant 0.$

Для обыкновенных дифференциальных уравнений понятия устойчивости по выходу были рассмотрены в [1,16] в рамках задачи устойчивости от входа к состоянию (ISS). Похожее свойство в более общей постановке было изучено в исследованиях устойчивости по двум мерам [17,18]. К устойчивости по выходу также можно свести задачу практической устойчивости (полагая $y(t)=\max\{|x(t)|-r,0\}$) и задачу устойчивости компактного множества, которым также посвящены обширные исследования. Очевидно, что равномерная асимптотическая устойчивость по выходу сводится к классической равномерной асимптотической устойчивости нулевого решения в случае $h(x_t) = x(t)$.

В некоторых приложениях рассматриваемый выход зависит только от текущего значения решения, а именно $h(x_t) = h_0(x(t))$ для некоторого непрерывного отображения $h_0 : R^n \to R^p$. В более общем случае можно использовать следующее понятие, введенное в [15, Определение 3.8].

Определение 3. *Предположим, что существует непрерывное отображение $h_0 : R^n \to R^p$ такое, что $h_0(0) = 0$, и $\alpha, \overline{\alpha} \in \mathcal{K}_\infty$ такие, что для всех $\varphi \in C^n$,*

$$\alpha(|h_0(\varphi(0))|) \leqslant \|h(\varphi)\| \leqslant \overline{\alpha}\left(\sup_{\tau\in[-\Delta,0]} |h_0(\varphi(\tau))|\right).$$

Тогда $h : C^n \to R^p$ называется эквивалентным конечномерному отображению h_0.

Заметим, что равномерная асимптотическая устойчивость по выходу является более сильным требованием по сравнению с обычной (неравномерной) асимптотической устойчивостью по выходу, которая гарантирует такие свойства (не предполагающие равномерности оценок выхода относительно начальных условий).

1. (Устойчивость по выходу) для каждого $\varepsilon > 0$ и $t_0 \in R^+$ найдется $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$ такое, что для любой начальной функции $\varphi_0 \in C^n$, удовлетворяющей неравенству $\|\varphi_0\| < \delta$, выполняется условие $|y(t; t_0, \varphi_0)| < \varepsilon$ для всех $t \geqslant t_0$.
2. (Притяжение по выходу) существует $r > 0$ такое, что для любых $\varphi_0 \in \bar{C}^n_r$, $t_0 \in R^+$

$$\lim_{t\to+\infty} y(t; t_0, \varphi_0) = 0.$$

По аналогии с определениями свойств устойчивости нулевого решения по Ляпунову можно также определить свойство *эквиасимптотической устойчивости по выходу* как «промежуточное» между простой асимптотической устойчивостью и равномерной асимптотической устойчивостью по выходу: система устойчива по выходу (не обязательно равномерно), а сходимость выхода равномерна относительно начальных точек (но не относительно начального момента времени), то есть $T = T(t_0, \varepsilon, \rho_1)$ в определении 2 (см., например, [19]).

Для автономной системы (1) глобальная равномерная асимптотическая устойчивость нулевого решения эквивалентна глобальной асимптотической устойчивости. Это следует из того, что глобальная устойчивость гарантирует равномерную ограниченность решений, что влечет равномерность глобальной сходимости [15] (равномерность локальной асимптотической устойчивости для автономных систем с запаздыванием была обоснована Н. Н. Красовским [8]).

2. Асимптотическая устойчивость по части переменных: известные результаты и примеры

При формулировке различных определений устойчивости, а также ограничений на функции (или функционалы) Ляпунова, гарантирующих тот или иной вид устойчивости, удобно использовать функции из стандартных классов (см. определение 1). При этом в качестве аргументов этих функций используется та или иная норма, определяемая состоянием системы.

Основной вопрос при формулировке требований к функциям Ляпунова, достаточных для определенного вида устойчивости по выходу, связан с допустимостью оценок, зависящих от выхода, а не от полного состояния системы.

Обсуждаемые ниже результаты касаются главным образом систем с запаздыванием. Однако многие из них являются обобщениями соответствующих результатов для обыкновенных дифференциальных уравнений; более того, рассматриваемый далее пример 1 запаздывания не содержит (хотя и приведен его авторами как опровержение справедливости утверждения для систем с запаздыванием). Поэтому следствия из приведенных далее утверждений для обыкновенных дифференциальных уравнений также могут представлять интерес.

Сначала обратимся к аналогу классической теоремы Ляпунова о равномерной асимптотической устойчивости, впервые доказанному Н. Н. Красовским [8]; в сделанных предположениях относительно системы (1) его можно сформулировать следующим образом (см. [3, 9, 19]).

Теорема 1. *Если для системы* (1) *существует функционал* $V \in C(R^+ \times C^n, R^+)$ *и функции* $\alpha, \underline{\alpha}, \overline{\alpha} \in \mathcal{K}$ *такие, что на множестве* $R^+ \times C^n$ *выполнены условия*

$$\underline{\alpha}(|\varphi(0)|) \leqslant V(t, \varphi) \leqslant \overline{\alpha}(\|\varphi\|),$$

$$\dot{V}(t, \varphi) \leqslant -\alpha(|\varphi(0)|),$$

то нулевое решение системы (1) *равномерно асимптотически устойчиво.*

В этой теореме наличие запаздывания учитывается за счет использования вместо функции функционала, определенного в том же функциональном пространстве, что и правая часть уравнения. Здесь $\dot{V}$ обозначает производную функционала в силу уравнения (1); на практике используемые функционалы часто являются инвариантно дифференцируемыми [20], и тогда эта производная непрерывна, в общем случае (для функционала, удовлетворяющего локальному условию Липшица по второму аргументу) используется верхняя правосторонняя производная (производная Дини) [21].

Заметим, что в теореме 1 для оценки функционала и его производной используются функции, зависящие либо от текущего значения состояния системы, либо от всей предыстории на интервале запаздывания. Это наиболее часто используемая в исследованиях формулировка, допускающая вариации в выборе норм и свойств функций, используемых в оценках. При этом получаются условия, достаточные для различных видов устойчивости (например, при дополнительном предположении $\underline{\alpha}, \overline{\alpha} \in \mathcal{K}_\infty$ получаются достаточные условия глобальной равномерной асимптотической устойчивости). Подробное обсуждение возможных обобщений теоремы 1 можно найти в обзоре [19].

В аналогичной теореме о глобальной асимптотической устойчивости по выходу (для автономной системы) требования к функционалу меняются следующим образом [15].

Теорема 2. *Если для автономной системы* (1) *($f(t, \varphi) \equiv f(\varphi)$) существует функционал* $V \in C(C^n, R^+)$*, функция* $\alpha \in \mathcal{P}$ *и функции* $\underline{\alpha}, \overline{\alpha} \in \mathcal{K}_\infty$ *такие, что на множестве* C^n *выполнены условия*

1. $\underline{\alpha}(|h(\varphi)|) \leqslant V(\varphi) \leqslant \overline{\alpha}(\|\varphi\|)$,
2. $\dot{V}(\varphi) \leqslant -\alpha(V(\varphi))$,

то система (1)–(2) *глобально равномерно асимптотически устойчива по выходу.*

При этом для справедливости утверждения теоремы 2 дополнительно требуется, чтобы решения, начинающиеся в любой ограниченной области, оставались ограниченными на любом конечном интервале времени (авторы называют это свойство системы RFC (robustly forward complete)). Заметим, что это свойство гарантируется существованием функционала, удовлетворяющего условиям теоремы 1. Отметим также, что условия теоремы 2 являются не только достаточными, но и необходимыми для глобальной равномерной асимптотической устойчивости по выходу [15].

Обратим внимание на аргументы функций в условиях теоремы 2: в нижней оценке функционала стоит норма выхода, а в оценке производной — сам функционал V. Хотя из условий теоремы 2 следует оценка $\dot V(\varphi) \leqslant -\tilde\alpha(|h(\varphi)|)$ с функцией $\tilde\alpha(s) = \alpha(\underline{\alpha}(s))$, в [9] отмечено, что заменить условие 2 теоремы 2 на такую оценку в общем случае нельзя. В [22] показано, что замена возможна при дополнительном требовании, чтобы функционал $h(\varphi)$ не убывал вдоль решений системы. Однако проверка такого условия для заранее выбранного функционала h может оказаться непростой и фактически оказывается самостоятельным исследованием, не связанным с функционалом V. Более гибкий подход — использовать два функционала [22].

Теорема 3. *Пусть для автономной системы (1) ($f(t,\varphi) \equiv f(\varphi)$) S — некоторое положительно инвариантное подмножество C^n и существуют функционалы $V, W \in C(S, R^+)$, ограниченные на ограниченных подмножествах S и такие, что для некоторых функций $\alpha \in \mathcal{P}$, $\underline{\alpha} \in \mathcal{K}_\infty$ на множестве S выполнены условия: $\underline{\alpha}(|h(\varphi)|) \leqslant W(\varphi)$, $\dot V(\varphi) \leqslant -\alpha(W(\varphi))$, $\dot W(\varphi) \leqslant 0$. Тогда система (1)–(2) равномерно асимптотически устойчива по выходу.*

В той же статье [22] приводится также результат с двумя функционалами об асимптотической устойчивости по выходу (не обязательно равномерной), в котором по сравнению с теоремой 3 добавлены требования $\alpha \in \mathcal{K}$ и $\underline{\alpha}(|h(\varphi)|) \leqslant V(\varphi) \leqslant \overline{\alpha}(\|\varphi\|)$ к функционалу V, зато прозводная $\dot W(\varphi)$ не обязана быть неположительной. В работе [23] исследуется частный случай задачи устойчивости по выходу — устойчивость по части переменных, и показано, что для неавтономного уравнения (1) условия теоремы 3 гарантируют эквиасимптотическую устойчивость по части переменных.

Устойчивость по части переменных является наиболее изученным частным случаем устойчивости по выходу с широкими практическими приложениями (задачи небесной механики; управление летательными аппаратами, биологическими процессами; балансировка загрузки компьютерных сетей и др. [24]). Анализ этого свойства с помощью прямого метода Ляпунова начался с середины прошлого века для обыкновенных дифференциальных уравнений [25, 26]. Оставшаяся часть этого раздела посвящена обсуждению известных достаточных условий по части переменных, полученных для систем с запаздыванием с использованием прямого метода Ляпунова.

Для удобства дальнейших формулировок воспользуемся традиционными обозначениями: представим вектор x в виде $x = (y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_p)^\top = (y^\top, z^\top)^\top$, $m > 0$, $p > 0$, $m + p = n$ (здесь предполагается, что $n \geqslant 2$ и выбор указанного разбиения сделан заранее). В соответствии с введенным разбиением определим $\varphi = ((\varphi^{(y)})^\top, (\varphi^{(z)})^\top)^\top$ для $\varphi \in C^n$, где $\varphi^{(y)} \in C^m$, $\varphi^{(z)} \in C^p$. Норма φ выражается через $\|\varphi^{(y)}\|$ и $\|\varphi^{(z)}\|$ в соответствии с выбранной нормой в R^n; например, если $|x| = \max_{i\in\{1,\dots,n\}} |x_i|$, то $\|\varphi\| = \max\{\|\varphi^{(y)}\|, \|\varphi^{(z)}\|\}$, и поскольку размерность вектора однозначно определяется обозначением, нормы для простоты далее обозначаются одинаково, независимо от размерности.

Система (1) при этом представляется в виде

$$\begin{aligned} \dot y(t) &= Y(t, y_t, z_t), \quad Y(t,0,0) \equiv 0, \\ \dot z(t) &= Z(t, y_t, z_t), \quad Z(t,0,0) \equiv 0, \end{aligned} \tag{3}$$

а в системе (2) полагаем $h(\varphi) = \varphi^{(y)}(0)$.

Рассмотрим теперь задачу об исследовании y-устойчивости нулевого решения системы (3), используя стандартные определения различных видов y-устойчивости (см., например, [19]).

При исследовании этой задачи предполагается, что решения системы (3) z-продолжимы, то есть если y-компонента решения ограничена при всех $t \geqslant t_0$, то решение $x(t; t_0, \varphi_0)$ определено при всех $t \geqslant t_0$ [24]. В отличие от обычной устойчивости, z-продолжимость не является следствием устойчивости по части переменных. Однако, например, y-устойчивость вместе с ограниченностью z-компоненты всех решений системы влечет z-продолжимость. В частности, если функционал $Y(t, y_t, z_t)$ для каждого ограниченного множества $S \subset R^+ \times C^y$ отображает множество $S \times C^z$ в ограниченное множество, то z-продолжимость имеет место [19].

Аналоги теоремы 1 для случая асимптотической устойчивости по части переменных представлены в [7, Theorem 6.2.1].

Теорема 4. *Пусть для системы* (3) *существует функционал* $V \in C(R^+ \times C^n, R^+)$ *и функции* $\underline{\alpha}, \overline{\alpha}, \alpha \in \mathcal{K}$ *такие, что в области* $R^+ \times C_h^m \times C^p$ *выполнено одно из условий:*

1. $\underline{\alpha}(|\varphi^{(y)}(0)|) \leqslant V(t,\varphi) \leqslant \overline{\alpha}(\|\varphi^{(y)}\|)$, $\dot{V}(t,\varphi) \leqslant -\alpha(|\varphi^{(y)}(0)|)$,
2. $\underline{\alpha}(|\varphi^{(y)}(0)|) \leqslant V(t,\varphi) \leqslant \overline{\alpha}(\|\varphi\|)$, $\dot{V}(t,\varphi) \leqslant -\alpha(|\varphi^{(y)}(0)|)$, *и функционал* $Y(t,\varphi)$ *ограничен,*

то нулевое решение системы (3) *глобально равномерно асимптотически* y*-устойчиво.*

Автор статьи [10] опровергает достаточность второго из этих условий, представляя контрпример.

Пример 1. *Рассмотрим систему*

$$\begin{aligned}\dot{y}(t) &= -\mathrm{sat}(z(t)y(t)),\\ \dot{z}(t) &= \mathrm{sat}(y(t)^2),\end{aligned} \tag{4}$$

где $x(t) = (y(t), z(t)) \in R^2$, *а sat обозначает классическую функцию насыщения:* $\mathrm{sat}(s) := \min\{|s|, 1\} \cdot \mathrm{sign}(s)\ \forall s \in R$.

Возьмем функцию Ляпунова в виде $V(x) = 2\sqrt{y^2 + z^2} - z$. *Тогда* $(\sqrt{2} - 1)|x| \leqslant V(x) \leqslant 3|x|$.

Теперь предположим, что $|x_0| < 1$. *Тогда, пока* $|x(t)| \leqslant 1$, *решение системы* (4) *совпадает с решением системы*

$$\begin{aligned}\dot{y}(t) &= -z(t)y(t),\\ \dot{z}(t) &= y(t)^2.\end{aligned} \tag{5}$$

Заметим, что функция $W(x) = |x|^2$ *является первым интегралом для этой системы, и если* $|x_0| < 1$, *то* $|x(t)| < 1$ *для всех* $t \geqslant 0$. *Это, в свою очередь, гарантирует, что при* $|x_0| < 1$ *решения системы* (4) *совпадают с решениями* (5), *при этом* $\dot{V}(x(t)) = -y(t)^2$.

В то же время можно показать, что равномерная сходимость координаты $y(t)$ *для этой системы не имеет места. На рис. 1 представлены приведенные в статье результаты численного моделирования решений системы* (4). *В момент* $t^*(x_0)$ *выполняется равенство* $z(t^*, x_0) = 0$, *при этом* y *достигает максимума:* $y(t^*, x_0) = |x_0|$. *Момент* $t_1(x_0)$, *используемый в доказательстве, выбран так, что* $z(t_1, x_0) = z_0/2$. *На графике видно, что чем меньше значение* y_0, *тем позже* $y(t)$ *достигает максимума.*

Заметим, что в примере 1 первое условие теоремы 4 не выполняется, поскольку предлагаемая функция не допускает верхней оценки, зависящей только от первой координаты.

Интересно, что рассматриваемая система автономна (с правой частью, не зависящей явно от времени) и не содержит запаздывания (обыкновенные дифференциальные уравнения). Таким образом, теорема 4 для системы без запаздывания, в которой вместо функционала используется функция, а вместо функциональных норм — обычные конечномерные нормы, также оказывается неверна.

Для обыкновенных дифференциальных уравнений в теореме В. В. Румянцева об асимптотической y-устойчивости [25] в оценке производной и верхнем пределе функции Ляпунова используется норма вектора $(x_1, \dots, x_k)^\top$ $(p \leqslant k \leqslant n)$. В. И. Воротников развивает результат В. В. Румянцева, предлагая в тех же оценках (аргументы функций $\alpha(\cdot)$ и $\overline{\alpha}(\cdot)$) использовать нормы вектора $(y^\top, \mu^\top(x))^\top$, где $\mu(x)$ — некоторая вектор-функция, для которой $\mu(0) = 0$, при этом

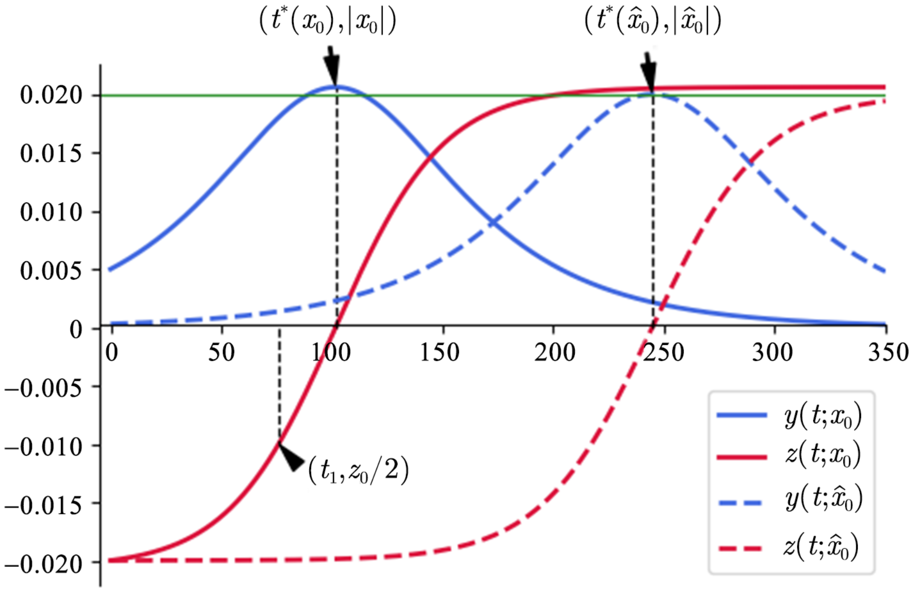

Рис. 1. Результаты численного моделирования решений системы (4) с начальными значениями $x_0 = (5\times10^{-3}, -2\times10^{-2})$ (сплошная линия) и $\hat{x}_0 = (3\times10^{-4}, -2\times10^{-2})$ (пунктирная линия) [10] (цвет онлайн)

Fig. 1. Numerically simulated solutions of (4) with initial values $x_0 = (5\times10^{-3}, -2\times10^{-2})$ (solid lines) and $\hat{x}_0 = (3\times10^{-4}, -2\times10^{-2})$ (dashed lines) [10] (color online)

утверждается уже равномерная асимптотическая y-устойчивость [7, Corollary 0.4.1.]; аналогичный результат для систем с запаздыванием в терминах функционалов представлен в [7, Corollary 6.2.1]. В примере 1 такие оценки не имеют места — используемая функция Ляпунова ограничивается сверху функцией от нормы всего состояния, а производная отрицательно определена только по y. При этом нулевое решение асимптотически y-устойчиво, но не равномерно.

А. С. Андреев [19] предлагает другие условия асимптотической y-устойчивости для системы (3) на основе функционалов Ляпунова. При этом для случая, когда правая часть системы и функционал Ляпунова зависят от времени, используются некоторые дополнительные условия, позволяющие описать структуру предельного множества решений системы относительно их y-составляющей. В частности, получены достаточные виды различных видов устойчивости по части переменных для системы (3) при следующих предположениях относительно правой части.

Предложение 3. *Для каждого числа* $q > 0$ *существует неубывающая функция* $\mu_q \in C(R^+, R^+)$, $\mu_q(0) = 0$, *такая, что для любой функции* $u \in C([a, b], \bar{C}_q^n)$ *и любых* $t_1, t_2 \in [a, b]$ *выполняется неравенство*

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} f(\tau, u(\tau)) d\tau \right| \leqslant \mu_q(|t_2 - t_1|).$$

Это предположение, в частности, выполняется, если функционал f ограничен на каждом множестве $R^+ \times \bar{C}_q^n$.

Для сравнения условий асимптотической y-устойчивости и равномерной асимптотической y-устойчивости приведем два результата из [19], которые доказаны для неавтономной системы (3) с использованием техники предельных систем и функционалов. Отметим, что в этих утверждениях никакое условие знакоопределенности на производную функционала V не накладывается; сходимость y-координаты решений к нулю обеспечивается за счет дополнительного требования к инвариантному относительно системы множеству. Подобные условия распространены в теоремах прямого метода, начиная с известной теоремы Барбашина–Красовского об асимптотической устойчивости нулевого решения обыкновенного дифференциального уравнения с правой частью, не зависящей от времени [27]. Непосредственно обобщить подобные условия на неавтономный случай не получается, поскольку положительное предельное множество решений теряет свойство инвариантности. Однако при определенных дополнительных предположениях возможно построение предельных систем; в терминах решений этих вспомогательных систем удается сформулировать дополнительные требования к некоторому множеству (определяемому функционалом и его производной в силу системы), которые вместе с условием неположительности производной обеспечивают тот или иной вид асимптотической устойчивости [19]. При этом в случае автономной и периодической по времени правой части системы результаты, полученные с использованием предельных систем, можно переформулировать в терминах исходной системы. Во избежание дополнительных построений и определений здесь ограничимся именно следствиями для автономной системы (3), поскольку пример 1 позволяет увидеть разницу условий на функционал Ляпунова и в этом частном случае, при этом для формулировки не требуются дополнительные построения.

Теорема 5. *Если для автономной системы* (3) *существуют функционалы* $V, W \in C(C^n, R^+)$ *и функция* $\underline{\alpha} \in \mathcal{K}$ *такие, что на множестве* $C_h^m \times C^p$ *выполнены условия:*

1) *для некоторого* $\Delta > 0$ *каждое решение системы* (3)*, начинающееся в области* C^n_Δ*, ограничено по* z*;*
2) $\underline{\alpha}(|\varphi^{(y)}(0)|) \leqslant V(\varphi)$*;*
3) $\dot{V}(\varphi) \leqslant -W(\varphi) \leqslant 0$*;*
4) *для любого* $c \geqslant 0$ *множество* $\{\varphi : W(\varphi) = 0, \; V(\varphi) = c\}$ *содержит лишь те решения системы* (3)*, для которых* $y(t) \equiv 0$*,*

то нулевое решение асимптотически y*-устойчиво.*

Теорема 6. *Пусть для автономной системы* (3) *существуют функционалы* $V, W \in C(C^n, R^+)$*, функции* $\underline{\alpha}, \overline{\alpha} \in \mathcal{K}$ *такие, что на множестве* $C_h^m \times C^p$ *выполнены условия:*

1) *для некоторого* $\Delta > 0$ *решения системы* (3)*, начинающееся в области* C^n_Δ*, равномерно ограничены по* z*;*
2) $\underline{\alpha}(|\varphi^{(y)}(0)|) \leqslant V(\varphi) \leqslant \overline{\alpha}(\|\varphi\|)$*;*
3) $\dot{V}(\varphi) \leqslant -W(\varphi) \leqslant 0$*;*
4) *для любого* $c > 0$ *множество* $\{\varphi : W(\varphi) = 0, \; V(\varphi) = c > 0\}$ *не содержит решений системы* (3).

Тогда нулевое решение равномерно асимптотически y*-устойчиво.*

Очевидно, в примере 1 выполняются условия теоремы 5, но не выполняются условия теоремы 6.

Отметим, что для неавтономной системы также справедлив аналогичный результат об эквиасимптотической y-устойчивости [19], при этом формулировку в терминах исходной системы допускает также случай почти периодической правой части. Другие достаточные условия эквиасимптотической y-устойчивости для неавтономных систем получены в [23].

Наряду с функционалами Ляпунова, при исследовании свойств систем с запаздыванием используют и обычные «конечномерные» функции $V(t, x) : R^+ \times R^n, R^+$, традиционно полагая $V(t, 0) = 0$ для всех $t \in R^+$. При этом конструктивные результаты основаны на использовании условий Разумихина — дополнительных ограничений, сужающих множество, на котором оценивается производная функции в силу уравнения [12]. Здесь и далее будем считать для простоты, что функция V непрерывно дифференцируема; тогда ее производная есть функционал $V' \in C(R^+ \times C^n, R)$, определяемый соотношением

$$V'(t,\varphi) = \frac{\partial V(t,\varphi(0))}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(t,\varphi(0))}{\partial x_i} f_i(t,\varphi).$$

В настоящее время условия Разумихина формулируются в разной форме; здесь для оценки производной функции Ляпунова мы используем множество, которое обычно применяется для обоснования условий устойчивости:

$$\Omega_t(V) = \{\varphi \in C^n \,:\, V(t+s,\varphi(s)) \leqslant V(t,\varphi(0)),\ -r \leqslant s \leqslant 0\}.$$

Для обоснования же асимптотической устойчивости функция Ляпунова оценивается, как правило, на следующем множестве [13]:

$$\Omega_t(V,\eta) = \{\varphi \in C^n \,:\, V(t+s,\varphi(s)) \leqslant \eta(V(t,\varphi(0))),\ -r \leqslant s \leqslant 0\},$$

где функция $\eta \in \mathcal{K}$ такова, что $\eta(u) > u$ для $u > 0$.

Существующие результаты об устойчивости по части переменных для системы (3) в терминах функций немногочисленны. Они существенно опираются на существующую развитую теорию устойчивости по части переменных для обыкновенных дифференциальных уравнений, с одной стороны, и достаточные условия устойчивости по всем переменным, с другой стороны.

Одно из таких утверждений предложено в книге [7]. Для его формулировки определим область $E_h = \{(t,x) \in R^+ \times R^n \,:\, x = (y^\top, z^\top)^\top,\ |y| < H,\ |z| < \infty\}$, а также для непрерывной вектор-функции $\mu(x)$ положим $\tilde{E}_h = \{(t,x) \in R^+ \times R^n \,:\, |\tilde{x}| = |y| + |\mu(x)| < h \leqslant H,\ |z| < \infty\}$ для некоторого $h \in (0,+\infty]$.

Теорема 7. *Пусть существуют непрерывная вектор-функция $\mu(x)$, $\mu(0) = 0$, функция Ляпунова $V(t,x) = V^*(t,y,\mu(x))$ и $a,b,c \in \mathcal{K}$ такие, что в области $\tilde{E}_h$ справедливы условия:*

1) $a(|\tilde{x}|) \leqslant V(t,x) \leqslant b(|\tilde{x}|)$;
2) $V'(t,x_t) \leqslant -c(|\tilde{x}|)$ *вдоль интегральных кривых системы* (3)*, удовлетворяющих условию* $V^*(s,y(s),\mu(x(s))) \leqslant \eta(V^*(t,y(t),\mu(x(t))))$ *для всех* $s \in [t-r,t]$, $t \geqslant T > t_0+r$ *и некоторой функции* $\eta \in \mathcal{K}$ *такой, что* $\eta(u) > u$ *для* $u > 0$.

Тогда нулевое решение системы (3) *равномерно асимптотически y-устойчиво.*

Если в теореме 7 положить $\eta(u) = u$ и условие $V'(t,x_t) \leqslant -c(|\tilde{x}(t)|)$ ослабить до оценки $V'(t,x_t) \leqslant 0$, то получаются условия, достаточные для равномерной y-устойчивости.

Здесь при оценке производной используются те же условия, что и в классических теоремах об устойчивости и асимптотической устойчивости. В то же время, поскольку в задаче об устойчивости по части переменных поведение «неконтролируемых» переменных в принципе не интересует исследователя, ограничения на их поведение, неявно возникающие при оценке производной функции Ляпунова, представляются избыточными и вызывают стремление их ослабить. Действительно, для y-устойчивости в границах заданной окрестности должна оставаться только y-компонента каждого решения, следовательно, пока y не выходит на границу, норма $|y|$ может возрастать. На этой идее были, по-видимому, и основаны результаты об ограниченности по части переменных, представленные в работе [28], автор которой предлагает для оценки производной множество $\Omega_t^y(V) = \{\varphi \in C_H \,:\, \max_{-r\leqslant s\leqslant 0} V(t+s,\varphi^{(y)}(s),\varphi^{(z)}(0)) \leqslant V(t,\varphi(0))\}$, при определении которого предыстория по z-компоненте решения не учитывается. Представленный в этой статье результат об ограниченности решений основан на следующем утверждении, которое далее используется для обоснования невозрастания функционала $\bar{V}(t, y_t, z_t)$ вдоль любого решения системы (3) при условии, что для функции $V(t,x)$ ее производная, в силу системы $V'(t,\varphi)$, неположительна на множестве $\Omega_t^y(V)$.

Теорема 8. *Если для функционала* $\bar{V}(t, y_t, z_t) = \max_{s\in[-r,0]} V(t+s, y(t+s), z(t))$ *выполняется равенство* $\bar{V}(t, y_t, z_t) = V(t+\theta_0(t), y(t+\theta_0(t)), z(t))$, *при этом* $\theta_0(t) \in [-r, 0)$ *и* $V(t+s, y(t+s), z(t)) < V(t+\theta_0(t), y(t+\theta_0(t)), z(t))$ *для* $s \in (\theta_0(t), 0]$, *то*

$$\frac{d}{dt}\bar{V}(t, y_t, z_t) = 0. \tag{6}$$

Это свойство лежит в основе доказательства теорем В. И. Воротникова о частичной устойчивости «частичного» положения равновесия, частным случаем которой является устойчивость по части переменных [29, 30].

Теорема 9. *Пусть для системы* (3) *существуют функция Ляпунова* $V(t,x)$, *непрерывно дифференцируемая в* E_h, *функция* $\mu(t,x)$, $\mu(t,0) = 0$ *и* $a \in \mathcal{K}$ *такие, что:*

1) $V(t,x) = V^{**}(t, y, \mu(t,x), z)$ *и* V^{**} *непрерывно дифференцируема в области* E_h;
2) *в области* $\tilde{E}_h$ *справедливо неравенство* $V(t,x) \geqslant a(|\tilde{x}|)$;
3) $V'(t,\varphi) \leqslant 0$ *для всех* $t \in R^+$, $\varphi \in \tilde{G}_h = \{\varphi \in C^n : \|\varphi^{(y)}\| + \sup_{s\in[-r,0]} |\mu(t,\varphi(s)| < h < H,\ \|\varphi^{(z)}\| < \infty\}$ *таких, что* $V^{**}(t+s, \varphi^{(y)}(s), \mu(t+s, \varphi(s)), \varphi^{(z)}(0)) \leqslant V^{**}(t, \varphi^{(y)}(0), \mu(t,\varphi(0)), \varphi^{(z)}(0))$ *при* $s \in [-r, 0]$.

Тогда нулевое решение системы (3) *y-устойчиво.*

Теорема 10. *Пусть в дополнение к условиям теоремы 9 существуют непрерывно дифференцируемая в* E_h *функция* $w(x)$ *и функции* $b, c, \eta \in \mathcal{K}$, $\eta(u) > u$ *для* $u > 0$ *такие, что:*

1) *в области* $\tilde{E}_h$ *справедливо неравенство* $V(t,x) \leqslant b(|y| + |w(x)|)$, $V(t,x) \leqslant \tilde{V}(x)$, $\tilde{V}(0) = 0$;
2) $V'(t,\varphi) \leqslant -c(|\varphi^{(y)}(0)| + |w(\varphi(0))|)$ *для всех* $t \in R^+$, $\varphi \in \tilde{G}_h$ *таких, что* $V^{**}(t+s, \varphi^{(y)}(s), \mu(t+s, \varphi(s)), \varphi^{(z)}(0)) \leqslant \eta(V^{**}(t, \varphi^{(y)}(0), \mu(t,\varphi(0)), \varphi^{(z)}(0)))$ *при* $s \in [-r, 0]$.

Тогда нулевое решение системы (3) *равномерно асимптотически y-устойчиво.*

Заметим, что в случае $V^{**}(t, y, \mu(t,x), z) \equiv V^{*}(t, y, \mu(x))$ теоремы 9 и 10 совпадают с утверждениями из [7], а при $V^{**}(t, y, \mu(t,x), z) \equiv \tilde{V}^{**}(t, y, z)$ множества оценки производной в этих теоремах совпадают соответственно с $\Omega_t^y(\tilde{V}^{**})$ и $\Omega_t^y(V, \eta) = \{\varphi \in C_H : \max_{-r\leqslant s\leqslant 0} V(t+s, \varphi^{(y)}(s), \varphi^{(z)}(0)) \leqslant \eta(V(t, \varphi(0)))\}$.

Однако подобное ослабление условий Разумихина, к сожалению, в общем случае не обеспечивает желаемых свойств решений; в [11] приводятся примеры, показывающие, что выводы теорем 8, 9, 10 в общем случае неверны; в частности, нарушение равенства (6) в теореме 8 демонстрирует следующий простой пример.

Пример 2. *Рассмотрим систему двух уравнений*

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= -5(y^2(t) - y^2(t-\pi/2))y(t) + 0.1z(t),\\ \dot{z}(t) &= -0.1y(t). \end{aligned} \tag{7}$$

Производная функции $V(x,y) = y^2 + z^2$, *в силу системы* (7), *неположительна на множестве* $\Omega_t^y(V)$, *и в силу теоремы 8 любое решение системы должно удовлетворять условиям:* $y^2(t) + z^2(t) = V(y(t), z(t)) \leqslant \max_{-r\leqslant s\leqslant 0} V(y(t+s), z(t)) \leqslant \max_{-r\leqslant s\leqslant 0} V(y(s), z(0)) = \max_{-r\leqslant s\leqslant 0} y^2(s) + z^2(0)$. *Однако легко построить траектории, для которых такое ограничение нарушается [11].*

Подобные примеры свидетельствуют о необходимости уточнения условий y-устойчивости, использующих множества $\Omega_t^y(V)$ и $\Omega_t^y(V, \eta)$.

Наряду с поиском возможностей сужения множеств, на которых требуется оценить производную функции Ляпунова, можно использовать расширенный класс вспомогательных функций. Например, при анализе y-устойчивости вместо знакоопределенных по y использовать знакопостоянные (в частности, знакоопределенные по части переменных y; при этом, конечно, предполагается, что $m > 1$). Результаты такого рода представлены в работах А. С. Андреева и С. В. Павликова (см. монографии [31, 32]), где при дополнительных предположениях относительно правой части уравнения (3) и ограничениях на предельные функции (функционалы) для рассматриваемой функции (функционала) Ляпунова используется техника предельных уравнений.

Далее мы покажем, что можно обосновать достаточные условия устойчивости по выходу (и, в частности, y-устойчивости) при более слабых по сравнению с традиционными требованиям к вспомогательной функции и без использования предельных функций и функционалов; при этом результаты получаются в более общих предположениях относительно правой части уравнения (1).

3. Знакопостоянные функции в исследовании задачи устойчивости по выходу: новые результаты

В этом разделе мы изучим задачу об устойчивости по выходу для системы (1)–(2), используя функции Ляпунова–Разумихина, которые неотрицательны в области определения, однако не обязательно являются знакоопределенными по отношению к выходу системы.

Система (1)–(2) будет рассматриваться в более общих предположениях по сравнению с используемыми выше, а именно: будем далее считать, что правая часть уравнения (1) удовлетворяет следующим условиям типа Каратеодори [33].

Предложение 4. *Функционал $f(t, \varphi)$ в области $R^+ \times C^n$ является непрерывным по φ при каждом фиксированном t, измеримым по t при фиксированном φ, и для каждого компакта $K \subset C^n$ существует локально интегрируемая по Лебегу функция $M_K(t)$ такая, что для всех $\varphi \in K$ и $t \in R^+$ справедлива оценка*

$$|f(t, \varphi)| \leqslant M_K(t), \tag{8}$$

где функция $M_K(t)$ удовлетворяет условию: для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(K, \varepsilon) > 0$ такое, что если $t \in R^+$ и E — измеримое подмножество интервала $[t, t+1]$, мера которого не больше δ, то

$$\int_E M_K(\tau)\, d\tau \leqslant \varepsilon. \tag{9}$$

Предложение 5. *Для каждого компакта $K \subset C^n$ существует локально интегрируемая по Лебегу функция $L_K(t)$ такая, что для всех $\varphi, \psi \in K$ и $t \in R^+$ справедлива оценка*

$$|f(t, \varphi) - f(t, \psi)| \leqslant L_K(t) \|\varphi - \psi\|, \tag{10}$$

причем $L_K(t)$ удовлетворяет условию: существует $N(K) > 0$ и такое, что если $t \in R^+$, то

$$\int_t^{t+1} L_K(\tau)\, d\tau \leqslant N(K). \tag{11}$$

Введем следующее определение.

Определение 4. *Система (1)–(2) называется равномерно притягивающей по выходу относительно множества $\Lambda \subset C^n$, если при некотором $\Delta > 0$ для любых $\varepsilon > 0$, $\delta \in (0, \Delta)$ существует $T = T(\varepsilon, \delta) > 0$ такое, что для любой начальной точки $(t_0, \varphi_0) \in R^+ \times [C^n_\delta \cap \Lambda]$ решение $x(t; t_0, \varphi_0)$ уравнения (1) удовлетворяет неравенству $|y(t; t_0, \varphi_0)| = |h(x_t(t_0, \varphi_0)| < \varepsilon$, как только $t > t_0 + T$. Если число Δ может быть выбрано произвольно, то система (1)–(2) называется глобально равномерно притягивающей по выходу относительно множества $\Lambda \subset C^n$.*

Для каждого действительного числа c и непрерывной функции $V(t, x)$ определим также множество $V^{-1}_{\max}(\infty, c) = \{\varphi \in C^n \,|\, \exists \varphi_n \to \varphi,\, t_n \to +\infty : \lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{-r\leqslant s\leqslant 0} V(t_n + s, \varphi_n(s)) = = \lim_{n\to\infty} V(t_n, \varphi_n(0)) = c\}$.

Наконец, назовем систему (1)–(2) ограниченной [равномерно ограниченной] от выхода к состоянию (см., например, [34]), если для любых $t_0 \in R^+$, $a > 0$ и $b > 0$ существует число $d(t_0, a, b) > 0$ [$d(a, b) > 0$] такое, что из условий $\varphi_0 \in \bar{C}^n_a$ и $h(x_t(t_0, \varphi_0)) < b$ для всех $t \geqslant t_0$ следует $\|x_t(t_0, \varphi_0)\| < d$ для всех $t \geqslant t_0$. Заметим, что в случае $h(\varphi) = \varphi^{(y)}(0)$ условие ограниченности [равномерной ограниченности] от выхода к состоянию выполняется для системы (3), если выполнено условие 1 теоремы 5 [теоремы 6].

В доказательствах последующих результатов используем локальную нумерацию формул ($(t1)$, $(t2)$ и т. д.) для ссылок на них внутри отдельного доказательства.

Теорема 11. *Предположим, что система (1)–(2) ограничена от выхода к состоянию и существует функция Ляпунова V такая, что:*

1) *$V'(t, \varphi) \leqslant 0$ для всех $t \in R^+$ и $\varphi \in \Omega_t(V)$;*
2) *система (1)–(2) является глобально равномерно притягивающей по выходу относительно множества $V^{-1}_{\max}(\infty, 0)$.*

Тогда система (1)–(2) устойчива по выходу.

Доказательство. Предположим, что в условиях теоремы система (1)–(2) неустойчива по выходу. Тогда при некотором $\varepsilon_0 > 0$ найдется момент $t_0 > 0$ и последовательность $\{\varphi_n \in C^n : \|\varphi_n\| \to 0, n \to \infty\}$ такие, что для решений $x(t; t_0, \varphi_n)$ уравнения (1) имеем

$$|y(T_n + t_0; t_0, \varphi_n)| = \varepsilon_0, |y(t + t_0; t_0, \varphi_n)| < \varepsilon_0 \text{ для } t \in [0, T_n) \tag{t1}$$

при некотором $T_n > 0$. Из единственности нулевого решения и свойств функционала h следует, что $T_n \to +\infty$.

Из условия $V(t, 0) \equiv 0$ и непрерывности функции V следует, что существуют числа $\Delta_n \to 0$ такие, что для каждого n справедлива оценка $\max_{-r\leqslant s\leqslant 0} V(t_0 + s, \varphi_n(s)) \leqslant \Delta_n$. В силу условия 1 теоремы получаем, что

$$\max_{-r\leqslant s\leqslant 0} V(t + s, x(t + s; t_0, \varphi_n)) \leqslant \Delta_n \text{ при всех } t \geqslant t_0. \tag{t2}$$

Определим число $d = d(t_0, \Delta_1, \varepsilon_0)$ из определения ограниченности системы от выхода к состоянию.

Из условия 2 теоремы следует, что существует $T > 0$ такое, что для любых $t_0 \in R^+$, $\varphi_0 \in V^{-1}_{\max}(\infty, 0) \cap \bar{C}^n_d$ и $t \geqslant t_0 + T$ справедливо неравенство

$$|y(t; t_0, \varphi_0)| < \varepsilon_0/2. \tag{t3}$$

Используя условия (10), (11), а также липшицевость функционала h, получаем, что для любого компакта $K \subset \bar{C}^n_d$ имеем

$$\begin{gathered} \exists \eta > 0 : \ \forall \varphi, \psi \in K, \ \forall t_0 \in R^+, \ \forall t \in [t_0 + r, t_0 + T + r], \\ \|\varphi - \psi\| < \eta \implies |y(t; t_0, \varphi) - y(t; t_0, \psi)| < \varepsilon_0/2. \end{gathered} \tag{t4}$$

Так как $\|\varphi_n\| \to 0$ при $n \to \infty$, то $\|\varphi_n\| < \xi$ для достаточно больших $n \geqslant n_0$, и из условий $(t1)$, $(t4)$ следует, что $T + r < T_n$ для всех $n \geqslant n_0$ и $\|y_{T_n - T + t_0}(t_0, \varphi_n)\| < \varepsilon_0$ для $n \geqslant n_0$. Рассмотрим последовательность $\{\psi_n = x_{T_n - T + t_0}(t_n, \varphi_n)\}$. Поскольку ψ_n равномерно ограничены по норме и равностепенно непрерывны в силу условий (8), (9), то (возможно, для некоторой подпоследовательности) $x_{T_n - T + t_0}(t_0, \varphi_n) \to \psi \in C^n$. По построению $\psi \in V^{-1}_{\max}(\infty, 0) \cap \bar{C}^n_d$, поэтому из $(t3)$ следует

$$\forall t_0 \in R^+ \ |y(t_0 + T; t_0, \psi)| < \varepsilon_0/2. \tag{t5}$$

Пусть $K \subset \bar{C}^n_d$ — компакт, содержащий последовательность $\{x_{T_n - T + t_0}(t_0, \varphi_n)\}$ и $\eta > 0$ — число из условия (t4). В силу сходимости $x_{T_n - T + t_0}(t_0, \varphi_n) \to \psi$ получаем $\|x_{T_N - T + t_0}(t_0, \varphi_n) - \psi\| < \eta$ для достаточно больших N, и тогда из (t4) следует $|y(T_N + t_0; T_N - T + t_0, \psi) - y(T_N + t_0; T_N - T + t_0, x_{T_N - T + t_0}(t_0, \varphi_N))| < \varepsilon_0/2$. Последнее неравенство эквивалентно $|y(T_N + t_0; T_N - T + t_0, \psi) - y(T_N + t_0; t_0, \varphi_N)| < \varepsilon_0/2$. Отсюда, учитывая (t5) и используя неравенство треугольника, получаем $|y(T_N + t_0; t_0, \varphi_N)| < \varepsilon_0$, что противоречит предположению (t1). Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. □

Теорема 12. *Предположим, что дополнительно к условиям теоремы 11 система (1)–(2) равномерно ограничена от выхода к состоянию и $V(t, x) \leqslant b(|x|)$ для некоторой функции $b \in \mathcal{K}$. Тогда система (1)–(2) равномерно устойчива по выходу.*

Доказательство. Результат доказывается аналогично предыдущему.

Предположим противное, то есть система не является равномерно устойчивой по выходу. Тогда при некотором $\varepsilon_0 > 0$ найдутся последовательности $\{t_n \geqslant 0\}, \{\varphi_n \in C^n : \|\varphi_n\| \to 0\}$ и $\{T_n > 0\}$ такие, что для решений $x(t; t_n, \varphi_n)$ уравнения (1) выполняются условия

$$|y(t_n + T_n; t_n, \varphi_n)| \geqslant \varepsilon_0 \ \forall n. \tag{t1}$$

Из единственности нулевого решения следует, что $t_n + T_n \to +\infty$.

Рассуждая, как при доказательстве теоремы 11, выберем число $T > 0$ и установим сходимость последовательности $\{\psi_n = x_{t_n + T_n - T}(t_n, \varphi_n)\}$ (или некоторой ее подпоследовательности) к функции $\psi \in \bar{C}^n_d$ для некоторого $d > 0$. В силу предположений относительно функции V справедливы неравенства $0 \leqslant \lim_{n\to\infty} \max_{-r \leqslant s \leqslant 0} V(t_n + T_n - T + s, x(t_n + T_n - T + s; t_n, \varphi_n)) \leqslant \lim_{n\to\infty} \max_{-r \leqslant s \leqslant 0} V(t_n + s, \varphi_n(s)) \leqslant \lim_{n\to\infty} b(\|\varphi_n\|) = 0$. Следовательно, $\psi \in V^{-1}_{\max}(\infty, 0)$. Дальнейшие выкладки (см. доказательство теоремы 11) приводят к неравенству $|y(t_N + T_N; t_N, \varphi_N)| < \varepsilon_0$ для достаточно большого N. Полученное противоречие предположению (t1) завершает доказательство теоремы. □

Перейдем к доказательству результата об асимптотической устойчивости. Помимо множества $V^{-1}_{\max}(\infty, c)$, мы будем использовать также множество

$$U^{-1}(\infty, c) = \{\varphi \in C^n \,|\, \exists \varphi_n \to \varphi, \ t_n \to +\infty : \lim_{n\to\infty} U(t_n, \varphi_n) = c\},$$

определенное для заданного функционала $U : R^+ \times C^n \to R$ и числа $c \in R$.

Теорема 13. *Предположим, что:*

1) *выполняются условия теоремы 12;*
2) $|V'(t, \varphi)| \geqslant U(t, \varphi) \geqslant 0$ *для всех* $(t, \varphi) \in R^+ \times C^n$, *где* $U(t, \varphi)$ — *функционал, равномерно непрерывный на каждом множестве* $R^+ \times K$, $K \subset C^n$ — *компакт;*
3) *множество* $U^{-1}(\infty, 0) \cap V^{-1}_{\max}(\infty, c)$ *пусто при всех* $c > 0$.

Тогда система (1)–(2) равномерно асимптотически устойчива по выходу.

Доказательство. Зафиксируем число $\delta > 0$. Из теоремы 12 следует, что система (1)–(2) равномерно устойчива по выходу. Поэтому можно выбрать $\gamma > 0$ такое, что $|y(t; t_0, \varphi)| < \delta$ для всех $t_0 \in R^+$ и $\varphi \in C^n_\gamma$ и $t \geqslant t_0$. Положим $\Delta = d(\gamma, \delta)$ согласно свойству равномерной ограниченности от выхода к состоянию. Докажем, что C^n_γ содержится в области равномерного притяжения по выходу.

Пусть $x(t; t_0, \varphi)$ — произвольное решение, начинающееся в точке $\varphi \in C^n_\gamma$. Как и в теореме 11, получаем, что множество $\{x_t(t_0, \varphi) : t \geqslant t_0\}$ предкомпактно в пространстве C^n. Далее, в силу условия 1 теоремы, $\max_{-r\leqslant s\leqslant 0} V(t + s, x(t + s; t_0, \varphi))$ не возрастает и ограничен снизу нулем, поэтому существует

$$\lim_{t\to+\infty} \max_{-r\leqslant s\leqslant 0} V(t + s, x(t + s; t_0, \varphi)) = c \geqslant 0. \tag{t1}$$

Условия 2 и 3 теоремы означают, что $c = 0$ [31, теорема V.1.1]. Покажем, что сходимость в (t1) равномерна по $(t_0, \varphi) \in R^+ \times C^n_\gamma$. Действительно, предположив противное, получим, что для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ и произвольной последовательности $T_k \to +\infty$ существует последовательность $(t_{0k}, \varphi_k) \in R^+ \times C^n_\gamma$, для которой $\max\limits_{-r\leqslant s\leqslant 0} V(t_{0k} + T_k + s, x(t_{0k} + T_k + s, t_{0k}, \varphi_k)) \geqslant \varepsilon_0$, и поскольку функция $V(t, x(t))$ не возрастает вдоль решений уравнения, то

$$\max_{-r\leqslant s\leqslant 0} V(t + s, x(t + s; t_{0k}, \varphi_k)) \geqslant \varepsilon_0 \text{ для всех } t \in [t_{0k}, t_{0k} + T_k]. \tag{t2}$$

В силу $(t2)$ имеем $\max\limits_{-r\leqslant s\leqslant 0} V(t_{0k} + \frac{T_k}{2} + t + s, x(t_{0k} + \frac{T_k}{2} + t + s; t_{0k}, \varphi_k)) = \varepsilon_k(t) \geqslant \varepsilon_0$ для $t \in \left[-\frac{T_k}{2}, \frac{T_k}{2}\right]$. Обозначим $t_k = t_{0k} + \frac{T_k}{2}$ и рассмотрим последовательность $u^k_t = x_{t_k+t}(t_k, \varphi_k)$, которая при всех $t \in [r - T_k/2, T_k/2]$ содержится в компакте $K \subset \bar{C}^n_\Delta$, и поэтому (возможно, для некоторой подпоследовательности) $u^k_t \to u_t$ равномерно по $t \in [-T, T]$ для любого положительного T.

Рассмотрим последовательность функций $v^k(t) = V(t_k + t, u^k(t))$. По построению функции $v^k(t)$ для всех k удовлетворяют неравенствам $\varepsilon_0 \leqslant \|v^k_t\| \leqslant b(\varepsilon)$ при $t \in [-T_k/2, T_k/2]$. Предположим, что для некоторого целого $N > 0$ и некоторого $R > 1$ при всех $k \geqslant N$ и $t \in [0, T_k/2]$ справедливы неравенства $Rv^k(t) < \|v^k_t\|$. Тогда $v^k(r) < \frac{1}{R}\|v^k_r\| = \frac{v^k(t')}{R} < \frac{1}{R^2}\|v^k_{t'}\| \leqslant \leqslant \frac{1}{R^2} \max_{s\in[-r,0]} v^k(t' + s) \leqslant \frac{1}{R^2}\|v^k_0\|$, где $t' \in [0, r)$. Применяя аналогичные рассуждения к значениям $|v^k(2r)|$, $|v^k(3r)|$, ..., получим неравенства $0 < \varepsilon_0 \leqslant v^k(nr) < \frac{\|v^k_0\|}{R^{n+1}} \leqslant \frac{b(\varepsilon)}{R^{n+1}}$, справедливые для всех натуральных $n \leqslant n_0(k) = \left[\frac{T_k}{2r}\right]$. Полагая $n = n_0(k)$ и переходя к пределу при $k \to +\infty$, получаем противоречие с соотношением (t2).

Следовательно, для любой последовательности $R_k > 1$ существует подпоследовательность $\{k_n\}$ (во избежание громоздкости обозначений положим ее совпадающей с самой последовательностью) такая, что для некоторого $t^*_k \in [0, T_k/2]$ выполняется $R_k v^k(t^*_k) \geqslant \|v^k_{t^*_k}\|$. Зафиксируем последовательность $R_k > 1$, $R_k \to 1$, и перейдем в последнем неравенстве к пределу при $k \to \infty$, выбирая, если необходимо, сходящуюся подпоследовательность: $\lim_{k\to\infty} R_k v^k(t^*_k) = = \lim_{k\to\infty} v^k(t^*_k) = \lim_{k\to\infty} \|v^k_{t^*_k}\|$. Очевидно, в этом случае $u^k_{t^*_k} \to \varphi^* \in V^{-1}_{\max}(\infty, c)$, при этом $c \geqslant \varepsilon_0 > 0$.

Найдем теперь $\lim_{k\to\infty} U(t_k + t^*_k, u^k_{t^*_k})$ (в силу условия 2 теоремы эта последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность, которую для простоты обозначений снова будем считать совпадающей с самой последовательностью). Если этот предел равен нулю, то получена функция $\varphi^* \in U^{-1}(\infty, 0) \cap V^{-1}_{\max}(\infty, c)$, при этом $c \geqslant \varepsilon_0 > 0$.

Предположим, что $\lim_{k\to\infty} U(t_k + t^*_k, u^k_{t^*_k}) = 2\delta_1 > 0$. Тогда для достаточно больших k и некоторого $\delta_2 > 0$ при всех $t \in [-\delta_2, \delta_2]$ выполняется одно из следующих неравенств:

$\frac{d}{dt}v^k(t_k^*+t) < -\delta_1$, $\frac{d}{dt}v^k(t_k^*+t) > \delta_1$. Из первого неравенства следует $v^k(t_k^*-\delta_2) > v^k(t_k^*)+\delta_1\delta_2 > R_k v^k(t_k^*) \geqslant \|v^k_{t_k^*}\|$, что невозможно. Из второго неравенства получаем $v^k(t_k^*+\delta_2) > v^k(t_k^*) + \delta_1\delta_2 > R_k v^k(t_k^*) \geqslant \|v^k_{t_k^*}\|$, откуда $v^k(t_k^*+\delta_2) = \|v^k_{t_k^*+\delta_2}\|$. По свойству производной функции Ляпунова в силу уравнения получаем $V'(t_k+t_k^*+\delta_2, u^k_{t_k^*+\delta_2}) = 0$, и тогда $\lim_{k\to\infty} u^k_{t_k^*+\delta_2} = \varphi^* \in U^{-1}(\infty,0)\cap V_{\max}^{-1}(\infty,c)$, при этом $c \geqslant \varepsilon_0 > 0$.

Итак, в любом случае получается противоречие с условием 3 теоремы, которое завершает доказательство равномерной по $(t_0,\varphi)\in R^+\times C^n_\gamma$ сходимости к нулю в $(t1)$.

Предположим теперь, что C^n_γ не содержится в области равномерного притяжения по выходу. Тогда для некоторого $\varepsilon_1 > 0$ существует последовательность $\{(\tilde t_{0k},\varphi_{0k})\}\in R^+\times C^n_\gamma$ такая, что для решений $x = x(t;\tilde t_{0k},\varphi_{0k})$ выполняется равенство

$$|y(\tilde t_{0k}+T_k;\tilde t_{0k},\varphi_{0k})| \geqslant \varepsilon_1. \tag{t3}$$

Из свойства равномерного притяжения по выходу относительно множества $V_{\max}^{-1}(\infty,0)$ следует, что

$$\exists T_1 = T_1(\varepsilon_1) > 0:\ \forall t_0\in R^+,\ \forall\varphi\in V_{\max}^{-1}(\infty,0)\cap\bar C^n_\Delta\ \forall t\geqslant t_0+T_1\ |y(t;t_0,\varphi)| < \varepsilon/2. \tag{t4}$$

Из условий (10), (11), а также липшицевости функционала h следует, что для любого компакта $K\subset\bar C^n_\Delta$ найдется $\delta_1=\delta_1(\varepsilon_1)>0$ такое, что выполняется условие

$$\forall t_0\in R^+,\ \forall\varphi,\psi\in K,\ \|\varphi-\psi\|<\delta_1 \implies |y(t_0+T_1;t_0,\varphi)-y(t_0+T_1;t_0,\psi)| < \varepsilon_1/2. \tag{t5}$$

Рассмотрим последовательность $\psi_k = x_{\bar t_k}(\tilde t_{0k},\varphi_{0k})$, где $\bar t_k = \tilde t_{0k}+T_k-T_1$. Поскольку для достаточно больших k выполняется неравенство $\tilde t_{0k}+T_k-T_1 > \tilde t_{0k}+r$, то, рассуждая как в теореме 11, без ограничения общности можем считать, что $\psi_k\to\psi\in\bar C^n_\Delta$ при $k\to\infty$. В силу равномерной по $(t_0,\varphi_0)\in R^+\times C_\gamma$ сходимости $V(t,x(t;t_0,\varphi_0))\to 0$ при $t\to+\infty$ получаем $\psi\in V_{\max}^{-1}(\infty,0)\cap\bar C^n_\Delta$.

Из (t5) теперь следует, что для достаточно больших k справедлива оценка $|y(\tilde t_{0k}+T_k;\tilde t_{0k},\varphi_{0k}) - y(\bar t_k+T_1;\bar t_k,\psi)| = |y(\bar t_k+T_1;\bar t_k,\psi_k)-y(\bar t_k+T_1;\bar t_k,\psi)| < \varepsilon_1/2$, а поскольку $|y(\bar t_k+T_1;\bar t_k,\psi)| < \varepsilon/2$ в силу $(t4)$, то $|y(\tilde t_{0k}+T_k;\tilde t_{0k},\varphi_{0k})| < \varepsilon_1$. Полученное противоречие с равенством (t3) завершает доказательство теоремы. □

Используя рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 13, можно также доказать следующее утверждение.

Теорема 14. *Предположим, что выполняются условия теоремы 11 и условие 2 теоремы 13. Тогда:*

1. *Если для любого $c\geqslant 0$ множество $U^{-1}(\infty,0)\cap V_{\max}^{-1}(\infty,c)$ содержит лишь те решения системы (3), для которых $y(t)\equiv 0$, то система (1)–(2) асимптотически устойчива по выходу.*
2. *Если для некоторой последовательности $t_n\to+\infty$ множество $S(\{t_n\})=\{\varphi\in C^n \mid \exists\,\varphi_n\to\varphi : \lim\limits_{n\to\infty}\max\limits_{-r\leqslant s\leqslant 0} V(t_n+s,\varphi_n(s)) = \lim_{n\to\infty}V(t_n,\varphi_n(0)) = c,\ \lim_{n\to\infty}U(t_n,\varphi_n)=0\}$ пусто при всех $c>0$, то система (1)–(2) эквиасимптотически устойчива по выходу.*

4. Обсуждение полученных результатов

Если для функции Ляпунова на множестве $\{(t,\varphi)\in R^+\times C^n : \varphi\in\Omega_t(V)\}$ справедлива оценка $V'(t,\varphi)\leqslant -c\big(V(t,\varphi(0))\big)$ для некоторой функции $c\in\mathcal{K}$, то условие 3 теоремы 13 выполняется (аналогичная оценка используется в теореме 2 для функционала, а также в [9, Theorem 35] о достаточных условиях устойчивости от входа к выходу в терминах функций Ляпунова–Разумихина).

Если h эквивалентно конечномерному отображению h_0 (см. определение 3) и для функции Ляпунова справедливы оценки $a(|h_0(x)|) \leqslant V(t,x)$ и $V'(t,\varphi) \leqslant -c(|h_0(\varphi(0))|)$ для некоторых функций $a, c \in \mathcal{K}$ для всех $t \in R^+$ и $\varphi \in \Omega_t(V)$, то условие 3 в теореме 13 выполняется; сравни с условиями теоремы 7. Если при этом из условия $y(t_0) = 0$ следует $y(t) = 0$ для всех $t \geqslant t_0$, то, очевидно, имеет место свойство равномерного притяжения по выходу относительно множества $V_{\max}^{-1}(\infty, 0)$.

Таким образом, доказанные результаты развивают и дополняют теоремы из [7] для случая $h(\varphi) = \varphi^{(y)}(0)$. Результаты, аналогичные теоремам 11, 12, 13, в случае $h(\varphi) = \varphi(0)$ представлены в [35]. Для иллюстрации преимуществ полученных теоретических результатов ниже приводятся модельные примеры.

Пример 3. *Рассмотрим систему*

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= -z_1^2(t-2)y_1(t) - y_1(t-0.5) + f_1(t,x_t), \\ \dot{y}_2(t) &= -y_2(t-0.5), \\ \dot{z}(t) &= f_2(t,z_t), \\ h(x_t) &= (y_1(t), y_2(t))^\top. \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь $x = (y_1, y_2, z_1, z_2)^\top$, $z = (z_1, z_2)^\top$, $x_t \in C^4 = C([-r, 0], R^4)$, где $r \geqslant 2$ — максимальная величина запаздывания в системе; функционалы f_1 и f_2 удовлетворяют Предположениям 4, 5, кроме того, $f_1(t, \varphi_1, 0, \varphi_3, \varphi_4) = 0$, а функционал f_2 обеспечивает равномерную ограниченность по z решений системы (12), начинающихся в области $\bar{C}_\Delta^4$ для некоторого $\Delta > 0$.

Рассмотрим функцию $V(x) = y_2^2$. Применяя стандартное преобразование второго уравнения системы с использованием равенства $y_2(t-0.5) = y_2(t) - \int_{-0.5}^{0} \dot{y}(t+s)\,ds = y_2(t) - \int_{-0.5}^{0}(-y_2(t+s-0.5))\,ds$, получим $V'(t,\varphi) \leqslant -\varphi_2^2(0)$ для всех $t \in R^+$ и $\varphi \in \Omega_t(V)$, и условие 3 теоремы 13, очевидно, выполняется. Аналогично на основе первого уравнения системы устанавливается свойство глобального равномерного притяжения по выходу относительно множества $V_{\max}^{-1}(\infty, 0) = \{\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)^\top : \varphi_2 = 0\}$. Следовательно, в силу теоремы 13 система (12) равномерно асимптотически устойчива по выходу.

На рис. 2 представлены результаты численного моделирования для системы (12) с функционалами

$$\begin{aligned} f_1(t,x_t) &= 10 \sin t y_1(t-1) y_2^2(t-1) z_1(t-2) z_2(t - 3\sin^2 t), \\ f_2(t,z_t) &= (-z_2(t-\pi/2), -0.5z_1(t) - z_2(t-\pi/2) \textstyle\int_{t-1}^{t}(s-t)z_1(s)\,ds)^\top \end{aligned} \tag{13}$$

(принимая во внимание устойчивость нулевого решения уравнения $\dot{z}_2(t) = -z_2(t-\pi/2)$ и анализируя уравнение для $z_1(t)$, получаем, что для выбранного функционала f_2 условие равномерной ограниченности по z гарантированно выполняется при условии $\|(z_2)_0\| \leqslant 1$).

Отметим, что построить в приведенном примере функцию или функционал, знакоопределенные по $h(x_t)$, возможно только при дополнительных ограничениях на f_1, так что теоремы 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10 неприменимы.

Предположения 4, 5 позволяют также построить предельные уравнения для (1) [33] и использовать их свойства для получения достаточных условий устойчивости по выходу; для случая обычной устойчивости по Ляпунову подобные результаты получены в [36] (отметим, что предположения относительно правой части уравнения (1) в [35,36] более ограничительны по сравнению с используемыми в данной работе). Использование предельных уравнений в формулировках,

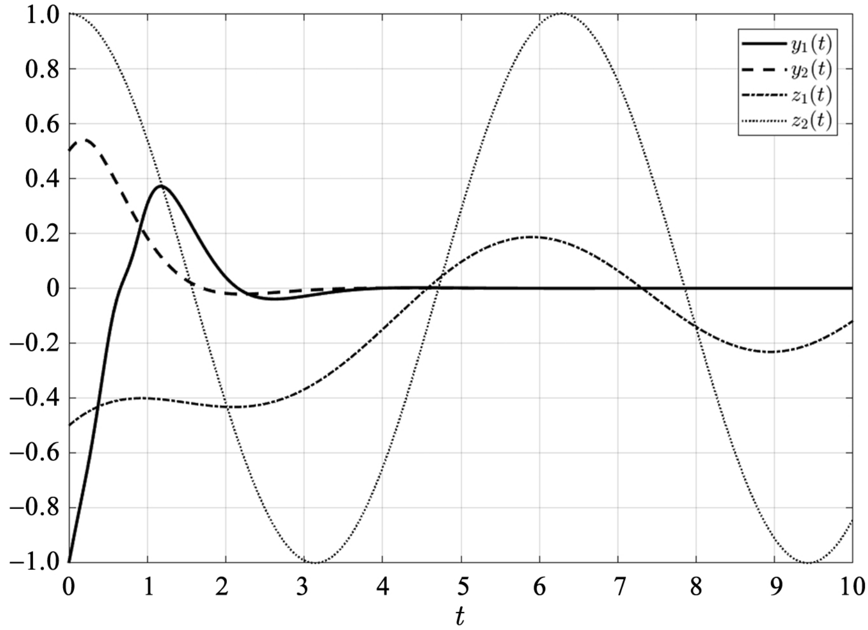

Рис. 2. Результаты численного моделирования решения системы (12), (13) с начальными условиями $y_1(s) = \sin(s) - 1$, $y_2(s) = 0.5\cos(5s)$, $z_1(s) = 0.5(\sin(2s) - 1)$, $z_2(s) = \cos(s)$ ($s \in [-2, 0]$, $t_0 = 0$)

Fig. 2. A numerically simulated solution of (12), (13) with initial values $y_1(s) = \sin(s) - 1$, $y_2(s) = 0.5\cos(5s)$, $z_1(s) = 0.5(\sin(2s) - 1)$, $z_2(s) = \cos(s)$ ($s \in [-2, 0]$, $t_0 = 0$)

с одной стороны, требует дополнительных вычислений, с другой стороны, позволяет уточнить требование к множеству $U^{-1}(\infty, 0) \cap V_{\max}^{-1}(\infty, c)$.

Продемонстрируем эту возможность для случая автономной системы, когда предельные уравнения совпадают с исходным и можно сформулировать утверждения без дополнительных конструкций.

Теорема 15. *Предположим, что система* (1)–(2) *ограничена от выхода к состоянию,* $f(t, \varphi) \equiv f(\varphi)$, *и существует функция Ляпунова* $V : R^n \to R^+$ *такая, что:*

1) $V'(\varphi) \leqslant 0$ *для всех* $\varphi \in \Omega(V)$;
2) *система* (1)–(2) *является глобально равномерно притягивающей по выходу относительно множества* $\{\varphi \in C^n : V(\varphi(s)) \equiv 0,\ s \in [-r, 0]\}$.

Тогда система (1)–(2) *равномерно устойчива по выходу.*

Если, кроме того, множество $\{\varphi \in C^n : V'(\varphi) = 0\}$ *содержит только решения уравнения (1), для которых* $y(t) \equiv 0$, *то система* (1)–(2) *асимптотически устойчива по выходу.*

Если при этом множество $\{\varphi \in C^n : \max_{-r \leqslant s \leqslant 0} V(\varphi(s)) = V(\varphi(0)) > 0,\ V'(\varphi) = 0\}$ *не содержит решений уравнения (1), то система* (1)–(2) *равномерно асимптотически устойчива по выходу.*

Аналогичный результат справедлив для периодической системы.

Пример 4. *Рассмотрим систему*

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -a(x_1(t) - 3x_2^2(t)) + f_1(x_t)x_2^2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -a(x_1(t)x_2(t) + x_2^3(t)) - f_1(x_t)x_1(t)x_2(t), \\ \dot{x}_3(t) = f_2(x_t) - bx_3^3(t), \\ h(x_t) = (x_1(t), x_3(t))^\top, \end{cases} \tag{14}$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)$, *правая часть системы удовлетворяет Предположениям 4, 5,* $a, b > 0$, $f_2(\varphi) = 0$ *при* $\varphi = (0, 0, \varphi_3)$. *В качестве функции Ляпунова возьмем знакопостоянную функцию* $V(x) = \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{2}$. *Ее производная, в силу системы (14), равна* $V'(t, \varphi) = -a(\varphi_1(0) - \varphi_2^2(0))^2$.

Множество $\{\varphi \in C^n : V'(\varphi) = 0\}$ *есть* $\{\varphi : \varphi_1(0) = \varphi_2^2(0)\}$. *Подставляя* $x_1(t) = x_2^2(t)$ *в систему (14), получаем* $\dot{x}_2(t) = -x_2(t)\dot{x}_1(t)$. *С другой стороны,* $\dot{x}_1(t) = \frac{d}{dt}(x_2^2(t)) = 2x_2(t)\dot{x}_2(t)$. *Поэтому* $\dot{x}_2(t) = \dot{x}_1(t) = 0$. *Тогда для* $x_1(t) = x_2^2(t)$ *из первого уравнения (14) получаем* $x_2^2(t) = 0 = x_1(t)$. *Таким образом,* $\{\varphi \in C^n : \max_{-r \leqslant s \leqslant 0} V(\varphi(s)) = V(\varphi(0)) > 0,\ V'(\varphi) = 0\}$ *не содержит решений системы (14). На множестве* $\{\varphi \in C^n : V(\varphi(s)) \equiv 0,\ s \in [-r, 0]\}$ *система (14) принимает вид* $\begin{cases} x_1(t) = x_2(t) = 0, \\ \dot{x}_3(t) = -bx_3^3(t). \end{cases}$ *Таким образом, выполнены все условия теоремы 15 и система (14) равномерно асимптотически устойчива по выходу.*

Заметим, что, как и в примере 3, без дополнительных предположений о свойствах функционала f_2 *невозможно построить знакоопределенные по* $h(x_t)$ *функцию или функционал, так что результаты раздела 2 не позволяют сделать вывод об (асимптотической) устойчивости по выходу; кроме того, в данном примере не выполняется условие 3 теоремы 13.*

Список литературы

1. *Sontag E. D., Wang Y.* Notions of input to output stability // Systems and Control Letters. 1999. Vol. 38, no. 4–5. P. 235–248. DOI: 10.1016/S0167-6911(99)00070-5.
2. *Kankanamalage H. G., Lin Y., Wang Y.* Remarks on different notions on output stability for nonlinear delay systems // arXiv:2208.14415v1. arXiv Preprint, 2022. DOI: 10.48550/arXiv.2208.14415.
3. *Kolmanovskii V., Myshkis A.* Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations. Dordrecht: Springer, 2013. 648 p. DOI: 10.1007/978-94-017-1965-0.
4. *Хейл Д. К.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 421 с.
5. *Fridman E.* Introduction to Time-Delay Systems. Cham: Birkhäuser, 2014. 362 p. DOI: 10.1007/978-3-319-09393-2.
6. *Воротников В. И.* К частичной устойчивости и детектируемости функционально-дифференциальных систем с последействием // Автоматика и телемеханика. 2020. № 2. С. 3–17. DOI: 10.31857/S0005231020020014.
7. *Vorotnikov V. I.* Partial Stability and Control. Boston: Birkhäuser, 1998. 430 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-4150-8.
8. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.
9. *Chaillet A., Karafyllis I., Pepe P., Wang Y.* The ISS framework for time-delay systems: a survey // Math. Control Signals Syst. 2023. Vol. 35, no 2. P. 237–306. DOI: 10.1007/s00498-023-00341-w.
10. *Orlowski J., Chaillet A., Sigalotti M.* Counterexample to a Lyapunov condition for uniform asymptotic partial stability // IEEE Control Systems Letters. 2020. Vol. 4, no 2. P. 397–401. DOI: 10.1109/LCSYS.2019.2939717.
11. *Sedova N.* Razumikhin conditions in partial stability problem for delay systems // In: 2016 International Conference Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference). IEEE, 2016. P. 1–4. DOI: 10.1109/STAB.2016.7541220.
12. *Разумихин Б. С.* Об устойчивости систем с запаздыванием // Прикладная математика и механика. 1956. Т. 20, № 4. С. 500–512.
13. *Красовский Н. Н.* Об асимптотической устойчивости систем с последействием // Прикладная математика и механика. 1956. Т. 20, № 4. С. 513–518.
14. *Ren W., Jungers R. M., Dimarogonas D. V.* Razumikhin and Krasovskii approaches for safe stabilization // Automatica. 2022. Vol. 146. P. 110563. DOI: 10.1016/j.automatica.2022.110563.

15. *Karafyllis I., Pepe P., Jiang Z.-P.* Global output stability for systems described by retarded functional differential equations: Lyapunov characterizations // European Journal of Control. 2008. Vol. 14, no 6. P. 516–536. DOI: 10.3166/ejc.14.516-536.
16. *Teel A. R., Praly L.* A smooth Lyapunov function from a class-$\mathcal{KL}$ estimate involving two positive semidefinite functions // ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations. 2000. Vol. 5. P. 313–367. DOI: 10.1051/cocv:2000113.
17. *Lakshmikantham V., Liu X.Z.* Stability Analysis in Terms of Two Measures. Singapore: World Scientific, 1993. 402 p.
18. *Мовчан А. А.* Устойчивость процессов по двум метрикам // Прикладная математика и механика. 1960. Т. 24, № 6. С. 988–1001.
19. *Андреев А. С.* Метод функционалов Ляпунова в задаче об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений // Автоматика и телемеханика. 2009. № 9. С. 4–55.
20. *Ким А. В., Пименов В. Г.* i-гладкий анализ и численные методы решения функционально-дифференциальных уравнений. М.: Регулярная и хаотическая динамика, 2004. 256 с.
21. *Driver R.* Existence and stability of solutions of a delay-differential system // Arch. Rational Mech. Anal. 1962. Vol. 10. P. 401–426. DOI: 10.1007/BF00281203.
22. *Karafyllis I., Chaillet A.* Lyapunov conditions for uniform asymptotic output stability and a relaxation of Barbalat’s lemma // arXiv:2012.07607. arXiv Preprint, 2020. DOI: 10.48550/arXiv.2012.07607.
23. *Ignatyev A. O.* On the partial equiasymptotic stability in functional differential equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2002. Vol. 268, no. 2. P. 615–628. DOI: 10.1006/jmaa.2001.7835.
24. *Воротников В. И.* Частичная устойчивость и управление: состояние проблемы и перспективы развития // Автоматика и телемеханика. 2005. № 4. С. 3–59.
25. *Румянцев В. В.* Об устойчивости движения по отношению к части переменных // Вестник МГУ. Сер. Мат., Мех., Физ., Астр., Хим. 1957. № 4. С. 9–16.
26. *Corduneanu C.* Sur la stabilite partielle // Revue Roumaine de Mathematiques Pures et Appliquees. 1964. Vol. 9, no. 3. P. 229–236.
27. *Барбашин Е. А.* Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970. 240 с.
28. *Zhao J.* A note on Razumikhin theorems in uniform ultimate boundedness // Miskolc Mathematical Notes. 2014. Vol. 15, no. 1. P. 239–254. DOI: 10.18514/MMN.2014.530.
29. *Vorotnikov V. I.* On partial stability of retarded functional differential systems // Applied Mathematics Sciences. 2015. Vol. 9, no. 6. P. 279–284. DOI: 10.12988/ams.2015.411905.
30. *Vorotnikov V. I.* On Razumikhin approach for partial stability problem of retarded systems // Applied Mathematics Sciences. 2015. Vol. 9, no. 121. P. 6021–6028. DOI: 10.12988/ams.2015.58511.
31. *Андреев А. С.* Устойчивость неавтономных функционально-дифференциальных уравнений. Ульяновск: Изд-во УлГУ, 2005. 328 с.
32. *Павликов С. В.* Метод функционалов Ляпунова в задачах устойчивости. Набережные Челны: Ин-т управления, 2006. 264 с.
33. *Седова Н. О.* К вопросу о принципе сведения для нелинейных систем с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 2011. № 9. С. 74–86.
34. *Angeli D., Ingalls B., Sontag E. D., Wang Y.* Separation principles for input-output and integral-input-to-state stability // SIAM Journal on Control and Optimization. 2004. Vol. 43, no. 1. P. 256–276. DOI: 10.1137/S0363012902419047.
35. *Седова Н. О.* Вырожденные функции в исследовании асимптотической устойчивости решений функционально-дифференциальных уравнений // Матем. заметки. 2005. Т. 78, № 3. С. 468–472. DOI: 10.1007/s11006-005-0141-9.
36. *Sedova N.* On employment of semidefinite functions in stability of delayed equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2003. Vol. 281, iss. 1. P. 307–319. DOI: 10.1016/S0022-247X(03)00101-X.

References

1. Sontag ED, Wang Y. Notions of input to output stability. Systems and Control Letters. 1999; 38(4-5):235–248. DOI: 10.1016/S0167-6911(99)00070-5.
2. Kankanamalage HG, Lin Y, Wang Y. Remarks on different notions on output stability for nonlinear delay systems. arXiv:2208.14415v1. arXiv Preprint; 2022. DOI: 10.48550/arXiv.2208.14415.
3. Kolmanovskii V, Myshkis A. Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations. Dordrecht: Springer; 2013. 648 p. DOI: 10.1007/978-94-017-1965-0.
4. Hale JK. Theory of Functional Differential Equations. New York: Springer; 1977. 366 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-9892-2.
5. Fridman E. Introduction to Time-Delay Systems. Cham: Birkhäuser, 2014. 362 p. DOI: 10.1007/978-3-319-09393-2.
6. Vorotnikov VI. On partial stability and detectability of functional differential systems with aftereffect. Autom. Remote Control. 2020;81(2):199–210. DOI: 10.1134/S0005117920020010.
7. Vorotnikov VI. Partial Stability and Control. Boston: Birkhäuser, 1998. 430 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-4150-8.
8. Krasovskii NN. Stability of Motion. Redwood: Stanford University Press; 1963. 188 p.
9. Chaillet A, Karafyllis I, Pepe P, Wang Y. The ISS framework for time-delay systems: a survey. Math. Control Signals Syst. 2023;35(2):237–306. DOI: 10.1007/s00498-023-00341-w.
10. Orlowski J, Chaillet A, Sigalotti M. Counterexample to a Lyapunov condition for uniform asymptotic partial stability. IEEE Control Systems Letters. 2020;4(2):397–401. DOI: 10.1109/LCSYS.2019.2939717.
11. Sedova N. Razumikhin conditions in partial stability problem for delay systems. In: 2016 International Conference Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference). IEEE; 2016. P. 1–4. DOI: 10.1109/STAB.2016.7541220.
12. Razumikhin BS. On the stability of systems with delay. Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1956;20(4):500–512 (in Russian).
13. Krasovskii NN. On the asymptotic stability of systems with aftereffect. Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1956;20(4):513–518 (in Russian).
14. Ren W, Jungers RM, Dimarogonas DV. Razumikhin and Krasovskii approaches for safe stabilization. Automatica. 2022;146:110563. DOI: 10.1016/j.automatica.2022.110563.
15. Karafyllis I, Pepe P, Jiang ZP. Global output stability for systems described by retarded functional differential equations: Lyapunov characterizations. European Journal of Control. 2008;14(6):516–536. DOI: 10.3166/ejc.14.516-536.
16. Teel AR, Praly L. A smooth Lyapunov function from a class-$\mathcal{KL}$ estimate involving two positive semidefinite functions. ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations. 2000;5:313–367. DOI: 10.1051/cocv:2000113.
17. Lakshmikantham V, Liu XZ. Stability Analysis in Terms of Two Measures. Singapore: World Scientific; 1993. 402 p.
18. Movchan AA. Stability of processes with respect to two metrics. Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1960;24(6):1506–1524. DOI: 10.1016/0021-8928(60)90004-6.
19. Andreev AS. The Lyapunov functionals method in stability problems for functional differential equations. Autom. Remote Control. 2009;70:1438–1486. DOI: 10.1134/S0005117909090021.
20. Kim AV, Pimenov VG. i-Smooth Analysis and Numerical Methods for Solving Functional-Differential Equations. M.: Regular and Chaotic Dynamics; 2004. 256 p. (in Russian).
21. Driver R. Existence and stability of solutions of a delay-differential system. Arch. Rational Mech. Anal. 1962;10:401–426. DOI: 10.1007/BF00281203.
22. Karafyllis I, Chaillet A. Lyapunov conditions for uniform asymptotic output stability and a

relaxation of Barbalat's lemma. arXiv:2012.07607. arXiv Preprint; 2020. DOI: 10.48550/arXiv.2012.07607.

23. Ignatyev AO. On the partial equiasymptotic stability in functional differential equations. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2002;268(2):615–628. DOI: 10.1006/jmaa.2001.7835.
24. Vorotnikov VI. Partial stability and control: The state-of-the-art and development prospects. Autom. Remote Control. 2005;66(4):511–561. DOI: 10.1007/s10513-005-0099-9.
25. Rumyantsev VV. On the stability of motion with respect to part of the variables. Moscow University Bulletin. Series of Mathematics, Mechanics, Astronomy, Physics, Chemistry. 1957;(4): 9–16 (in Russian).
26. Corduneanu C. Sur la stabilite partielle. Revue Roumaine de Mathematiques Pures et Appliquees. 1964;9(3): 229–236.
27. Barbashin EA. Lyapunov Functions. M.: Nauka; 1970. 240 p. (in Russian).
28. Zhao J. A note on Razumikhin theorems in uniform ultimate boundedness. Miskolc Mathematical Notes. 2014;15(1):239–254. DOI: 10.18514/MMN.2014.530.
29. Vorotnikov VI. On partial stability of retarded functional differential systems. Applied Mathematics Sciences. 2015;9(6):279–284. DOI: 10.12988/ams.2015.411905.
30. Vorotnikov VI. On Razumikhin approach for partial stability problem of retarded systems. Applied Mathematics Sciences. 2015;9(121):6021–6028. DOI: 10.12988/ams.2015.58511.
31. Andreev AS. Stability of Nonautonomous Functional-Differential Equations. Ulyanovsk: Ulyanovsk State University Publishing; 2005. 328 p. (in Russian).
32. Pavlikov SV. The Method of Lyapunov Functionals in Stability Problems. Naberezhnye Chelny: University of Management Publishing; 2006. 264 p. (in Russian).
33. Sedova NO. On the principle of reduction for the nonlinear delay systems. Autom. Remote Control. 2011;72:1864–1875. DOI: 10.1134/S0005117911090086.
34. Angeli D, Ingalls B, Sontag ED, Wang Y. Separation principles for input-output and integral-input-to-state stability. SIAM Journal on Control and Optimization. 2004;43(1):256–276. DOI: 10.1137/S0363012902419047.
35. Sedova NO. Degenerate functions in the analysis of asymptotic stability of solutions of functional differential equations. Math. Notes 2005;78(3):427–431. DOI: 10.1007/s11006-005-0141-9.
36. Sedova N. On employment of semidefinite functions in stability of delayed equations. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2003;281(1):307–319. DOI: 10.1016/S0022-247X(03)00101-X.

Седова Наталья Олеговна — родилась в Нижегородской области (1973). Окончила с отличием механико-математический факультет филиала Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова в г. Ульяновске по специальности «Прикладная математика» (1995). Доктор физико-математических наук (2010). Работает на кафедре информационных технологий Ульяновского государственного университета в должности профессора. Научные интересы — устойчивость и управление в непрерывных системах с запаздыванием.

Россия, 432000 Ульяновск, ул. Л. Толстого, 42
Ульяновский государственный университет
E-mail: sedovano@ulsu.ru
ORCID: 0000-0002-6247-6421
AuthorID (eLibrary.Ru): 15874