


Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2026. Т. 34, № 2
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2026;34(2)

Научная статья
УДК 532.5.011

DOI: 10.18500/0869-6632-003205
EDN: PJFTEP

Управление движением кругового профиля с помощью присоединенных точечных источников и внутренних механизмов

Е. В. Ветчанин , Е. М. Артемова

Удмуртский государственный университет, Ижевск, Россия
E-mail: eugene186@mail.ru, liz-artemova2014@yandex.ru

Поступила в редакцию 30.08.2025, принята к публикации 17.11.2025,
опубликована онлайн 9.12.2025, опубликована 31.03.2026

Аннотация. Целью работы является исследование задачи управления плоскопараллельным движением кругового профиля в идеальной жидкости за счет изменения интенсивности присоединенных источников и вращения внутреннего ротора. **Методы.** Для построения математической модели используется описание движения жидкости на основе комплексного потенциала, который позволяет вычислить силовое воздействие жидкости на движущееся тело. Для решения задачи управления используется допущение о кусочно-постоянной форме управляющих воздействий, что позволяет выполнить явное интегрирование уравнений движения аналитическими методами. **Результаты.** Построены уравнения плоскопараллельного движения кругового профиля (в общем случае неуравновешенного) с произвольным количеством присоединенных источников. Движение источников относительно профиля и их интенсивности задаются явными функциями времени. Выполнено явное интегрирование уравнений движения в случае уравновешенного профиля с одним присоединенным источником для кусочно-постоянных управлений. **Заключение.** Явные решения уравнений движения были использованы для построения маневров поворота на месте и продвижения. Сформулирован алгоритм перемещения профиля в окрестности заданной траектории на основе попеременного использования элементарных маневров. Предложенный алгоритм траекторного управления является конструктивным доказательством управляемости рассмотренной системы. Построенное таким образом решение задачи управления может использоваться в качестве основы для решения этой же задачи в случае гладких управлений.

Ключевые слова: управление движением, идеальная жидкость, круговой профиль, присоединенный источник.

Благодарности. Работа Ветчанина Е. В. выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ (FEWS-2024-0007). Работа Артемовой Е. М. выполнена в Уральском математическом центре (соглашение № 075-02-2025-1609). Авторы выражают благодарность Килину А. А. и Полехину И. Ю. за обсуждение результатов, а также анонимным рецензентам за внимательное прочтение работы и ценные замечания.

Для цитирования: Ветчанин Е. В., Артемова Е. М. Управление движением кругового профиля с помощью присоединенных точечных источников и внутренних механизмов // Известия вузов. ПНД. 2026. Т. 34, № 2. С. 223–246. DOI: 10.18500/0869-6632-003205. EDN: PJFTEP

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Control of the motion of a circular foil using attached sources and internal mechanisms

E. V. Vetchanin[✉], *E. M. Artemova*

Udmurt State University, Izhevsk, Russia
E-mail: ✉eugene186@mail.ru, liz-artemova2014@yandex.ru

Received 30.08.2025, accepted 17.11.2025, available online 9.12.2025, published 31.03.2026

Abstract. The purpose of this paper is to analyze the problem of controlling the plane-parallel motion of a circular foil in an ideal fluid by changing the intensity of attached sources and rotation of the internal rotor. *Methods.* To develop the mathematical model, use is made of the description of fluid motion based on a complex potential, which allows calculation of the fluid forces acting on the moving body. To solve the control problem, the assumption of the piecewise constant form of control actions is made, which allows the equations of motion to be explicitly integrated by analytical methods. *Results.* Equations of the plane-parallel motion of a circular (generally unbalanced) foil with an arbitrary number of attached sources are derived. The motion of the sources relative to the foil and their intensities are given by explicit functions of time. An explicit integration of the equations of motion is performed for the case of a balanced foil with one attached source for piecewise constant controls. *Conclusion.* Explicit solutions to the equations of motion are used to design gaits for in-place turning and forward movement. An algorithm for moving the foil in the neighborhood of a prescribed trajectory by alternately using elementary gaits is formulated. The proposed algorithm of trajectory control is a constructive proof of the controllability of the system considered. The solution to the control problem obtained in this way can be used as a basis for solving the same problem in the case of smooth controls.

Keywords: the motion control, ideal fluid, circular foil, attached source.

Acknowledgements. The work of E. V. Vetchanin was carried out within the framework of the state assignment of the Ministry of Science and Higher Education of Russia (FEWS-2024-0007). The work of E. M. Artemova was performed at the Ural Mathematical Center (Agreement No. 075-02-2025-1609). The authors thank A. A. Kilin and I. Y. Polekhin for discussion of results, and anonymous reviewers for careful reading of the work and valuable comments.

For citation: Vetchanin EV, Artemova EM. Control of the motion of a circular foil using attached sources and internal mechanisms. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2026;34(2):223–246. DOI: 10.18500/0869-6632-003205

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Для описания движения твердого тела в жидкости используются различные математические модели. Наиболее полное описание строится на основе совместного численного решения уравнений Ньютона–Эйлера и уравнений Навье–Стокса. Данный подход является трудоемким для проведения исчерпывающего анализа динамики системы, однако позволяет получить некоторые полезные результаты относительно корректировки простых математических моделей [1] или идентификации их параметров [2]. Отметим также, что при некоторых допущениях относительно движения твердого тела и его геометрии оказывается возможным полуаналитическое исследование на основе асимптотических методов [3].

Достаточно большой класс моделей, описывающих плоскопараллельное движение твердого тела, может быть получен на основе модели идеальной жидкости. В частности, это модель совместного движения кругового цилиндра и точечных вихрей [4, 5]. В недавних работах рассматривалась задача взаимодействия кругового цилиндра с неподвижной точечной особенностью, в частности, с источником [6–8]. В работе [8] было показано, что при наличии собственной циркуляции у цилиндра динамика системы качественно зависит от типа неподвижной точечной особенности. Качественные отличия возникают и в случае тела эллиптической формы [9].

В работах [6–9] положение точечной особенности предполагалось фиксированным в некоторой неподвижной системе координат. Представляет интерес иная постановка задачи, когда точечная особенность движется вместе с телом на некотором фиксированном расстоянии от него. Такая постановка задачи возникла в недавней работе [10], где рассматривалось движение уравновешенного эллиптического тела с присоединенным вихрем.

В данной работе мы рассматриваем задачу о плоскопараллельном движении кругового профиля с ротором и прикрепленными источниками. Такая система может интерпретироваться как модель реактивного водоструйного движителя. В первую очередь нас будут интересовать частные решения уравнений движения, реализующие элементарные маневры (поворота и продвижения), комбинация которых позволит реализовать произвольное перемещение профиля.

1. Математическая модель

Основные обозначения и допущения. Рассмотрим плоскопараллельное движение неуравновешенного кругового профиля с ротором в присутствии N точечных источников в неограниченном объеме идеальной несжимаемой жидкости. Будем считать, что жидкость совершает потенциальное движение и покоится на бесконечности, а ее движение вокруг профиля является бесциркуляционным.

Для построения математической модели введем следующие обозначения для параметров системы:

- m_c — масса профиля, кг/м;
- I_c — центральный момент инерции профиля, кг · м;
- R — радиус профиля, м;
- σ — расстояние между геометрическим центром профиля и центром масс системы «профиль + ротор», м;
- m_r — масса ротора, кг/м;
- I_r — центральный момент инерции ротора, кг · м;
- Ω — угловая скорость вращения ротора, являющаяся заданной функцией времени, с^{-1} ;
- q_n — интенсивность n -го источника, в общем случае являющаяся заданной функцией времени, $n = 1, \dots, N$, $\text{м}^2/\text{с}$.

Поскольку мы рассматриваем плоскопараллельное движение, то величины m_c , m_r , I_c , I_r считаются отнесенными к единице длины профиля.

Для описания движения рассматриваемой системы введем две системы координат: неподвижную (инерциальную) OXY и подвижную Cxy , жестко связанную с профилем (см. рис. 1). Будем считать, что начало подвижной системы координат C совпадает с геометрическим центром профиля, а центр масс системы лежит на оси Cx .

Положение профиля относительно неподвижной системы координат будем задавать радиус-вектором его геометрического центра $\mathbf{R}_c = (X_c, Y_c)$, а ориентацию профиля — углом ϑ между положительными направлениями осей OX и Cx . Положение n -го источника относительно профиля будем задавать

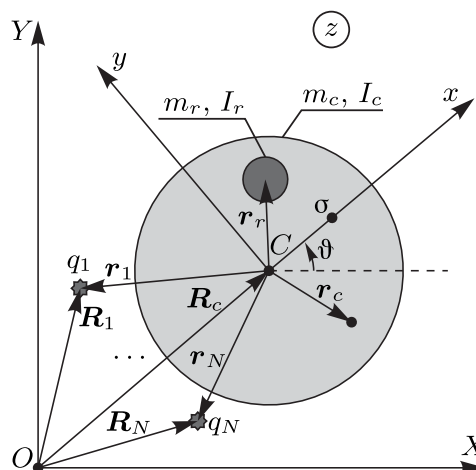


Рис. 1. Схематическое изображение неуравновешенного кругового профиля и точечных источников

Fig. 1. A schematic representation of an unbalanced circular foil and the point sources

радиус-вектором $\mathbf{r}_n = (x_n, y_n)$, записанным в проекциях на оси подвижной системы координат. Величины, задающие конфигурацию системы, показаны на рис. 1.

Замечание 1. Радиус-вектор $\mathbf{R}_n = (X_n, Y_n)$, задающий положение n -го источника относительно неподвижной системы координат, может быть вычислен следующим образом:

$$\mathbf{R}_n = \mathbf{R}_c + \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \mathbf{r}_n.$$

Движение жидкости и ее силовое воздействие. Движение профиля определяется распределением давления по его границе. В свою очередь, в рамках модели потенциального течения идеальной жидкости поле давления связано с распределением скорости и потенциалом течения посредством интеграла Коши–Лагранжа [11]. Для описания движения жидкости каждой точке плоскости Cxy поставим в соответствие комплексное число $z = x + iy$, тогда комплексный потенциал течения может быть записан в виде [11, 12]:

$$W = -\frac{R^2 u}{z} + \sum_{n=1}^N \frac{q_n}{2\pi} \ln(z - z_n) + \sum_{n=1}^N \frac{q_n}{2\pi} \ln\left(\frac{R^2}{z} - \bar{z}_n\right), \quad (1)$$

где $z_n = x_n + iy_n$ – комплекснозначная функция времени, задающая положение n -го источника в подвижной системе координат Cxy . Выражение (1) содержит комплексную величину $u = u_x + iu_y$, составленную из проекций скорости геометрического центра профиля на оси системы координат Cxy .

Главный вектор сил давления (f_x, f_y) , действующих на профиль, в проекциях на подвижные оси может быть вычислен в комплексной форме с помощью метода, предложенного в [13]:

$$f_x + if_y = \frac{i\rho}{2} \oint \left(\frac{dW}{dz}\right)^2 dz + \frac{d}{dt} \left(\rho \frac{dSz^*}{dt} + \rho Su + i\rho \oint z \frac{dW}{dz} dz \right). \quad (2)$$

Здесь ρ – плотность жидкости, кг/м^3 , $S = \pi R^2$ – площадь профиля, произведение Sz^* имеет смысл статического момента площади S и для рассматриваемого профиля равно нулю, интегрирование выполняется вдоль его границы, (\cdot) – комплексное сопряжение, а оператор дифференцирования по времени определен следующим образом:

$$\frac{d(\cdot)}{dt} = \left[\frac{\delta}{\delta t} + i\omega \right] (\cdot),$$

где символ $\frac{\delta}{\delta t}$ обозначает дифференцирование по времени относительно подвижной системы координат, вращающейся с угловой скоростью ω .

Подставив комплексный потенциал (1) в формулу (2) и вычислив интегралы, получим явное представление главного вектора сил давления

$$f_x + if_y = \hat{f}_x + i\hat{f}_y - \rho\pi R^2 \dot{u} - i\rho\pi R^2 \omega u, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \hat{f}_x + i\hat{f}_y = & -\frac{\rho}{2\pi} \left(\left(\sum_{j=1}^N q_j \right) \sum_{n=1}^N \frac{q_n z_n}{|z_n|^2} - \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{q_n q_j z_j}{\bar{z}_n z_j - R^2} \right) + \rho R^2 \sum_{n=1}^N q_n \frac{\bar{u} z_n^2}{|z_n|^4} + \\ & + \rho R^2 \sum_{n=1}^N q_n \frac{\dot{\bar{z}}_n z_n^2}{|z_n|^4} - \rho R^2 \sum_{n=1}^N \dot{q}_n \frac{z_n}{|z_n|^2} - i\rho R^2 \omega \sum_{n=1}^N \frac{q_n z_n}{|z_n|^2}. \quad (4) \end{aligned}$$

Вычисленные таким образом компоненты f_x, f_y отнесены к единице длины цилиндра и имеют размерность Н/м. Последние два слагаемых в выражении (3) определяют реакцию жидкости на ускоренное движение тела, описывают эффект присоединенных масс [14].

Замечание 2. Вычисление главного вектора сил давления может быть выполнено также в вещественной форме

$$f_x = - \oint p dy, \quad f_y = \oint p dx,$$

где давление p определяется с помощью интеграла Коши–Лагранжа. Однако на практике оказываются проще вычисления в комплексной форме с использованием формулы (2), построенной на основе интеграла Коши–Лагранжа.

Отметим, что для кругового профиля момент сил, действующих со стороны жидкости, вычисленный относительно его геометрического центра, равен нулю. С одной стороны, это связано с тем, что в модели идеальной жидкости отсутствуют касательные напряжения. С другой стороны, линии действия сил давления для кругового профиля проходят через его геометрический центр.

Уравнения движения. Следуя известному из динамики твердого тела подходу [15], для построения уравнений движения определим проекции p_x, p_y импульса системы «профиль + ротор + жидкость» на подвижные оси и момент импульса p_θ относительно геометрического центра профиля как

$$p_x = m u_x, \quad p_y = m u_y + (m_c + m_r) \sigma \omega, \quad p_\theta = (m_c + m_r) \sigma u_y + I \omega + k(t), \quad (5)$$

$$m = m_c + m_r + \rho \pi R^2, \quad I = I_c + m_c(x_c^2 + y_c^2) + I_r + m_r(x_r^2 + y_r^2),$$

где $k(t) = I_r \Omega(t)$ – момент импульса ротора, x_c и y_c – компоненты радиус-вектора r_c положения центра масс профиля, x_r и y_r – компоненты радиус-вектора r_r положения центра масс ротора. Отметим, что эффект присоединенных масс учитывается как дополнительный импульс, при этом сама присоединенная масса включается в эффективную массу m в виде третьего слагаемого.

С учетом введенных обозначений и выбора систем координат уравнения движения профиля можно представить в форме уравнений Ньютона–Эйлера:

$$\dot{p}_x = p_y \omega + \hat{f}_x, \quad \dot{p}_y = -p_x \omega + \hat{f}_y, \quad \dot{p}_\theta = p_x u_y - p_y u_x, \quad (6)$$

$$u_x = \frac{p_x}{m}, \quad u_y = \frac{I p_y - (m_c + m_r) \sigma (p_\theta - k(t))}{m I - (m_c + m_r)^2 \sigma^2}, \quad \omega = \frac{-(m_c + m_r) \sigma p_y + m (p_\theta - k(t))}{m I - (m_c + m_r)^2 \sigma^2}.$$

Поскольку выражения для \hat{f}_x и \hat{f}_y зависят от скоростей u_x, u_y, ω , а положения и интенсивности источников считаются заданными функциями времени, то уравнения (6) образуют замкнутую систему уравнений.

Дополним (6) кинематическими соотношениями

$$\dot{Z}_c = u e^{i\theta}, \quad \dot{\theta} = \omega \quad (7)$$

для восстановления траектории движения профиля в абсолютном пространстве. Здесь $Z_c = X_c + i Y_c$ – комплексная координата геометрического центра профиля в неподвижной системе координат.

Далее для описанной системы рассмотрим следующую задачу управления:

переместить профиль из начальной точки в конечную вблизи заданной траектории за счет изменения интенсивностей q_n присоединенных источников (в частности, одного источника) и момента импульса ротора $k(t)$. В начальный и конечный момент движения потребуем, чтобы система находилась в состоянии покоя ($u_x = u_y = 0, \omega = 0, k = 0, q_n = 0, n = 1, \dots, N$).

Отметим, что присоединенный источник можно рассматривать как упрощенную модель водоструйного реактивного двигателя. Положительная интенсивность соответствует выбросу жидкости двигателем, отрицательная — втягиванию жидкости, а нулевая — выключенному двигателю.

2. Точные решения уравнений движения уравновешенного профиля с одним источником

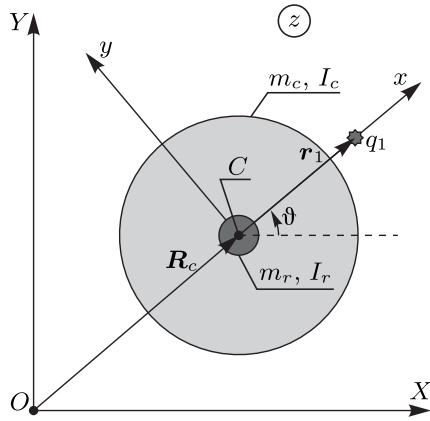


Рис. 2. Схематическое изображение уравновешенного кругового профиля и присоединенного точечного источника

Fig. 2. A schematic representation of a balanced circular foil and an attached point source

Наиболее простым для аналитического исследования и дальнейшего построения алгоритма управления является случай уравновешенного профиля ($\sigma = 0$), в частности, с одним присоединенным источником, расположенным на положительной части оси Cx , то есть $z_1 = r > R$, где r — расстояние между геометрическим центром профиля и источником (см. рис. 2). Для более компактной записи уравнений движения выполним перенормировку

$$\frac{\rho R^2 q_1}{m r^2} \mapsto q_1, \quad (8)$$

тогда уравнения (6) и кинематические соотношения (7) примут вид

$$\dot{p}_x = q_1 p_x + \omega p_y + \beta q_1^2 - m r \dot{q}_1, \quad \dot{p}_y = -\omega p_x - q_1 p_y - m r q_1 \omega, \quad \dot{p}_\vartheta = 0, \quad (9)$$

$$\dot{Z}_c = m^{-1} (p_x + i p_y) e^{i\vartheta}, \quad (10)$$

$$\dot{\vartheta} = \omega. \quad (11)$$

Здесь $\omega = I^{-1} (p_\vartheta - k(t))$, $\beta = \frac{m^2 r^3}{2\pi \rho R^2 (r^2 - R^2)}$.

Из третьего уравнения (9) мы видим, что p_ϑ является первым интегралом:

$$p_\vartheta = f = \text{const}, \quad (12)$$

причем его нулевой уровень соответствует движению из состояния покоя ($\omega = 0$, $k = 0$). Наличие первого интеграла (12) позволяет вместо $k(t)$ рассматривать угловую скорость $\omega(t)$ в качестве нового управления.

Далее рассмотрим кусочно-постоянные управления, которые в общем случае можно записать в следующей форме:

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ \omega \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^M \begin{pmatrix} Q_j \\ \Omega_j \end{pmatrix} (\Theta(t - \tau_j) - \Theta(t - \tau_{j+1})), \quad Q_j = \text{const}, \quad \Omega_j = \text{const}, \quad (13)$$

где $\Theta(t)$ — функция Хевисайда, Q_j , Ω_j — величины управляющих воздействий (интенсивность источника и угловая скорость тела соответственно) на промежутке времени $t \in (\tau_j, \tau_{j+1})$, $j = 1, \dots, M$.

Тогда, во-первых, интегрирование первого уравнения (9) на промежутках $t \in [\tau_j - \varepsilon, \tau_j + \varepsilon]$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ показывает, что импульс p_x в моменты времени τ_j будет изменяться скачком:

$$p_x(\tau_j + 0) = p_x(\tau_j - 0) - mr(Q_j - Q_{j-1}). \quad (14)$$

Во-вторых, на промежутках времени $(\tau_j, \tau_{j+1}]$ уравнение (11) эволюции угла ϑ интегрируется тривиально:

$$\vartheta(t) = \vartheta(\tau_j) + \Omega_j(t - \tau_j), \quad t \in (\tau_j, \tau_{j+1}]. \quad (15)$$

В-третьих, на промежутках времени $(\tau_j, \tau_{j+1}]$ система (9) становится линейной неоднородной системой ОДУ с постоянными коэффициентами, матричная форма записи которой имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}} &= \mathbf{J}\mathbf{p} + \mathbf{b}, \quad t \in (\tau_j, \tau_{j+1}], \quad (16) \\ \mathbf{p} &= \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} Q_j & \Omega_j \\ -\Omega_j & -Q_j \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \beta Q_j^2 \\ -mrQ_j\Omega_j \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Явное решение уравнений (16) в совокупности с (15) позволяет проинтегрировать уравнение движения геометрического центра профиля (10) и найти его движение в абсолютном пространстве.

Вид решения уравнений (16) определяется собственными числами матрицы \mathbf{J} (здесь и далее для краткости у величин Q и Ω опущен индекс j):

$$\lambda^2 = \alpha = Q^2 - \Omega^2 = -\det \mathbf{J}. \quad (17)$$

При этом возможны три качественно различных случая: *гиперболический* $\alpha > 0$, *эллиптический* $\alpha < 0$ и *вырожденный* $\alpha = 0$. Укажем неподвижные точки уравнений (16), их явные решения, а также траектории движения геометрического центра профиля, соответствующие данным решениям.

Неподвижные точки системы. При $\alpha \neq 0$ матрица \mathbf{J} невырождена и у системы (16) всегда существует неподвижная точка

$$\mathbf{p}^* = -\mathbf{J}^{-1}\mathbf{b} = -\frac{mrQ}{\alpha} \begin{pmatrix} \alpha - C^*Q^2 \\ C^*\Omega Q \end{pmatrix}, \quad C^* = 1 - \frac{\beta}{mr} = 1 - \frac{mr^2}{2\rho R^2(r^2 - R^2)}, \quad (18)$$

являющаяся седловой при $\alpha > 0$ и точкой типа центр при $\alpha < 0$.

При $\alpha \rightarrow 0$ в общем случае неподвижная точка (18) уходит на бесконечность. Однако если параметры системы таковы, что $C^* = 0$ (например, при $m = \rho\pi R^2$ и $r = \sqrt{2}R$), то координаты неподвижной точки будут конечными:

$$\mathbf{p}^* = \begin{pmatrix} -mrQ \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

В гиперболическом случае (при $\alpha > 0$) собственные числа матрицы \mathbf{J} являются действительными. Решение уравнений (16) и (10) может быть записано в следующей форме:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t) &= \mathbf{p}^* + C_1 \begin{pmatrix} Q + s\sqrt{\alpha} \\ -\Omega \end{pmatrix} e^{s\sqrt{\alpha}(t-\tau)} + C_2 \begin{pmatrix} \Omega \\ -Q - s\sqrt{\alpha} \end{pmatrix} e^{-s\sqrt{\alpha}(t-\tau)}, \quad (20) \\ \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} &= -\frac{1}{2(\alpha + sQ\sqrt{\alpha})} \begin{pmatrix} -Q - s\sqrt{\alpha} & -\Omega \\ \Omega & Q + s\sqrt{\alpha} \end{pmatrix} (\mathbf{p}(\tau) - \mathbf{p}^*), \quad s = \text{sign } Q, \end{aligned}$$

$$Z(t) = Z(\tau) + e^{i\theta(\tau)} \left(Z^* + \frac{C_1(Q + s\sqrt{\alpha} - i\Omega)}{m(s\sqrt{\alpha} + i\Omega)} \left(e^{(s\sqrt{\alpha} + i\Omega)(t-\tau)} - 1 \right) + \frac{C_2(\Omega - i(Q + s\sqrt{\alpha}))}{m(-s\sqrt{\alpha} + i\Omega)} \left(e^{(-s\sqrt{\alpha} + i\Omega)(t-\tau)} - 1 \right) \right), \quad (21)$$

где

$$Z^* = \frac{p_x^* + ip_y^*}{m} \begin{cases} \frac{e^{i\Omega(t-\tau)} - 1}{i\Omega}, & \Omega \neq 0, \\ t - \tau, & \Omega = 0. \end{cases}$$

Данный случай будет подробно рассмотрен в разделе 3.

В **эллиптическом случае** (при $\alpha < 0$) собственные числа матрицы \mathbf{J} являются чисто мнимыми. Решение уравнений (16) и (10) может быть записано в следующей форме:

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}^* + \begin{pmatrix} C_1\Omega \\ -C_1Q + C_2\sqrt{|\alpha|} \end{pmatrix} \cos \sqrt{|\alpha|}(t - \tau) + \begin{pmatrix} C_2\Omega \\ -C_2Q - C_1\sqrt{|\alpha|} \end{pmatrix} \sin \sqrt{|\alpha|}(t - \tau), \quad (22)$$

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Omega\sqrt{|\alpha|}} \begin{pmatrix} \sqrt{|\alpha|} & 0 \\ Q & \Omega \end{pmatrix} (\mathbf{p}(\tau) - \mathbf{p}^*).$$

$$Z(t) = Z(\tau) + e^{i\theta(\tau)} \left(\frac{p_x^* + ip_y^*}{i\Omega m} \left(e^{i\Omega(t-\tau)} - 1 \right) + \frac{C_1 - iC_2}{2} \cdot \frac{\Omega - \sqrt{|\alpha|} - iQ}{m} \cdot \frac{e^{i(\Omega + \sqrt{|\alpha|})(t-\tau)} - 1}{i(\Omega + \sqrt{|\alpha|})} + \frac{C_1 + iC_2}{2} \cdot \frac{\Omega + \sqrt{|\alpha|} - iQ}{m} \cdot \frac{e^{i(\Omega - \sqrt{|\alpha|})(t-\tau)} - 1}{i(\Omega - \sqrt{|\alpha|})} \right). \quad (23)$$

Данный случай будет подробно изучен в разделе 4.

В **вырожденном случае** (при $\alpha = 0$) матрица \mathbf{J} имеет двукратное нулевое собственное число. Решение уравнений (16) и (10) может быть записано в следующей форме:

$$\mathbf{p}(t) = \left(\frac{\Omega(b_1 + sb_2)t^2}{2} + \Omega C_1 t - C_2 \right) \begin{pmatrix} s \\ -1 \end{pmatrix} + \mathbf{b}t + \begin{pmatrix} C_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s = \text{sign } \Omega Q, \quad (24)$$

$$C_1 = p_x(0) + sp_y(0), \quad C_2 = p_y(0).$$

$$Z(t) = Z(0) + e^{i\theta(\tau)} \left(\frac{\Omega(b_1 + sb_2)}{2} \cdot \frac{s - i}{m} \left(\left(\frac{(t - \tau)^2}{i\Omega} + \frac{2(t - \tau)}{\Omega^2} - \frac{2}{i\Omega^3} \right) e^{i\Omega(t-\tau)} + \frac{2}{i\Omega^3} \right) + \frac{\Omega C_1(s - i) + b_1 + ib_2}{m} \left(\left(\frac{(t - \tau)}{i\Omega} + \frac{1}{\Omega^2} \right) e^{i\Omega(t-\tau)} - \frac{1}{\Omega^2} \right) + \frac{-C_2(s - i) + C_1}{m} \left(\frac{1}{i\Omega} e^{i\Omega(t-\tau)} - \frac{1}{i\Omega} \right) \right). \quad (25)$$

Решение (24), (25) приведено для полноты картины и в дальнейшем рассматриваться не будет.

3. Анализ гиперболического случая

3.1. Основные свойства решения. В гиперболическом случае одна из компонент импульса профиля $p = (p_x, p_y)$ испытывает экспоненциальный рост, а само решение (20) является неустойчивым к малым возмущениям. Кроме того, все траектории (21) движения геометрического центра профиля являются некомпактными, следовательно, невозможно реализовать поворот профиля на месте без смещения его геометрического центра.

Отдельно рассмотрим случай

$$Q < 0, \quad \Omega = 0, \quad p_y = 0, \quad (26)$$

когда вектор импульса эволюционирует вдоль устойчивой сепаратрисы седловой неподвижной точки (18). При этом реализуется прямолинейное движение без неограниченного роста скорости, то есть возможно реализовать *маневр продвижения*, который будет обсуждаться в следующем подразделе.

3.2. Маневр продвижения. Несмотря на неустойчивость (относительно малых возмущений p_y) движения по сепаратрисе $p_y = 0$, укажем условия, выполнение которых позволяет применять его в качестве *маневра продвижения*.

На инвариантном многообразии $p_y = 0$ (при $\omega = 0$) уравнение эволюции p_x примет вид

$$\dot{p}_x = q_1 p_x + \beta q_1^2 - mr \dot{q}_1. \quad (27)$$

Будем считать, что профиль движется в течение промежутка времени $t \in [0, T]$ под действием некоторого управления $q_1(t)$, в частности, кусочно-постоянного. В начальный и конечный моменты времени должны выполняться условия

$$p_x(+0) = -mr q_1(+0), \quad p_x(T-0) = mr q_1(T-0), \quad (28)$$

то есть до начала действия управления профиль покоится, а при выключении управления (его мгновенном обнулении) профиль приводится в состояние покоя.

Оказывается, что второе из условий (28) невозможно удовлетворить при любом законе управления $q_1(t)$. Чтобы это показать, выполним следующие замены:

$$P = p_x + mr q_1, \quad q_1 = \dot{G}, \quad (29)$$

тогда уравнение (27) и условия (28) примут вид

$$\dot{P} = \dot{G}P + (\beta - mr)\dot{G}^2, \quad (30)$$

$$P(0) = P(T) = 0. \quad (31)$$

Здесь G — любая первообразная функции q_1 . Напомним, что $\beta = \frac{m^2 r^3}{2\pi \rho R^2 (r^2 - R^2)}$.

Решение уравнения (30) представляется следующей квадратурой:

$$P = (\beta - mr) \int_0^t \dot{G}^2(\tau) e^{G(t)-G(\tau)} d\tau \quad (32)$$

Начальное условие $P(0) = 0$ выполняется автоматически. Но поскольку подинтегральная функция в (32) неотрицательная, то $P(t) \neq 0$ при любых $t > 0$ и $\beta - mr \neq 0$.

Таким образом, использование движения на инвариантном многообразии $p_y = 0$ (при $\omega = 0$) в качестве *маневра продвижения* возможно, только если параметры системы удовлетворяют соотношению

$$\beta - mr = 0. \quad (33)$$

Отметим, что условие (33) эквивалентно обнулению величины C^* , определенной в (18), и, как было указано выше, реализуется, например, при $m = \rho \pi R^2$ и $r = \sqrt{2}R$.

4. Анализ эллиптического случая

4.1. Основные свойства решения (22), (23). Рассмотрим решение (22), описывающее изменение импульсов p_x и p_y , при условии, что движение осуществляется из состояния покоя ($p_x(-0) = p_y(-0) = 0$) под действием управления

$$q_1 = Q\Theta(t), \quad \omega = \Omega\Theta(t), \quad Q = \text{const}, \quad \Omega = \text{const}, \quad (34)$$

то есть в выражении (13) положено $M = 1$, $Q_1 = Q$, $\Omega_1 = \Omega$, $\tau_1 = 0$, $\tau_2 \rightarrow +\infty$.

Для указанных выше условий при $t > 0$ выражение (22), в зависимости от знаков Q и Ω , задает четыре периодических функции времени с периодом $T = 2\pi/\sqrt{|\alpha|}$, симметричных относительно осей $p_x = 0$, $p_y = 0$ (см. рис. 3). Данные решения для краткости в некоторых случаях будем называть *циклами*. Моменту $t = +0$ в силу (14) соответствует точка

$$p_x = -mrQ, \quad p_y = 0. \quad (35)$$

Для описанных циклов геометрический центр профиля движется либо по квазипериодической, либо по периодической траектории (см. рис. 4). Периодические движения реализуются, если в выражении (23) частоты Ω , $\Omega + \sqrt{|\alpha|}$ и $\Omega - \sqrt{|\alpha|}$ соизмеримы. Это возникает, если параметры Q и Ω управления (34) связаны соотношением:

$$Q^2 = \left(1 - \frac{j^2}{n^2}\right) \Omega^2, \quad j, n \in \mathbb{N}, \quad j < n. \quad (36)$$

При этом период обращения по траектории равен $T_Z = \frac{2\pi n}{\Omega} = \frac{2\pi(n \pm j)}{\Omega \pm \sqrt{|\alpha|}}$.

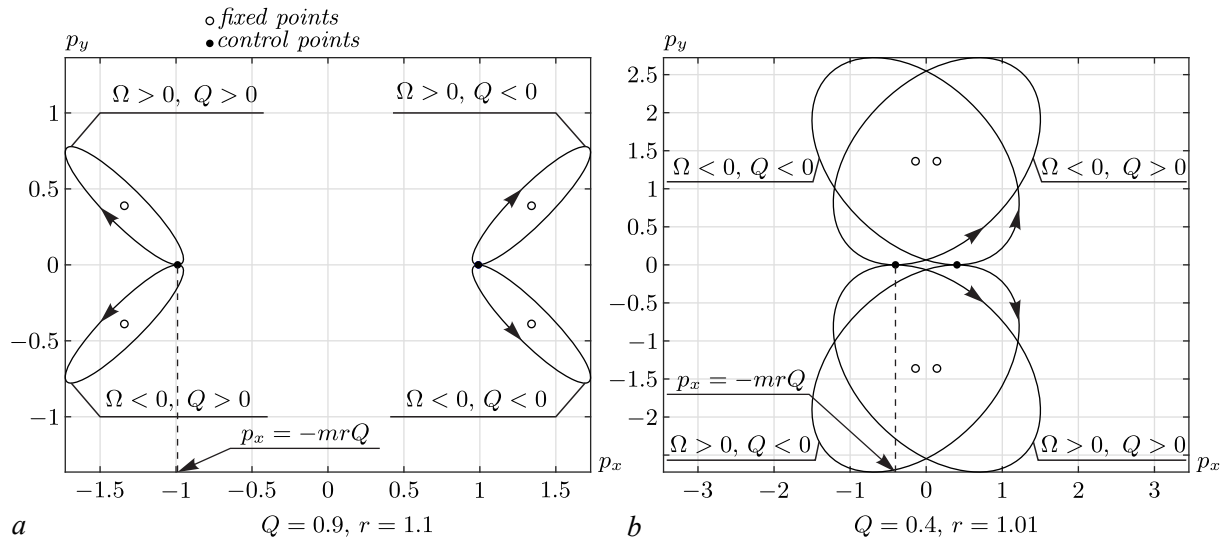


Рис. 3. Примеры симметричных друг другу периодических решений, задаваемых (22), для закона управления (34). Значения параметров $\rho = 1$, $m = 1$, $R = 1$

Fig. 3. Examples of symmetric periodic solutions given by (22), under the control (34). Parameter values: $\rho = 1$, $m = 1$, $R = 1$

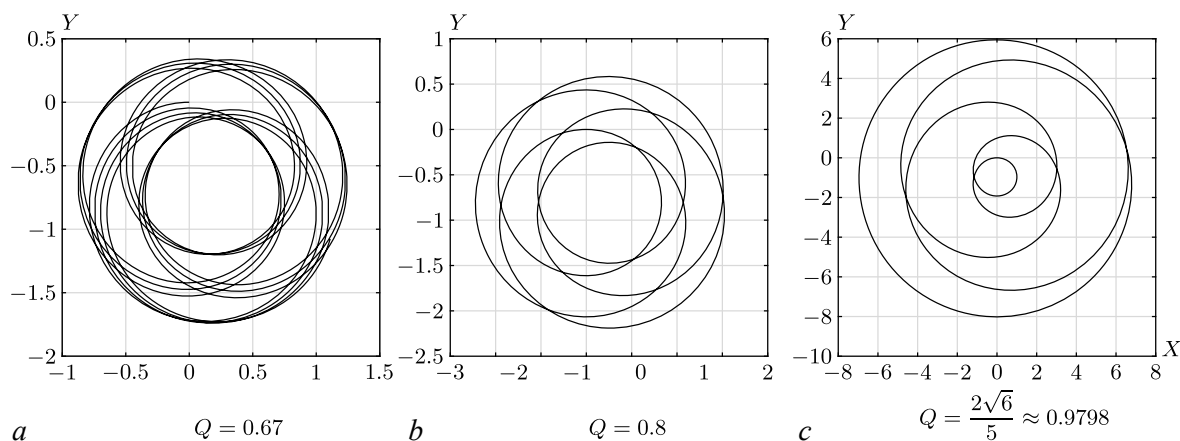


Рис. 4. Примеры траекторий движения при $\Omega = 1$ и различных значениях Q . Значения параметров: $m = 1, I = 0.5, \rho = 1, R = 1, r = 1.1, \vartheta(0) = 0$

Fig. 4. Examples of trajectories for $\Omega = 1$ and different values of Q . Parameter values: $m = 1, I = 0.5, \rho = 1, R = 1, r = 1.1, \vartheta(0) = 0$

4.2. Маневр поворота на месте. Выше было указано, что в общем случае траектории движения геометрического центра профиля являются компактными (см. примеры на рис. 4). Отдельно выделяется случай $Q = 0$, когда одна из частот $\Omega \pm \sqrt{|\alpha|}$, входящих в выражение для траектории (23), обнуляется.

При $Q = 0$ решение (22), (23) примет вид

$$\mathbf{p}(t) = \begin{pmatrix} \cos \omega(t - \tau) & \sin \omega(t - \tau) \\ -\sin \omega(t - \tau) & \cos \omega(t - \tau) \end{pmatrix} \mathbf{p}(\tau), \quad (37)$$

$$Z(t) = Z(\tau) + e^{i\vartheta(\tau)} \frac{p_x(\tau) + ip_y(\tau)}{m} (t - \tau), \quad (38)$$

$$\vartheta(t) = \vartheta(\tau) + \omega(t - \tau), \quad (39)$$

что соответствует равномерному вращению профиля вокруг его геометрического центра, движущегося прямолинейно с постоянной скоростью. Здесь τ — некоторый начальный момент времени.

В частном случае при $\mathbf{p}(\tau) = 0$ профиль будет равномерно вращаться вокруг неподвижного геометрического центра. Данный режим движения может быть использован в качестве *маневра для изменения ориентации профиля*. Физически данный маневр выполняется только за счет вращения ротора и основан на законе сохранения момента импульса системы (12). Благодаря соотношению (12) может быть найден момент импульса ротора k (и, соответственно, его угловая скорость Ω), обеспечивающий вращение профиля с требуемой угловой скоростью ω .

Замечание 3. Отметим, что в эллиптическом случае некомпактные траектории возможны только при нулевой интенсивности источника. Запишем условие возникновения резонанса, то есть обращения в ноль частот $\Omega \pm \sqrt{|\alpha|}$, входящих в (23):

$$\Omega \pm \sqrt{|\alpha|} = \Omega \pm \sqrt{\Omega^2 - Q^2} = \frac{Q^2}{\Omega \mp \sqrt{\Omega^2 - Q^2}} = 0.$$

Полученное выражение обращается в ноль только при $Q = 0$.

4.3. Маневры продвижения. Периодичность изменения импульсов (22), а также симметрия данного решения относительно смены знаков Q и Ω позволяют реализовать несколько маневров продвижения. Начнем обсуждение с наиболее простого.

1. Рассмотрим управление вида¹

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ \omega \end{pmatrix} = (\Theta(t) - \Theta(t - T)) \begin{pmatrix} Q \\ \Omega \end{pmatrix}, \quad Q = \text{const}, \quad \Omega = \text{const}, \quad T = \frac{2\pi}{\sqrt{|\alpha|}}, \quad (40)$$

время действия которого совпадает с периодом T изменения импульсов p_x и p_y . Для определенности будем считать, что $Q > 0$ и $\Omega > 0$.

Если до момента включения управления профиль покоится, то в силу (14) при $t = 0$ импульс испытает скачок и примет значение

$$\mathbf{p}(+0) = (-mrQ, 0). \quad (41)$$

Далее в течение времени действия управления вектор \mathbf{p} опишет эллиптическую кривую и вернется к значению (41). При $t = T$ происходит обнуление управляющих воздействий (40), а первая компонента вектора импульса испытает скачок на величину

$$\mathbf{p}(T + 0) = \mathbf{p}(T - 0) + (mrQ, 0), \quad (42)$$

что приведет профиль в состояние покоя. Все описанные этапы изменения вектора импульса проиллюстрированы на рис. 5.

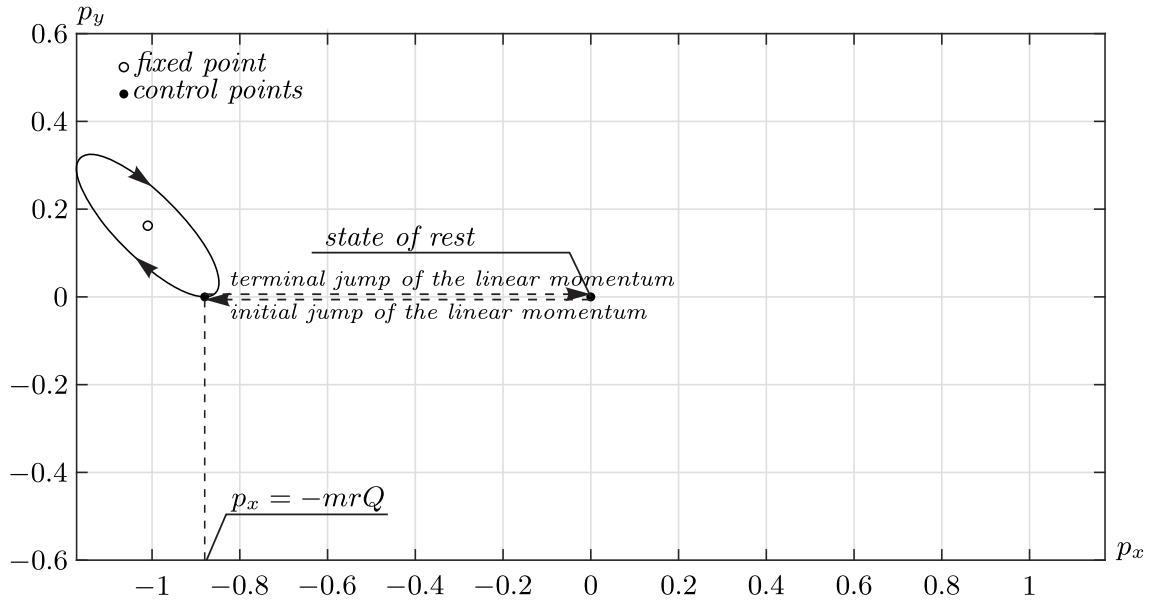


Рис. 5. Изменение вектора импульса под действием управления (40). Значения параметров: $m = 1$, $\rho = 1$, $R = 1$, $r = 1.1$, $Q = 0.8$, $\Omega = 1$

Fig. 5. Changes in the linear momentum vector under the control (40). Parameter values: $m = 1$, $\rho = 1$, $R = 1$, $r = 1.1$, $Q = 0.8$, $\Omega = 1$

¹Данный закон управления получается, если в (13) положить $M = 1$, $Q_1 = Q$, $\Omega_1 = \Omega$, $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = T$.

Далее, используя (23), вычислим смещение геометрического центра профиля под действием управления (40). Оказывается, данная величина может быть записана как функция от соотношения $g = Q/\Omega$:

$$\Delta Z = Z(T) - Z(0) = 2\sigma \exp\left(i\left(\vartheta(0) + \frac{\pi}{\sqrt{1-g^2}} + \frac{\pi}{2}\right)\right) \sin \frac{\pi}{\sqrt{1-g^2}}, \quad (43)$$

$$\sigma = r \left(\frac{2mr^2 - 4\rho R^2(r^2 - R^2)}{2\rho R^2(r^2 - R^2)} + i \frac{mr^2 g}{2\rho R^2(r^2 - R^2)} \right).$$

На рис. 6 представлена зависимость $|\Delta Z|$ от g , а также примеры траекторий движения геометрического центра профиля для некоторых значений g . Величина $|\Delta Z|$ обращается в ноль при

$$g = \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{n}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (44)$$

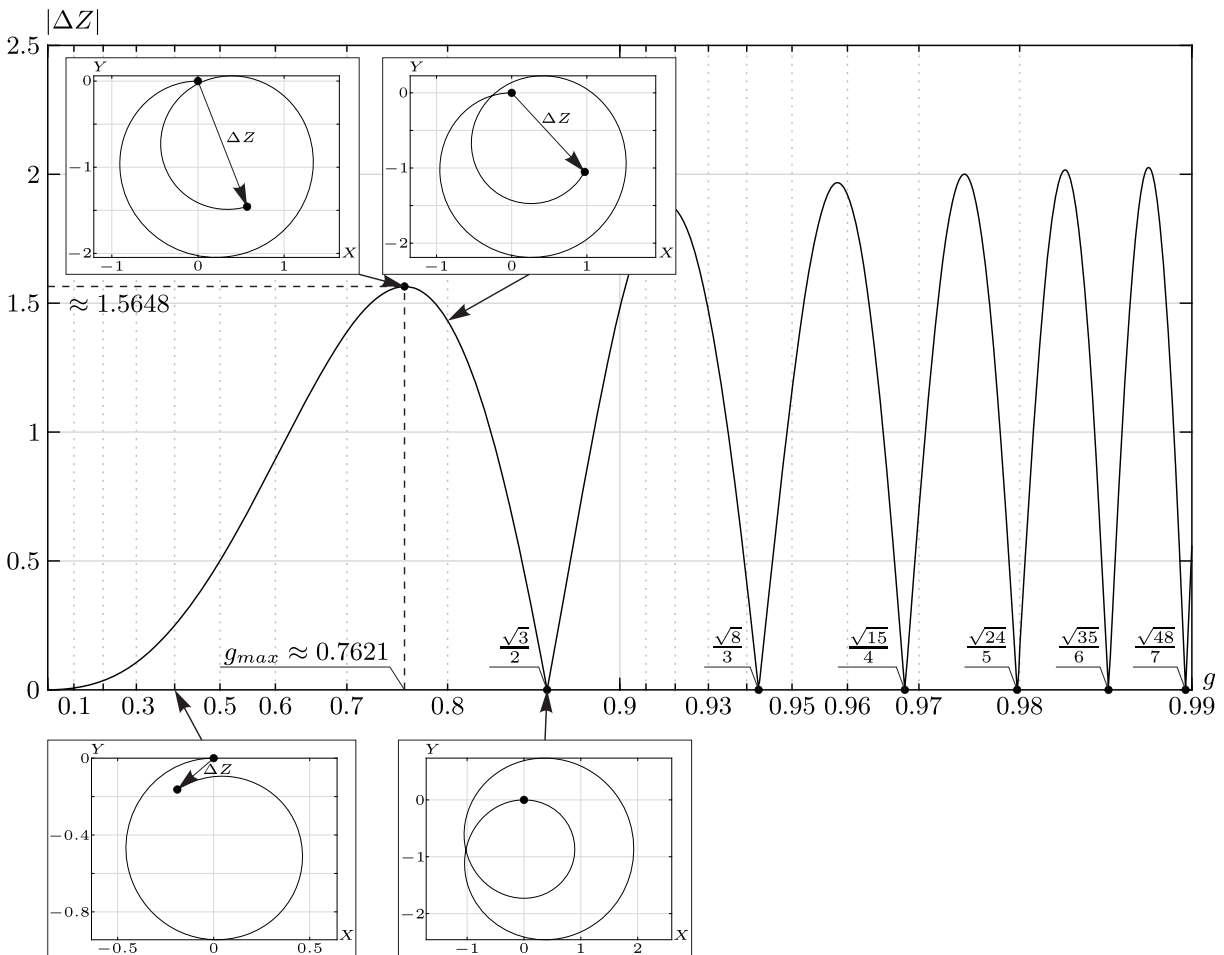


Рис. 6. Зависимость $|\Delta Z|$ от g и примеры траекторий движения геометрического центра профиля для управления (40). Значения параметров: $m = 1, \rho = 1, R = 1, r = 1.1, \vartheta(0) = 0$

Fig. 6. Dependence of $|\Delta Z|$ on g and examples of trajectories of the geometric center of the foil for the control (40). Parameter values: $m = 1, \rho = 1, R = 1, r = 1.1, \vartheta(0) = 0$

что соответствует соотношению (36) при $j = 1$ и $n > 1$. Значение $n = 1$ соответствует маневру поворота на месте. Приведенная зависимость имеет счетное количество максимумов. Положение первого максимума обозначим g_{\max} , а соответствующую ему величину продвижения — S_{\max} .

Мы видим, что за счет выбора значений Q и Ω можно переместить геометрический центр профиля в заданном направлении на заданное расстояние, не превосходящее некоторой предельной величины. В частности, в примерах, представленных в разделе 5, мы будем рассматривать только ситуацию, когда $g \in [0, g_{\max}]$. Также из выражения (43) видно, что направление перемещения может быть задано за счет выбора начальной ориентации профиля $\vartheta(0)$.

Таким образом, описанное движение, возникающее под действием управления (40), может использоваться в качестве *маневра продвижения*.

2. Для построения еще одного маневра продвижения обратимся к симметрии решения (22) относительно смены знака Q . Для определенности будем считать $\Omega > 0$. Переход между циклами, изображенными в верхней полуплоскости рис. 3, *a* или нижней полуплоскости рис. 3, *b*, возможен за счет смены знака Q (для определенности с положительного на отрицательный) при использовании кусочно-постоянного управления вида²:

$$\begin{aligned} q_1 &= Q (\Theta(t) - \Theta(t - t_s)) - Q (\Theta(t - t_s) - \Theta(t - 2t_s)), \\ \omega &= \Omega (\Theta(t) - \Theta(t - 2t_s)). \end{aligned} \quad (45)$$

Здесь момент переключения t_s находится из условия $p_x(t_s) \Big|_{Q>0, \Omega>0} = -mrQ$ и задается выражением

$$t_s = \frac{2}{\sqrt{|\alpha|}} \left(\pi - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{|\alpha|}}{Q} \right). \quad (46)$$

В начальный момент при включении управления (45) профиль приобретает импульс

$$\mathbf{p} = (-mrQ, 0), \quad (47)$$

который в течение промежутка времени $t \in (0, t_s)$ изменяется непрерывно по закону (22). В момент времени $t = t_s$ компонента импульса p_x принимает свое начальное значение, но при смене знака q_1 получает приращение

$$p_x(t_s + 0) = p_x(t_s - 0) + 2mrQ = mrQ \quad (48)$$

и меняет знак на противоположный. Здесь происходит переход на симметричный к предыдущему цикл, при движении по которому в течение промежутка времени $t \in (t_s, 2t_s)$ импульс приходит к значению

$$\mathbf{p} = (mrQ, 0). \quad (49)$$

В момент времени $t = 2t_s$ происходит обнуление управляющих воздействий, вследствие чего составляющая импульса p_x претерпевает скачок

$$p_x(2t_s + 0) = p_x(2t_s - 0) - mrQ = 0 \quad (50)$$

и профиль переходит в состояние покоя. Описанные этапы изменения импульсов проиллюстрированы на рис. 7.

²Данный закон управления получается, если в (13) положить $M = 2$, $Q_1 = Q$, $Q_2 = -Q$, $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$, $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = t_s$, $\tau_3 = 2t_s$.

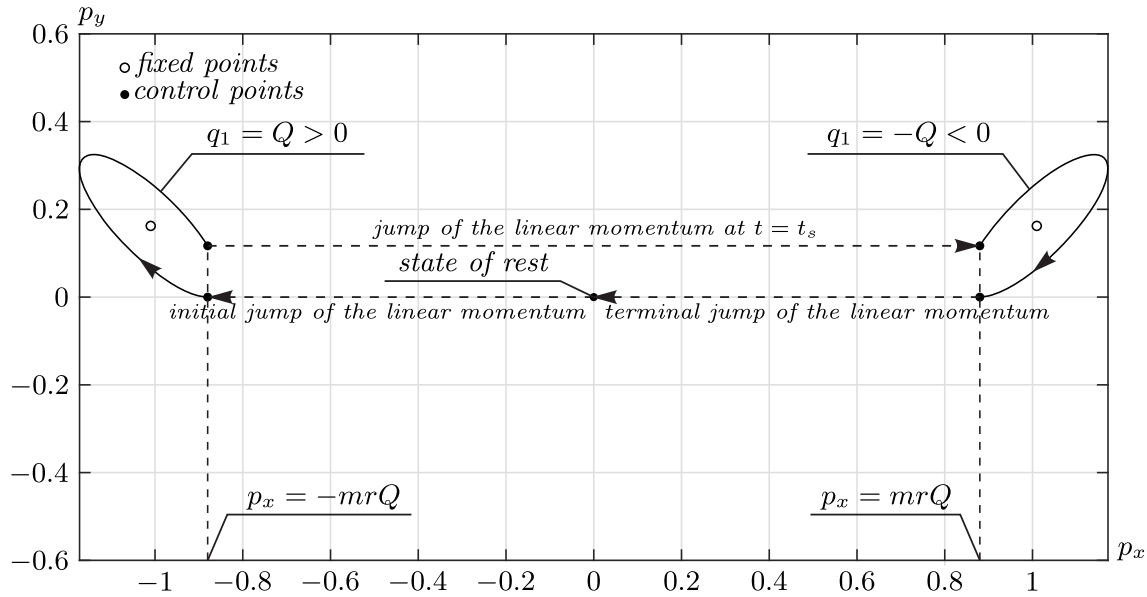


Рис. 7. Изменение вектора импульса под действием управления (45). Значения параметров: $m = 1$, $\rho = 1$, $R = 1$, $r = 1.1$, $Q = 0.8$, $\Omega = 1$

Fig. 7. Changes in the linear momentum vector under the control (45). Parameter values: $m = 1$, $\rho = 1$, $R = 1$, $r = 1.1$, $Q = 0.8$, $\Omega = 1$

Траектория движения геометрического центра профиля для управления (45) вследствие скачка p_x будет иметь точку возврата (cusp). Аналитическое выражение для зависимости перемещения ΔZ от g будет иметь более громоздкий вид и здесь не приводится. На рис. 8 приведен вид зависимости $|\Delta Z|$ от g . По сравнению с предыдущим вариантом управления данная зависимость имеет более сложный вид. Нули $|\Delta Z|$ соответствуют периодическим движениям геометрического центра профиля. Также на рис. 8 приведены примеры траекторий, реализующиеся при некоторых значениях g .

Как видно из рис. 8, управление (45) позволяет выполнить перемещение профиля на заданное расстояние при подходящем выборе значений Q и Ω . Требуемое направление перемещения обеспечивается выбором угла $\vartheta(0)$.

Замечание 4. При изменении в управлениях (45) знака угловой скорости на противоположный

$$\begin{aligned} q_1 &= Q (\Theta(t) - \Theta(t - t_s)) - Q (\Theta(t - t_s) - \Theta(t - 2t_s)), \quad Q > 0, \\ \omega &= -\Omega (\Theta(t) - \Theta(t - 2t_s)), \quad \Omega > 0 \end{aligned} \quad (51)$$

получается маневр, схожий с описанным.

3. При обращении в управлении (45) знака q_1 , то есть³

$$\begin{aligned} q_1 &= -Q (\Theta(t) - \Theta(t - t_s)) + Q (\Theta(t - t_s) - \Theta(t - 2t_s)), \quad Q > 0, \\ \omega &= \Omega (\Theta(t) - \Theta(t - 2t_s)), \quad \Omega > 0 \end{aligned} \quad (52)$$

³ Данный закон управления получается, если в (13) положить $M = 2$, $Q_1 = -Q$, $Q_2 = Q$, $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$, $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = t_s$, $\tau_3 = 2t_s$.

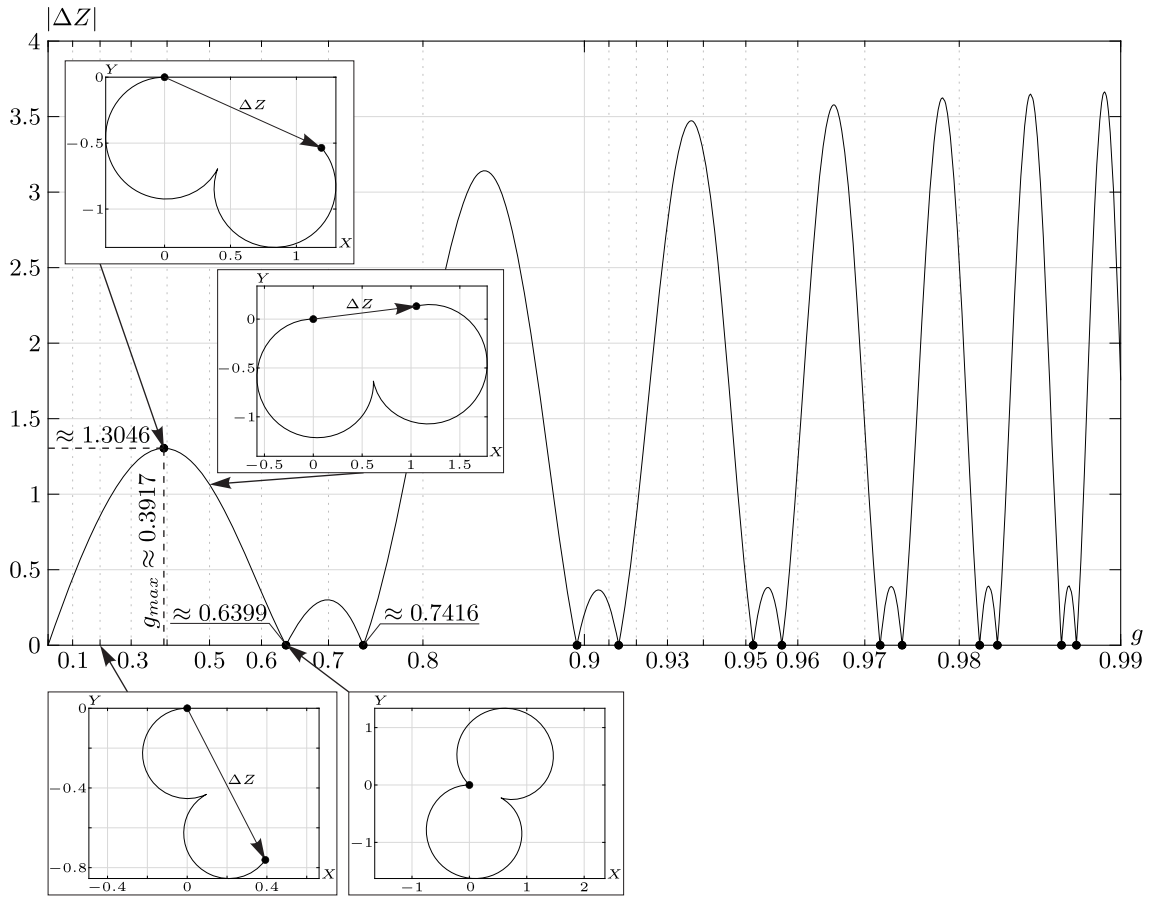


Рис. 8. Зависимость $|\Delta Z|$ от g и примеры траекторий движения геометрического центра профиля для управления (45). Значения параметров: $m = 1, \rho = 1, R = 1, r = 1.1, \vartheta(0) = 0$

Fig. 8. Dependence of $|\Delta Z|$ on g and examples of trajectories of the geometric center of the foil for the control (45). Parameter values: $m = 1, \rho = 1, R = 1, r = 1.1, \vartheta(0) = 0$

возникает еще один маневр продвижения. Здесь момент переключения t_s находится из условия $p_x(t_s) \Big|_{Q < 0, \Omega > 0} = -mrQ$ и задается выражением

$$t_s = \frac{2}{\sqrt{|\alpha|}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{|\alpha|}}{Q}. \quad (53)$$

Для управления (52) импульсы p_x и p_y изменяются, как показано на рис. 9.

Зависимость величины перемещения $|\Delta Z|$ геометрического центра профиля для закона управления (52) от параметра g будет качественно отличаться от приведенных выше. Данная зависимость является монотонной (см. рис. 10), однако траектории движения профиля будут качественно схожи с траекториями для предыдущего маневра с законом управления (45) и имеют точку возврата, соответствующую скачку импульса.

Замечание 5. При изменении в управлениях (52) знака угловой скорости на противоположный

$$\begin{aligned} q_1 &= -Q(\Theta(t) - \Theta(t - t_s)) + Q(\Theta(t - t_s) - \Theta(t - 2t_s)), \quad Q > 0, \\ \omega &= -\Omega(\Theta(t) - \Theta(t - 2t_s)), \quad \Omega > 0 \end{aligned} \quad (54)$$

получается маневр, схожий с описанным.

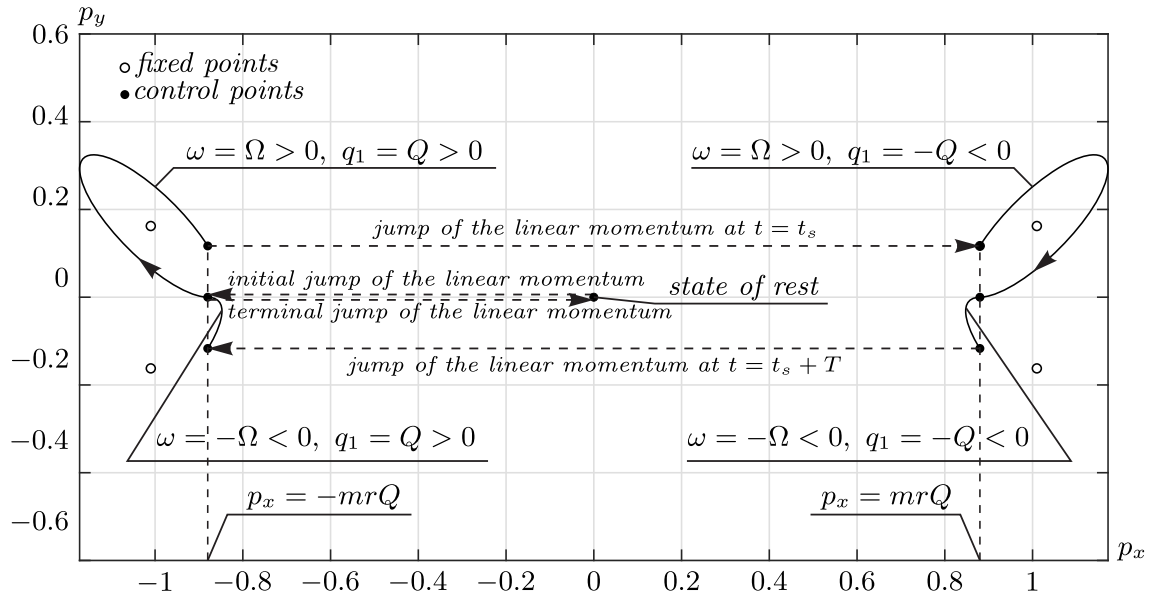


Рис. 11. Изменение вектора импульса под действием управления (55). Значения параметров: $m = 1$, $\rho = 1$, $R = 1$, $r = 1.1$, $Q = 0.8$, $\Omega = 1$

Fig. 11. Changes in the linear momentum vector under the control (55). Parameter values: $m = 1$, $\rho = 1$, $R = 1$, $r = 1.1$, $Q = 0.8$, $\Omega = 1$

4. Последний из маневров продвижения, который будет приведен в данном разделе, возникает под действием управления⁴

$$\begin{aligned}
 q_1 &= Q(\Theta(t) - \Theta(t-t_s)) - Q(\Theta(t-t_s) - \Theta(t-t_s-T)) + Q(\Theta(t-t_s-T) - \Theta(t-2T)), \\
 \omega &= \Omega(\Theta(t) - \Theta(t-2t_s)) - \Omega(\Theta(t-t_s) - \Theta(t-2T)).
 \end{aligned}
 \tag{55}$$

Здесь время t_s находится по формуле (46).

Под действием управления (55) импульсы p_x и p_y изменяются, как показано на рис. 11. По сути, рассматриваемый маневр является комбинацией маневров двух предыдущих типов.

На рис. 12 приведена зависимость величины перемещения $|\Delta Z|$ от g . Мы видим, что приведенная зависимость не имеет нулей при $g > 0$, то есть под действием управления (55) не возникает периодических траекторий. Отметим, для управления (55) траектории будут иметь точку перегиба (см. примеры на рис. 12). Данная точка соответствует смене знака угловой скорости.

Предложенные выше маневры продвижения выполняются за счет использования обоих управляющих воздействий (одновременного вращения ротора и работы источника/стока, реализующего либо выброс жидкости, либо ее втягивание). Некоторые из предложенных маневров продвижения предполагают изменение знака интенсивности источника, что физически соответствует переключению с выбрасывания жидкости на втягивание и обратно. В последнем из предложенных маневров используется также изменение угловой скорости на противоположное, что подразумевает смену направления вращения ротора.

⁴Данный закон управления получается, если в (13) положить $M = 4$, $Q_1 = Q_4 = Q$, $Q_2 = Q_3 = -Q$, $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$, $\Omega_3 = \Omega_4 = -\Omega$, $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = t_s$, $\tau_3 = 2t_s$, $\tau_4 = t_s + T$, $\tau_5 = 2T$.

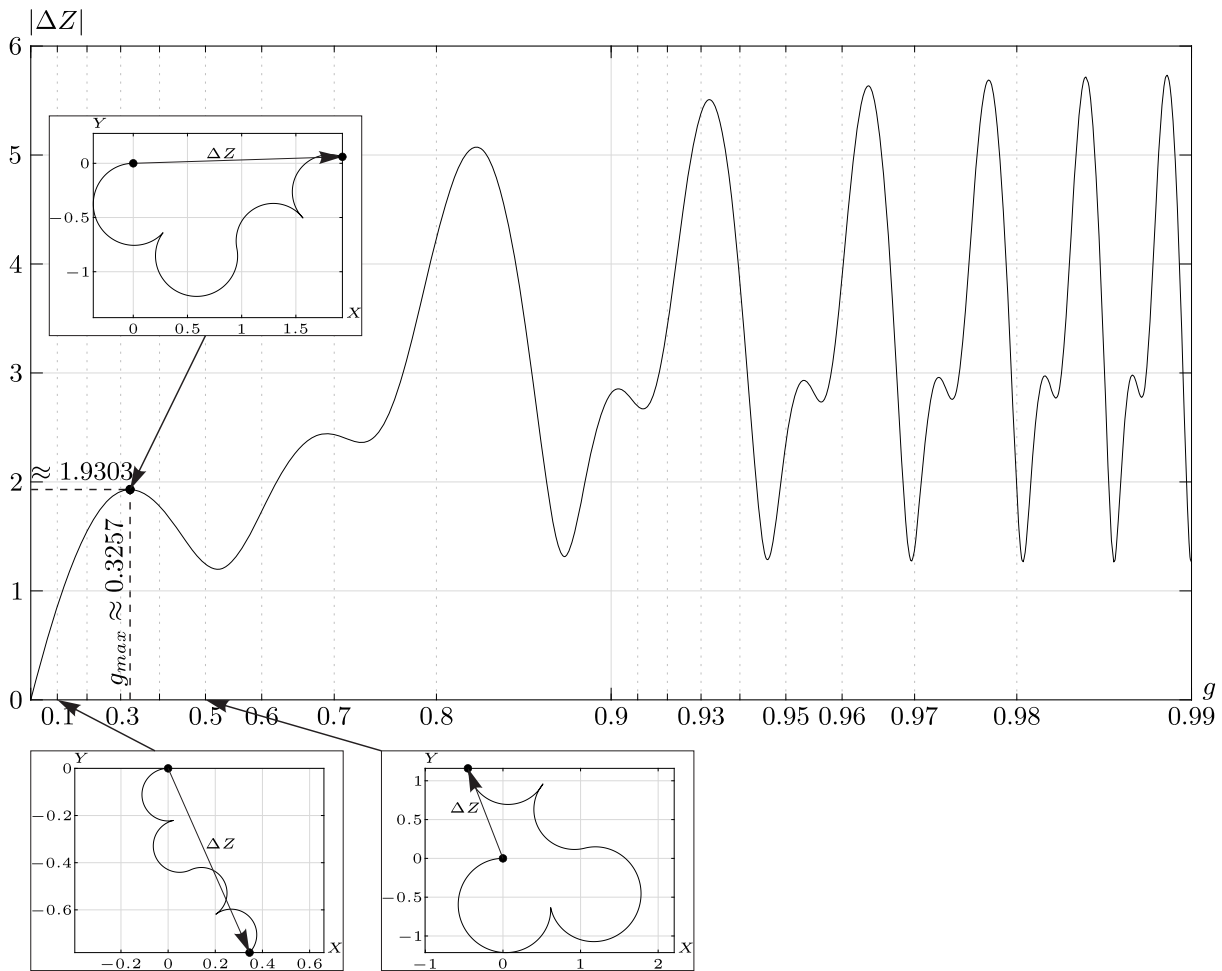


Рис. 12. Зависимость $|\Delta Z|$ от g и примеры траекторий движения геометрического центра профиля для управления (55). Значения параметров: $m = 1, \rho = 1, R = 1, r = 1.1, \vartheta(0) = 0$

Fig. 12. Dependence of $|\Delta Z|$ on g and examples of trajectories of the geometric center of the foil for the control (55). Parameter values: $m = 1, \rho = 1, R = 1, r = 1.1, \vartheta(0) = 0$

5. Алгоритм управления

Рассмотренные в разделах 4.2 и 4.3 маневры поворота и продвижения позволяют построить алгоритм управления движением профиля в окрестности заданной траектории, что решает задачу, сформулированную в разделе 1. Напомним, что в гиперболическом случае (см. раздел 3) не удастся реализовать маневр поворота на месте. Кроме того, маневр продвижения возможен только при ограничении (33) на значения параметров системы. Поэтому гиперболический случай далее не будет использоваться при построении алгоритма управления.

Пусть задана траектория $\gamma: (X(s), Y(s))$, где s — параметр кривой, в окрестности которой необходимо переместить профиль из начальной точки в конечную. Выберем на кривой γ некоторым образом точки $X_j = X(s_j), Y_j = Y(s_j)$. Перемещение между соседними точками может быть выполнено с помощью любого из описанных выше маневров продвижения, то есть управлений вида (40), (45), (52) или (55). Однако расстояние между этими точками не должно превосходить некоторой предельной величины, определяемой выбранным маневром и параметрами системы. В частности, мы будем рассматривать только значения $g \leq g_{\max}$.

Для определения параметров управлений Q и Ω необходимо решить нелинейное уравнение

$$|\Delta Z(g_j)| = \sqrt{(X_{j+1} - X_j)^2 + (Y_{j+1} - Y_j)^2} \quad (56)$$

относительно g_j . Поскольку $|\Delta Z|$ зависит от соотношения $g = Q/\Omega$, то для выполнения маневра продвижения значение угловой скорости $\Omega = \Omega_j$ может быть выбрано произвольно, тогда интенсивности $Q_j = g_j \Omega_j$.

После определения параметров управления Q_j и Ω_j необходимо переориентировать профиль для продвижения в нужном направлении. Для нахождения начальной ориентации ϑ_j профиля необходимо решить уравнение

$$\arg \Delta Z(\vartheta_j) \Big|_{g=g_j} = \arg ((X_{k+1} - X_k) + i(Y_{k+1} - Y_k)). \quad (57)$$

Доворот профиля до необходимого положения может быть выполнен с помощью маневра поворота, описанного в разделе 4.2.

В качестве одного из примеров зададим следующую траекторию движения:

$$X = a \cos s, \quad Y = b \sin s, \quad s \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad s \Big|_{t=0} = 0, \quad (58)$$

которую разобьем на четыре части. На рис. 13 приведены траектории движения профиля, реализованные с помощью различных маневров продвижения.

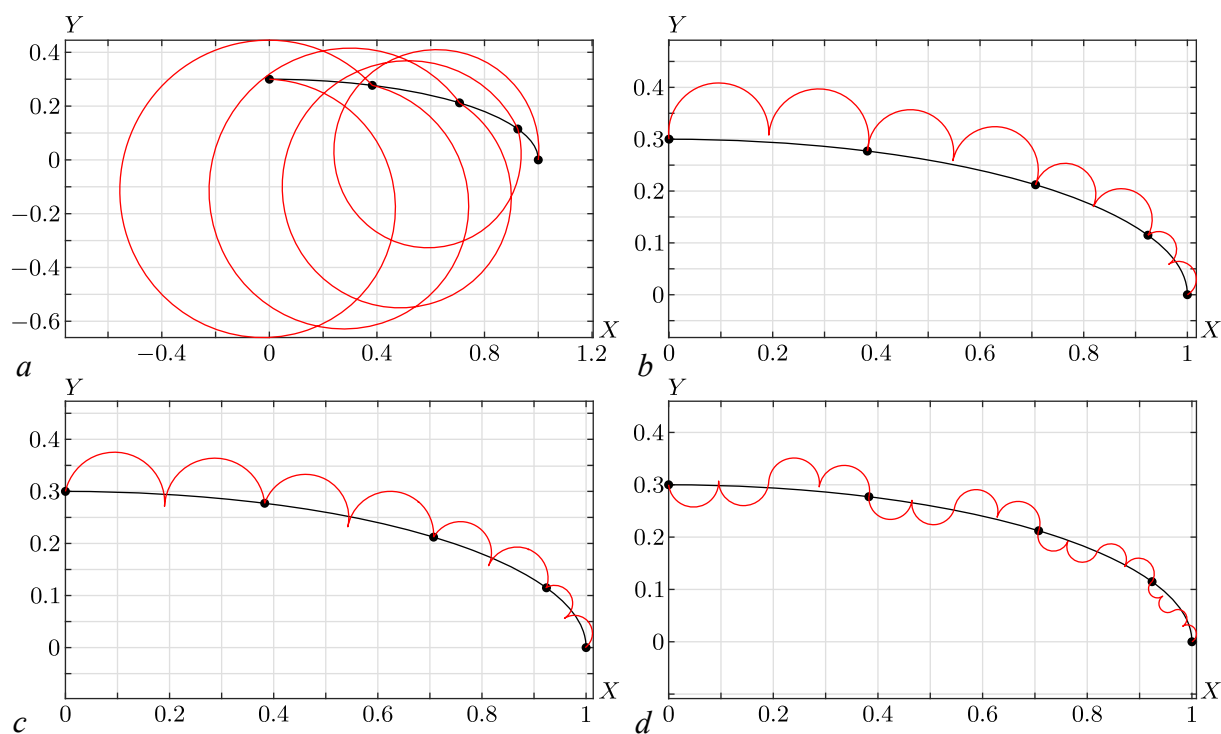


Рис. 13. Траектории, реализованные с помощью управления (40) (a), управления (45) (b), управления (52) (c), управления (55) (d), в окрестности кривой (58). Значения параметров: $m = 1$, $\rho = 1$, $R = 1$, $r = 1.1$

Fig. 13. Trajectories generated by control (40) (a), control (45) (b), control (52) (c), control (55) (d) in a neighborhood of the curve (58). Parameter values: $m = 1$, $\rho = 1$, $R = 1$, $r = 1.1$

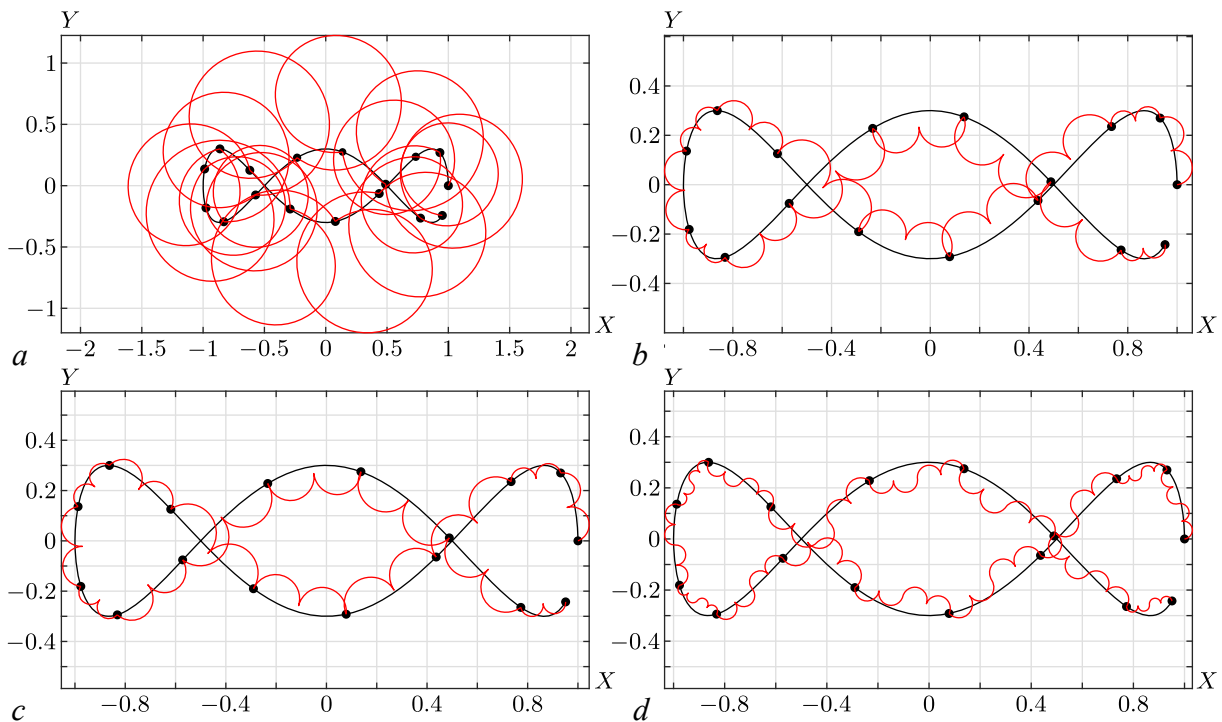


Рис. 14. Траектории, реализованные с помощью управления (40) (a), управления (45) (b), управления (52) (c), управления (55) (d), в окрестности кривой (59). Значения параметров: $m = 1$, $\rho = 1$, $R = 1$, $r = 1.1$

Fig. 14. Trajectories generated by control (40) (a), control (45) (b), control (52) (c), control (55) (d) in a neighborhood of the curve (59). Parameter values: $m = 1$, $\rho = 1$, $R = 1$, $r = 1.1$

Использование управления (40) для реализации маневра продвижения приводит к возникновению спиралевидной траектории. При этом профиль удаляется от заданной траектории на величину, соизмеримую с ее длиной. Наиболее близкая к заданной траектория реализуется при использовании управления (55).

В качестве еще одного примера зададим следующую траекторию:

$$X = a \cos s, \quad Y = b \sin 3s, \quad s \in [0, 1.9\pi], \quad s|_{t=0} = 0. \quad (59)$$

На рис. 14 приведены траектории движения профиля, реализованные с помощью различных маневров продвижения.

Из рис. 14 видно, что предложенный подход с применением управлений (45), (52), (55) для продвижения обеспечивает движение профиля в окрестности траекторий даже сложной формы.

Заключение

Предложенный в данной работе алгоритм управления перемещением уравновешенного кругового профиля в окрестности заданной траектории основан на кусочно-постоянном изменении интенсивности присоединенного источника и угловой скорости. Несмотря на простоту, использование управлений такого вида позволило свести решение рассмотренной задачи к анализу явных решений уравнений движения.

Проведенный в работе анализ может быть легко обобщен и на случай нескольких присоединенных источников, который также приводит к интегрированию системы линейных дифференци-

альных уравнений с постоянными коэффициентами относительно скоростей и явным квадратурам для траектории движения.

Дальнейшее развитие представленного исследования может быть осуществлено в следующих направлениях:

1. Изучение управляемости уравновешенного кругового профиля в случае кусочно-гладких управлений.

Эта задача будет сводиться к анализу неоднородной системы линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, решение которой может быть построено в виде квадратур или численно. Первый этап анализа будет заключаться в установлении ограничений на параметры управлений, обеспечивающих остановку при их отключении, и построении зависимости ΔZ от этих параметров. Дальнейшее решение задачи траекторного управления и конструктивное доказательство управляемости можно выполнить по аналогии с данной работой.

Отметим, что гладкие управления могут быть построены по-разному, например, в виде кусочных полиномов в классе функций C^1 и более высокой гладкости, на основе тригонометрических функций, а также в форме схожей с (13):

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ \omega \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^M \begin{pmatrix} Q_j \\ \Omega_j \end{pmatrix} \frac{\tanh(k(t - \tau_j)) - \tanh(k(t - \tau_{j+1}))}{2}, \quad Q_j = \text{const}, \quad \Omega_j = \text{const}.$$

Здесь параметр k регулирует плавность переключения интенсивностей управляющих воздействий. Ожидается, что при $k \gg 1$ результаты будут близки к полученным в данной статье.

2. Исследование управляемости неуравновешенного кругового профиля и профилей некруговой формы, например, эллиптической.

Решение данных задач приводит к анализу системы нелинейных дифференциальных уравнений, явный вид которых для кругового профиля приведен в разделе 1. Для построения уравнений движения некруговых профилей необходимо будет вычислить комплексный потенциал движения жидкости, найти силу и момент сил давления, действующих на тело. Анализ управляемости для данных задач (независимо от выбора формы управляющих воздействий) будет также сводиться к решению проблемы остановки при отключении управлений, поиску элементарных маневров и построению зависимости ΔZ от параметров управления.

3. Исследование эффективности предложенного алгоритма управления согласно какому-либо критерию качества (быстродействие или энергоэффективность) при возможных ограничениях на интенсивности. Отметим, что при решении данной задачи может быть использован подход, рассмотренный в [16].

4. Учет диссипативных и инерционных свойств среды в математической модели.

Математическая модель данной задачи может быть основана на включении в уравнения движения линейных или квадратичных по скоростям слагаемых [17].

Список литературы

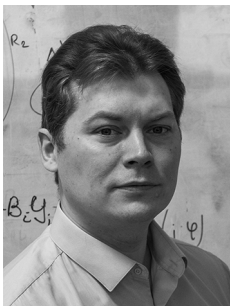
1. *Vetchanin E. V., Valieva A. R.* Analysis of the force and torque arising during the oscillatory motion of a Joukowski foil in a fluid // *Rus. J. Nonlin. Dyn.* 2024. Vol. 20, no. 1. P. 79–93. DOI: 10.20537/nd231210.
2. *Борисов А. В., Кузнецов С. П., Мамаев И. С., Тененев В. А.* Описание движения тела эллиптического сечения в вязкой несжимаемой жидкости с помощью модельных уравнений, реконструированных на основе обработки данных // *Письма в ЖТФ.* 2016. Т. 42, № 17. С. 9–19.

3. *Анисимов В. Д., Егоров А. Г., Нуриев А. Н., Зайцева О. Н.* Пропульсивное движение цилиндрического виброробота в вязкой жидкости // Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки. 2024. Т. 166, № 3. С. 277–296. DOI: 10.26907/2541-7746.2024.3.277-296.
4. *Borisov A. V., Mamaev I. S., Ramodanov S. M.* Motion of a circular cylinder and n point vortices in a perfect fluid // Regul. Chaotic Dyn. 2003. Vol. 8, no. 4. P. 449–462. DOI: 10.1070/RD2003v008n04ABEH000257.
5. *Mamaev I. S., Bizyaev I. A.* Dynamics of an unbalanced circular foil and point vortices in an ideal fluid // Physics of Fluids. 2021. Vol. 33. P. 087119. DOI: 10.1063/5.0058536.
6. *Артемова Е. М., Ветчанин Е. В.* Управление движением кругового цилиндра в идеальной жидкости с помощью источника // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т. 30, № 4. С. 604–617. DOI: 10.35634/vm200405.
7. *Artemova E. M., Vetchanin E. V.* The motion of an unbalanced circular disk in the field of a point source // Regul. Chaotic Dyn. 2022. Vol. 27, no. 1. P. 24–42. DOI: 10.1134/S1560354722010051.
8. *Artemova E. M., Vetchanin E. V.* The motion of a circular foil in the field of a fixed point singularity: Integrability and asymptotic behavior // Physics of Fluids. 2024. Vol. 36. P. 027139. DOI: 10.1063/5.0185865.
9. *Artemova E. M., Lagunov D. A., Vetchanin E. V.* The motion of an elliptic foil in the field of a fixed vortex source // Rus. J. Nonlin. Dyn. 2025. Vol. 21, no. 2. P. 135–155. DOI: 10.20537/nd241203.
10. *Kilin A. A., Gavrilova A. M., Artemova E. M.* Dynamics of an elliptic foil with an attached vortex in an ideal fluid: The integrable case // Regul. Chaotic Dyn. 2025. Vol. 30. P. 931–951. DOI: 10.1134/S1560354724590015.
11. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. М.: Физматгиз, 1963. 584 с.
12. *Milne-Thomson L. M.* Theoretical Hydrodynamics. London: Macmillan, 1962. 660 p.
13. *Седов Л. И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Гостехиздат, 1950. 444 с.
14. *Короткин А. И.* Присоединенные массы судостроительных конструкций. Санкт-Петербург: Мор Вест, 2007. 576 с.
15. *Борисов А. В., Мамаев И. С.* Динамика твердого тела. Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос. М.: Институт компьютерных исследований, 2005. 576 с.
16. *Ardentov A. A.* Extremals in the Markov-Dubins problem with control on a triangle // Rus. J. Nonlin. Dyn. 2024. Vol. 20, no. 1. P. 27–42. DOI: 10.20537/nd231207.
17. *Kuznetsov S. P.* Motion of a falling card in a fluid: Finite-dimensional models, complex phenomena, and nonlinear dynamics // Rus. J. Nonlin. Dyn. 2015. Vol. 11, no. 1. P. 3–49. DOI: 10.20537/nd1501001.

References

1. *Vetchanin EV, Valieva AR.* Analysis of the force and torque arising during the oscillatory motion of a Joukowski foil in a fluid. Rus. J. Nonlin. Dyn. 2024;20(1):79–93. DOI: 10.20537/nd231210.
2. *Borisov AV, Kuznetsov SP, Mamaev IS, Tenenev VA.* Describing the motion of a body with an elliptical cross section in a viscous incompressible fluid by model equations reconstructed from data processing. Tech. Phys. Lett. 2016;42:886–890. DOI: 10.1134/S1063785016090042.
3. *Anisimov VD, Egorov AG, Nuriev AN, Zaitseva ON.* Propulsive motion of cylindrical vibration-driven robot in a viscous fluid. Scientific Notes of Kazan University. Series of Physical and Mathematical Sciences. 2024;166(3):277–296. DOI: 10.26907/2541-7746.2024.3.277-296.
4. *Borisov AV, Mamaev IS, Ramodanov SM.* Motion of a circular cylinder and n point vortices in a perfect fluid. Regul. Chaotic Dyn. 2003;8(4):449–462. DOI: 10.1070/RD2003v008n04ABEH000257.
5. *Mamaev IS, Bizyaev IA.* Dynamics of an unbalanced circular foil and point vortices in an ideal fluid. Physics of Fluids. 2021;33:087119. DOI: 10.1063/5.0058536.

6. Artemova EM, Vetchanin EV. Control of the motion of a circular cylinder in an ideal fluid using a source. *Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science.* 2020;30(4):604–617. DOI: 10.35634/vm200405.
7. Artemova EM, Vetchanin EV. The motion of an unbalanced circular disk in the field of a point source. *Regul. Chaotic Dyn.* 2022;27(1):24–42. DOI: 10.1134/S1560354722010051.
8. Artemova EM, Vetchanin EV. The motion of a circular foil in the field of a fixed point singularity: Integrability and asymptotic behavior. *Physics of Fluids.* 2024;36:027139. DOI: 10.1063/5.0185865.
9. Artemova EM, Lagunov DA, Vetchanin EV. The motion of an elliptic foil in the field of a fixed vortex source. *Rus. J. Nonlin. Dyn.* 2025;21(2):135–155. DOI: 10.20537/nd241203.
10. Kilin AA, Gavrilova AM, Artemova EM. Dynamics of an elliptic foil with an attached vortex in an ideal fluid: The integrable case. *Regul. Chaotic Dyn.* 2025;30:931–951. DOI: 10.1134/S1560354724590015.
11. Kochin, NE, Kibel IA, Roze NV. *Theoretical Hydrodynamics.* New York: Wiley; 1964. 577 p.
12. Milne-Thomson LM. *Theoretical Hydrodynamics.* London: Macmillan; 1962. 660 p.
13. Sedov LI. *Two-Dimensional Problems in Hydrodynamics and Aerodynamics.* New York: Wiley; 1965. 427 p.
14. Korotkin AI. *Added Masses of Ship Structures.* Dordrecht: Springer; 2009. 392 p. DOI: 10.1007/978-1-4020-9432-3.
15. Borisov AV, Mamaev IS. *Rigid Body Dynamics.* Berlin: De Gruyter; 2019. 526 p. DOI: 10.1515/9783110544442.
16. Ardentov AA. Extremals in the Markov-Dubins problem with control on a triangle. *Rus. J. Nonlin. Dyn.* 2024;20(1):27–42. DOI: 10.20537/nd231207.
17. Kuznetsov SP. Motion of a falling card in a fluid: Finite-dimensional models, complex phenomena, and nonlinear dynamics. *Rus. J. Nonlin. Dyn.* 2015;11(1):3–49. DOI: 10.20537/nd1501001.



Ветчанин Евгений Владимирович — родился в Устинове (1986). Окончил с отличием факультет прикладной математики Ижевского государственного технического университета по специальности «Прикладная математика» (2008). Кандидат физико-математических наук (2012, ИМ УрО РАН). Доктор физико-математических наук (2022, МАИ). С 2022 года работает заведующим кафедрой теоретической и экспериментальной физики Удмуртского государственного университета. Научные интересы — математическое моделирование, качественный анализ динамических систем, вычислительная гидродинамика.

Россия, 426034 Ижевск, ул. Университетская, 1
 Удмуртский государственный университет
 E-mail: eugene@mail.ru
 ORCID: 0000-0002-2617-7512
 AuthorID (eLibrary.Ru): 665751



Артемова Елизавета Марковна — родилась в Ижевске (1997). Окончила с отличием бакалавриат (специальность «Физика», 2019) и магистратуру (специальность «Математическая кибернетика», 2021) Института математики, информационных технологий и физики Удмуртского государственного университета. Кандидат физико-математических наук (2024, МАИ). С 2018 года работает в научно-учебной лаборатории «Нелинейный анализ и конструирование новых средств передвижения» Удмуртского государственного университета, в настоящее время — в должности младшего научного сотрудника. Научные интересы — динамические системы, теоретическая гидродинамика, неголономные системы.

Россия, 426034 Ижевск, ул. Университетская, 1, корпус 4,
 Удмуртский государственный университет
 E-mail: artemova@rcd.ru
 ORCID: 0000-0001-7637-2757
 AuthorID (eLibrary.Ru): 1179989