

Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2026. Т. 34, № 3
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2026;34(3)

Научная статья
УДК 530.182.1

DOI: 10.18500/0869-6632-003213
EDN: VJZWZL

Локализованные решения уравнения φ^4 в модели с тремя одинаковыми точечными примесями

М. И. Фахретдинов[✉], Е. Г. Екомасов

Уфимский университет науки и технологий, Россия
E-mail: ✉ fmi106tf@gmail.com, ekomasov@gmail.com

Поступила в редакцию 20.11.2025, принята к публикации 10.02.2026,
опубликована онлайн 15.02.2026, опубликована 29.05.2026

Аннотация. Цель. В настоящей работе исследуются коллективные динамические эффекты в неинтегрируемой модели φ^4 с тремя идентичными точечными притягивающими примесями. Изучается процесс возбуждения и последующая эволюция долгоживущих локализованных колебаний (примесных мод), инициированных прохождением кинка через систему примесей. Методы. Исследование проводится с использованием комбинированного подхода, сочетающего аналитические методы и прямое численное моделирование. В рамках аналитического рассмотрения, основанного на методе коллективных переменных для малых амплитуд колебаний, выведена система связанных линейных дифференциальных уравнений, описывающая динамику трех осцилляторов. Результаты. Решение этой системы позволило определить спектр коллективных возбуждений, состоящий из трех различных частот нормальных мод. Проанализирована зависимость этих частот от расстояния между примесями, показано их расщепление при малых расстояниях между примесями и асимптотическое слияние в частоту одиночной примеси при увеличении расстояния между примесями. Численное решение исходного нелинейного уравнения в частных производных подтвердило существование трех мод и позволило детально изучить их динамику. Установлено, что в зависимости от начальной скорости кинка и расстояния между примесями могут быть возбуждены различные типы колебаний: первая мода (синфазные колебания), вторая мода (колебания крайних волн в противофазе при неподвижной центральной) и третья мода, характеризующаяся противофазным движением центральной примеси относительно крайних. Обнаружено, что вторая и третья обладают пороговым характером локализации: они вносят вклад в динамику лишь при достижении критического расстояния, когда их частота опускается ниже величины $\sqrt{2}$. Сравнение аналитических и численных результатов показало хорошее количественное совпадение для больших расстояний и систематическое расхождение для малых, обусловленное нелинейностью потенциала. Заключение. Результаты работы демонстрируют, что введение третьей примеси приводит к качественному усложнению динамики системы, что открывает возможности для управления нелинейными волнами в средах с несколькими примесями.

Ключевые слова: кинк, бризер, уравнение φ^4 , примесные моды, численное моделирование.

Благодарности. Работа выполнена в рамках государственного задания, соглашение # 075-03-2024-123/1 от 15.02.2024, тема # 324-21.

Для цитирования: Фахретдинов М. И., Екомасов Е. Г. Локализованные решения уравнения φ^4 в модели с тремя одинаковыми точечными примесями // Известия вузов. ПНД. 2026. Т. 34, № 3. С. 481–492. DOI: 10.18500/0869-6632-003213. EDN: VJZWZL

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Localized solutions of the φ^4 equation in a model with three identical point impurities

M. I. Fakhretdinov[✉], E. G. Ekomasov

Ufa University of Science and Technology, Russia
E-mail: [✉]fmi106tf@gmail.com, ekomasoveg@gmail.com

Received 20.11.2025, accepted 10.02.2026, available online 15.02.2026, published 29.05.2026

Abstract. *Purpose.* In this paper, we investigate collective dynamic effects in a non-integrable φ^4 model with three identical point-like attractive impurities. We study the excitation process and subsequent evolution of long-lived localized oscillations (impurity modes) initiated by the passage of a kink through the impurity system. *Methods.* The study is conducted using a combined approach that integrates analytical methods with direct numerical simulation. Within the analytical framework, based on the method of collective variables for small oscillation amplitudes, a system of coupled linear differential equations is derived to describe the dynamics of three oscillators. *Results.* The solution of this system allowed for the determination of the collective excitation spectrum, consisting of three distinct normal mode frequencies. The dependence of these frequencies on the distance between the impurities is analyzed, demonstrating their splitting at small distances and asymptotic convergence to the single-impurity frequency as the distance increases. Numerical solution of the original nonlinear partial differential equation confirmed the existence of three modes and allowed for a detailed study of their dynamics. It has been established that, depending on the initial kink velocity and the distance between the impurities, various types of oscillations can be excited: the first mode (in-phase oscillations), the second mode (oscillations of the outer waves in anti-phase with a stationary central one), and the third mode, characterized by the anti-phase motion of the central impurity relative to the outer ones. It was found that the second and third modes exhibit a threshold-like localization: they contribute to the dynamics only upon reaching a critical distance, when their frequency drops below $\sqrt{2}$. A comparison of analytical and numerical results showed good quantitative agreement for large distances and a systematic discrepancy for small ones, attributed to the nonlinearity of the potential. *Conclusion.* The results of the work demonstrate that the introduction of a third impurity leads to a qualitative increase in the complexity of the system dynamics, which opens up possibilities for controlling nonlinear waves in media with multiple impurities.

Keywords: kink, breather, φ^4 equation, impurity modes, numerical simulation.

Acknowledgements. The authors express gratitude for the financial support rendered to the work on this paper by the State Assignment (Order №075-03-2024-123/1 dated February 15, 2024, topic №324-21).

For citation: Fakhretdinov MI, Ekomasov EG. Localized solutions of the φ^4 equation in a model with three identical point impurities. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2026;34(3):481–492. DOI: 10.18500/0869-6632-003213

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Нелинейное дифференциальное уравнение φ^4 , как имеющее аналитические солитонные решения, интересно с фундаментальной точки зрения [1]. Также оно имеет много приложений в космологии, квантовой теории поля, биофизике, физике конденсированного состояния [1–6]. Для уравнения φ^4 есть точное решение в виде кинка, но, в отличие от уравнения синус-Гордона (УСГ) [1, 7], нет локализованных в пространстве решений в виде уединенных солитонов и бризеров. Кинк уравнения φ^4 отличается от кинка УСГ наличием внутренней моды колебаний [1]. Было обнаружено долгоживущее нелинейное метастабильное связанное состояние трех кинков, названное «тритон» [8]. Это состояние является продуктом симметричного столкновения двух кинков и антикинка.

Для практических приложений часто, как и УСГ, уравнение φ^4 модифицируют, считая коэффициенты функциями от координат и времени [1, 7, 9–11]. Пространственную модуляцию потенциала часто называют примесью. К настоящему времени подробно исследован случай урав-

нения φ^4 с одной примесью [1, 12]. Было показано, что одиночные точечные примеси способны рассеивать или захватывать кинки, а также генерировать локализованную волну (или примесную моду) [1]. В [13] рассмотрена динамика кинков для модели с одиночными протяженными примесями, имеющими пространственные профили Гаусса или Лоренца. Показано качественное согласие полученных результатов со случаем точечных примесей и существенное количественное влияние профиля примеси на форму локализованной примесной моды и рассеяние кинков на примесях. В [14] исследованы кинк-антикинковые столкновения в присутствии протяженной примеси гауссовского вида. В [15] рассмотрены решения уравнения φ^4 в модели с одиночной примесью, описываемой функцией гиперболического вида, в [16, 17], описываемой функцией прямоугольного вида. Динамика кинка для случая малых возмущений модели φ^4 с помощью деформированного потенциала рассмотрена в [18].

Для УСГ в модели с двумя и тремя примесями получено много интересных результатов [19–22]. Для уравнения φ^4 динамика локализованных волн была детально изучена для случая одной [12], а также двух примесей, как протяженных [23], так и точечных [24]. В этих работах было установлено, что взаимодействие между примесями приводит к расщеплению частоты одиночной примесной моды на две, соответствующие синфазным и антифазным коллективным колебаниям.

Настоящая работа делает следующий логический шаг и посвящена исследованию локализованных волн в системе с тремя точечными примесями. Этот переход не является тривиальным обобщением, поскольку введение третьей, центральной, примеси качественно изменяет симметрию системы и порождает новые динамические режимы, невозможные в конфигурации из двух примесей. В частности, как будет показано, наряду с модами, аналогичными синфазным и антифазным колебаниям пары, возникает третья мода. Она обладает уникальной структурой: в ней крайние примеси колеблются в фазе друг с другом, но в противофазе к центральной. Фундаментальной особенностью этой моды является пороговый характер её возбуждения. Исследование условий возбуждения этих мод и их роль в динамике системы является основной целью данной работы.

1. Основные уравнения и линейный анализ

Рассмотрим модифицированное уравнение φ^4 :

$$u_{tt} - u_{xx} + K(x)(u^2 - 1)u = 0, \quad (1)$$

где пространственная неоднородность $K(x)$ взята в виде трех одинаковых точечных неоднородностей в виде дельта-функций Дирака $\delta(x)$, ε — константа, d — расстояние между примесями:

$$K(x) = 1 - \varepsilon \delta(x) - \varepsilon \delta(x - d) - \varepsilon \delta(x - 2d). \quad (2)$$

Лагранжиан, соответствующий уравнению (1), имеет вид

$$L = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{4} K(x) (u^2 - 1)^2 \right] dx. \quad (3)$$

Для решения уравнения (1) с неоднородностью (2) можно использовать как начальное приближение известное точное решение в виде кинка для уравнения φ^4 при $K(x) = 1$ (4):

$$u(x, 0) = \tanh \left(\frac{x - v_0 t}{\sqrt{2(1 - v_0^2)}} \right). \quad (4)$$

При этом кинк возбуждает локализованные на примесях долгоживущие колебания, также известные как примесные моды. Найдем решение уравнения (1), которое описывает такие колебания. Для этого используем метод коллективных переменных и анзац в виде [1, 12]:

$$u = \pm 1 + a_1(t) \exp(-\varepsilon |x|) + a_2(t) \exp(-\varepsilon |x - d|) + a_3(t) \exp(-\varepsilon |x - 2d|). \quad (5)$$

Подставив анзац (5) в выражение для Лагранжиана (3) и выполнив интегрирование по пространственной переменной, получим эффективный Лагранжиан для коллективных переменных $a_1(t)$, $a_2(t)$, $a_3(t)$. Далее, используя уравнения Лагранжа–Эйлера, получим систему уравнений (6) для $a_1(t)$, $a_2(t)$, $a_3(t)$ (заметим, что в нем оставлены только линейные члены по $a_i(t)$). Эта система уравнений эквивалентна системе, полученной в [22] для уравнения синус-Гордона в модели с тремя точечными примесями, однако с иными коэффициентами:

$$\begin{cases} \ddot{a}_1 + a_1 \omega_1^2 + a_2 k_{12} + a_3 k_{13} = 0, \\ \ddot{a}_2 + a_2 \omega_2^2 + (a_1 + a_3) k_{21} = 0, \\ \ddot{a}_3 + a_3 \omega_3^2 + a_1 k_{13} + a_2 k_{12} = 0, \end{cases} \quad (6)$$

где

$$\begin{cases} \omega_1^2 = 2 + \frac{e^{-2d\varepsilon} \varepsilon^2 (-e^{6d\varepsilon} - 2d\varepsilon(1+d\varepsilon) + 2e^{4d\varepsilon}(1+d\varepsilon(3+d\varepsilon)) - e^{2d\varepsilon}(1+4d\varepsilon(1+d\varepsilon(3+d\varepsilon))))}{(-1+e^{2d\varepsilon}-2d\varepsilon)(-1+e^{2d\varepsilon}-2d\varepsilon(1+d\varepsilon))}, \\ \omega_2^2 = \frac{e^{-2d\varepsilon} (-4d\varepsilon^3 - e^{4d\varepsilon}(-2+\varepsilon^2) + e^{2d\varepsilon}(-2+\varepsilon(\varepsilon+2d(-2+3\varepsilon^2+d\varepsilon(-2+\varepsilon^2))))}{-1+e^{2d\varepsilon}-2d\varepsilon(1+d\varepsilon)}, \\ k_{12} = \frac{2e^{-d\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{2d^2}{-1+e^{2d\varepsilon}-2d\varepsilon}}, \\ k_{13} = \frac{2e^{-2d\varepsilon} \varepsilon^2 (-1+e^{4d\varepsilon}(-1+d\varepsilon) - 3d\varepsilon(1+d\varepsilon) + e^{2d\varepsilon}(2+d\varepsilon(2-d\varepsilon)))}{(-1+e^{2d\varepsilon}-2d\varepsilon)(-1+e^{2d\varepsilon}-2d\varepsilon(1+d\varepsilon))}, \\ k_{21} = -\frac{2e^{-3d\varepsilon} (-1+e^{2d\varepsilon}) \varepsilon^2 (e^{2d\varepsilon} - d\varepsilon)}{-1+e^{2d\varepsilon}-2d\varepsilon(1+d\varepsilon)}. \end{cases} \quad (7)$$

Система (6) имеет решения в виде [22]:

$$\begin{cases} a_1(t) = a_{01} \cos(\Omega_1 t + \theta_1) + \eta_{12} a_{02} \cos(\Omega_2 t + \theta_2) - a_{03} \cos(\Omega_3 t + \theta_3), \\ a_2(t) = \eta_{21} a_{01} \cos(\Omega_1 t + \theta_1) + a_{02} \cos(\Omega_2 t + \theta_2), \\ a_3(t) = a_{01} \cos(\Omega_1 t + \theta_1) + \eta_{12} a_{02} \cos(\Omega_2 t + \theta_2) + a_{03} \cos(\Omega_3 t + \theta_3), \end{cases} \quad (8)$$

где a_{01} , a_{02} , a_{03} – константы, определяемые из начальных условий, а остальные параметры имеют вид

$$\begin{cases} \Omega_{1,2}^2 = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2 + k_{13} \mp \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2 + k_{13})^2 + 8k_{12}k_{21}}}{2}, \\ \eta_{21} = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2 - k_{13} - \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2 + k_{13})^2 + 8k_{12}k_{21}}}{2k_{12}}, \\ \eta_{12} = \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2 + k_{13} + \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2 + k_{13})^2 + 8k_{12}k_{21}}}{4k_{21}}, \\ \Omega_3^2 = \omega_1^2 - k_{13}. \end{cases} \quad (9)$$

Частоты примесных мод $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ выражаются через параметры примесей ε, d следующим образом:

$$\Omega_1^2 = (2 - \varepsilon^2) + \frac{e^{-2d\varepsilon} \varepsilon^2 (-1 + e^{2d\varepsilon} (1 + 2d\varepsilon) - 2d\varepsilon (2 + 3d\varepsilon))}{(-1 + e^{2d\varepsilon} - 2d\varepsilon)(-1 + e^{2d\varepsilon} - 2d\varepsilon (1 + d\varepsilon))} - \sqrt{\frac{e^{-4d\varepsilon} \varepsilon^4 (1 + 8e^{6d\varepsilon} - 3e^{4d\varepsilon} (5 + 8d\varepsilon) + 2e^{2d\varepsilon} (3 + 4d\varepsilon (3 + 2d\varepsilon)))}{(-1 + e^{2d\varepsilon} - 2d\varepsilon (1 + d\varepsilon))^2}}, \quad (10)$$

$$\Omega_2^2 = (2 - \varepsilon^2) + \frac{e^{-2d\varepsilon} \varepsilon^2 (-1 + e^{2d\varepsilon} (1 + 2d\varepsilon) - 2d\varepsilon (2 + 3d\varepsilon))}{(-1 + e^{2d\varepsilon} - 2d\varepsilon)(-1 + e^{2d\varepsilon} - 2d\varepsilon (1 + d\varepsilon))} + \sqrt{\frac{e^{-4d\varepsilon} \varepsilon^4 (1 + 8e^{6d\varepsilon} - 3e^{4d\varepsilon} (5 + 8d\varepsilon) + 2e^{2d\varepsilon} (3 + 4d\varepsilon (3 + 2d\varepsilon)))}{(-1 + e^{2d\varepsilon} - 2d\varepsilon (1 + d\varepsilon))^2}}, \quad (11)$$

$$\Omega_3^2 = (2 - \varepsilon^2) + \frac{2e^{-2d\varepsilon} (-1 + e^{2d\varepsilon}) \varepsilon^2}{-1 + e^{2d\varepsilon} - 2d\varepsilon}. \quad (12)$$

Анализ структуры решений (8) позволяет найти три типа возможной зависимости амплитуд $a_1(t), a_2(t), a_3(t)$ от времени при возбуждении только одного гармонического колебания, когда все три локализованные волны (или примесные моды) колеблются с одинаковой частотой. Первый тип колебаний является синфазным: все локализованные волны колеблются в одинаковой фазе (рис. 1, *a*). Характерно, что частота Ω_1 этого типа колебаний при уменьшении параметра d уменьшается (см. рис. 2). Второй тип колебаний — антифазный: первая и третья примесные моды колеблются антифазно, а вторая между ними покоится (см. рис. 1, *b*). Его частота Ω_3 при уменьшении расстояния d увеличивается (см. рис. 2). Третий тип колебаний синфазно-антифазный: первая и третья примесные моды колеблются в фазе, а вторая между ними — в противоположной им (см. рис. 1, *c*). Его частота Ω_2 при уменьшении d увеличивается (см. рис. 2). В пределе $d \rightarrow \infty$ частоты примесных мод стремятся к частоте одиночной примеси $\sqrt{2 - \varepsilon^2}$ (показана на рис. 2 пунктирной линией):

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \Omega_1 = \lim_{d \rightarrow \infty} \Omega_2 = \lim_{d \rightarrow \infty} \Omega_3 = \sqrt{2 - \varepsilon^2}. \quad (13)$$

Фундаментальное усложнение системы из трех примесей по сравнению с системой из двух примесей проявляется в том, что условия возбуждения локализованной волны для центральной примеси отличаются от условий возбуждения локализованных волн на крайних

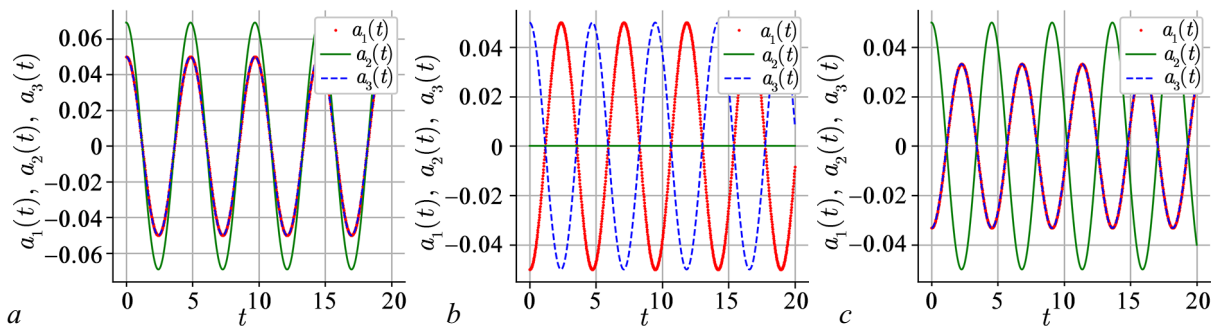


Рис. 1. *a* — Первая мода (синфазная); *b* — вторая мода (антифазная); *c* — третья мода (синфазно-антифазная) (цвет онлайн)

Fig. 1. *a* — First mode (in-phase); *b* — second mode (anti-phase); *c* — third mode (in-phase-anti-phase) (color online)

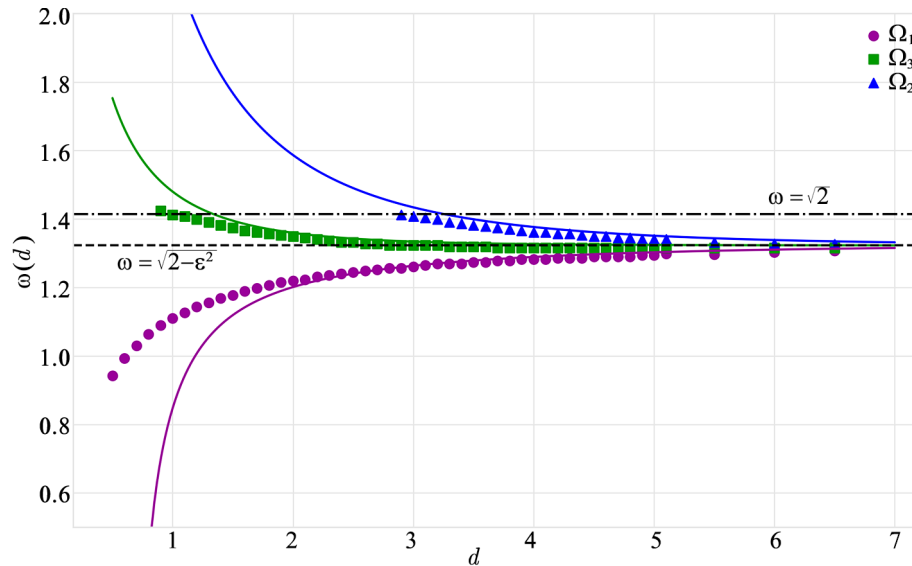


Рис. 2. Зависимость частот $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ от расстояния между примесями d , $\varepsilon = 0.5$, $v_0 = 0.6$. Линии — аналитический расчет, маркеры — численные данные. Штрихпунктирная линия $\omega = \sqrt{2}$ (цвет онлайн)

Fig. 2. Dependence of frequencies $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ on the distance between impurities d , $\varepsilon = 0.5$, $v_0 = 0.6$. Lines — analytical calculation, markers — numerical data. Dash-dotted line $\omega = \sqrt{2}$ (color online)

примесях. При этом вследствие симметричности задачи амплитуды колебаний локализованных волн на первой и третьей примесях во всех случаях одинаковы.

2. Численное исследование

Для численного решения (1) будем использовать метод прямых на интервале $x \in [-L, L]$, $L = 60$, шаг по координате $\Delta x = 0.01$, а шаг по времени будет адаптивным и определяется решателем системы ОДУ, возникающей в ходе метода прямых. Граничные условия $u_x(x = -L) = u_x(x = L) = 0$. В качестве начальных условий используем точное решение в виде кинка (4):

$$u(x, 0) = \tanh\left(\frac{x - x_0}{\sqrt{2(1 - v_0^2)}}\right), \quad u_t(x, 0) = -\frac{v_0 \operatorname{sech}^2\left(\frac{x - x_0}{\sqrt{2(1 - v_0^2)}}\right)}{\sqrt{2(1 - v_0^2)}}, \quad (14)$$

где $x_0 = -10$ — начальная координата кинка, $0 \leq v_0 < 1$ — начальная скорость кинка. На границах расчетной области использовался метод поглощающего слоя (Sponge Layer) [27]. В уравнение (1) был введен дополнительный диссипативный член вида $\sigma(x)u_t$, где функция вязкости $\sigma(x) = \alpha [e^{\beta(x-L)} + e^{-\beta(x+L)}]$ экспоненциально возрастает при приближении к границам. Параметры $\alpha = 1.5$, $\beta = 0.8$ были подобраны таким образом, чтобы исключить влияние волн, отраженных от границ, на исследуемую динамику, сохраняя при этом пренебрежимо малое значение вязкости в основной области моделирования.

Дельта-функция аппроксимировалась следующей функцией:

$$\delta(x) \approx \frac{\gamma}{\sqrt{\pi}} \exp(-\gamma^2 x^2), \quad (15)$$

где $\gamma = 80$.

Рассмотрим локализованные на точечных примесях колебания: $u(x=0, t)$, $u(x=d, t)$, $u(x=2d, t)$. Будем рассматривать только случай полного прохождения кинком всех трех примесей, который зависит от начальной скорости кинка и расстояния между примесями, см. точечную диаграмму на рис. 3.

Частоты колебаний найдем с помощью дискретного преобразования Фурье при $t > 500$. Зависимость частот Ω_1 , Ω_2 и Ω_3 от расстояния между примесями d при $v_0 = 0.6$ показана на рис. 2 в виде кружочков, треугольников и квадратиков. Важной особенностью, выявленной при численном эксперименте, является пороговый характер возбуждения частот Ω_3 и Ω_2 . Они возбуждаются лишь при достижении критического расстояния d , когда величина этих частот становится меньше чем $\sqrt{2}$ — частоты, соответствующей простым вакуумным колебаниям уравнения φ^4 [1].

Данный вывод полностью подтверждается результатами спектрального анализа. На рис. 4, *b* при $d = 2.0$ в спектре наблюдаются только два пика (Ω_1 и Ω_3). Заметим, что Ω_3 в данном случае меньше $\sqrt{2}$. При $d = 3.0$ (рис. 4, *a*), когда частота Ω_2 опускается ниже порогового значения, в спектре Фурье начинает проявляться третий пик. Заметим, что вблизи значения $\sqrt{2}$ амплитуда этой моды остается малой. Она вносит заметный вклад в динамику волны локализованной на центральной примеси лишь при дальнейшем увеличении d .

При малых расстояниях ($d \lesssim 0.9$) возбуждается одна локализованная волна бризерного типа на всех трех примесях (см. рис. 5). Она совершает колебания с частотой Ω_1 . Отметим, что в этой области наблюдается наибольшее расхождение между аналитическими и численными результатами (больше, чем для случая двух примесей [24]), что обусловлено сильным нелинейным взаимодействием примесей, которое не в полной мере учитывается линейным приближением.

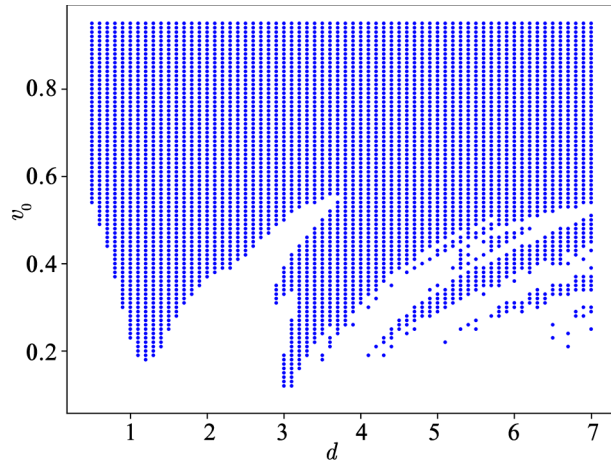


Рис. 3. Область полного прохождения примесей кинком в зависимости от расстояния между примесями d и начальной скорости кинка v_0 (показана точками)

Fig. 3. Region of full kink transmission through impurities depending on the distance between impurities d and the initial kink velocity v_0 (shown by dots)

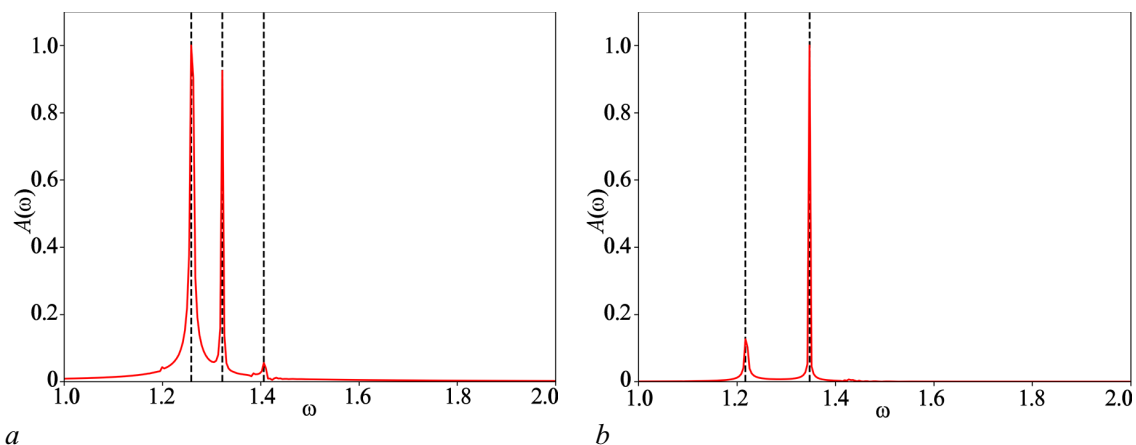


Рис. 4. Дискретное Фурье-преобразование $A(\omega)$ для двух значений d : $d = 3.0$ (*a*), $d = 2.0$ (*b*)

Fig. 4. Discrete Fourier transform $A(\omega)$ for two values of d : $d = 3.0$ (*a*), $d = 2.0$ (*b*)

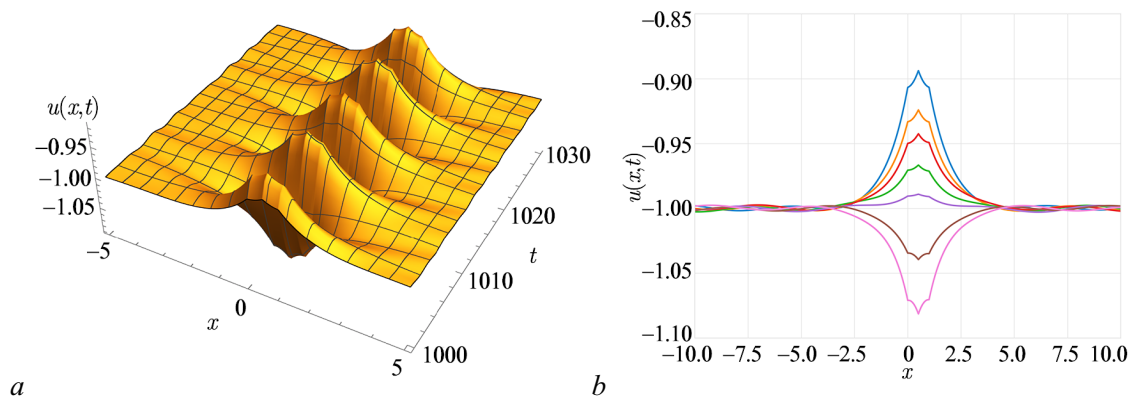


Рис. 5. Зависимость при $d = 0.5, v_0 = 0.5$: $a - u(x, t)$; $b - u(x, t)$ в отдельные моменты времени (цвет онлайн)
 Fig. 5. Dependence for $d = 0.5, v_0 = 0.5$: $a - u(x, t)$; $b - u(x, t)$ at specific moments of time (color online)

На рис. 6 представлена пространственно-временная динамика локализованных волн при различных расстояниях d . При малых расстояниях (рис. 6, a) наблюдаются синфазные колебания трех локализованных волн как единого целого с частотой Ω_1 . С увеличением расстояния до $d = 2.0$ (рис. 6, b) в системе дополнительно появляется мода Ω_3 . В этом режиме локализованная волна на центральной примеси колеблется с малой амплитудой. При $d \gtrsim 3.0$ (рис. 6, c , рис. 6, d) в спектре частот появляется мода Ω_2 . Таким образом, динамика системы при $d > 3.0$ демонстрирует фундаментальное усложнение связанной динамики локализованных волн в трехпримесной модели по сравнению с двухпримесной.

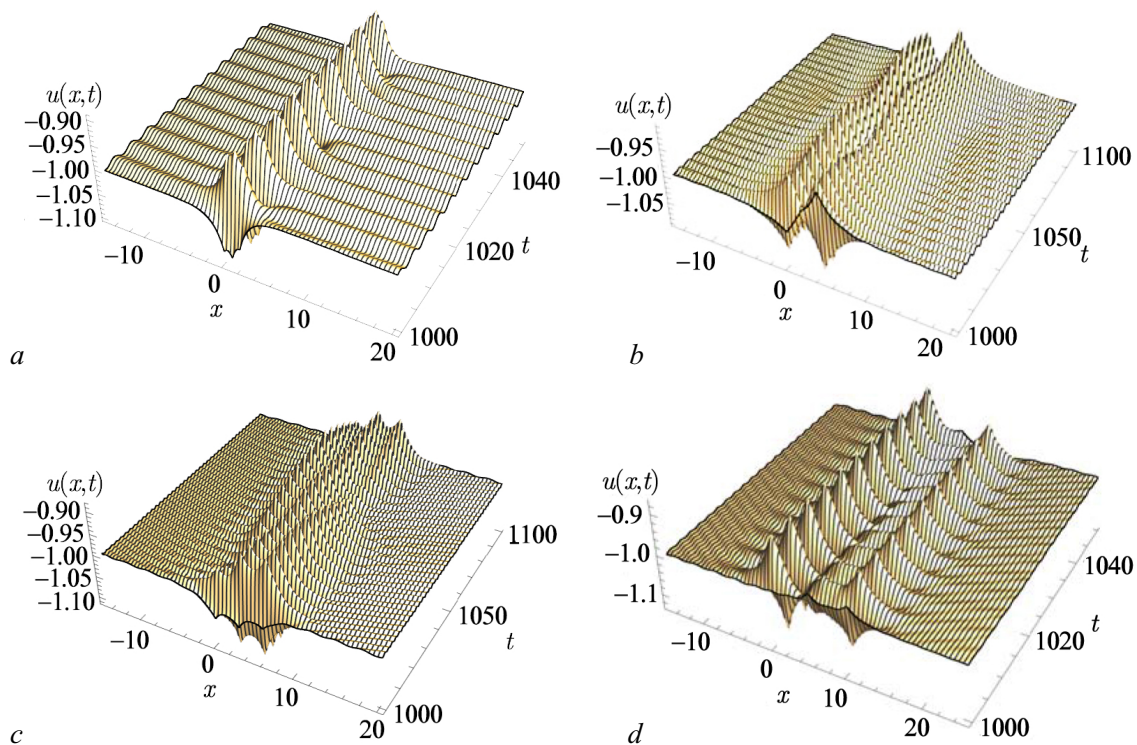


Рис. 6. Зависимость $u(x, t)$ при $v = 0.6$ и $d = 1.0$ (a), $d = 2.0$ (b), $d = 3.0$ (c), $d = 5.0$ (d)
 Fig. 6. Dependence of $u(x, t)$ for $v = 0.6$ and $d = 1.0$ (a), $d = 2.0$ (b), $d = 3.0$ (c), $d = 5.0$ (d)

Заключение

В настоящей работе исследована структура и динамика локализованных на трех точечных примесях волн бризерного типа в модели φ^4 . С помощью метода коллективных переменных получена система уравнений, описывающая связанную динамику трех примесных осцилляторов, и найдены аналитические зависимости частот нормальных мод от расстояния d между примесями и глубины примеси ε .

Показано, что наличие третьей примеси приводит к качественному усложнению динамики локализованных волн по сравнению с двухпримесной моделью. Это усложнение обусловлено наличием еще одной моды нормальных колебаний (Ω_2), обладающей пороговым характером возбуждения. Выявлены три характерных режима связанной динамики локализованных волн: при малых расстояниях ($d \lesssim 1$) на всех трех примесях наблюдается решение в виде одной локализованной волны бризерного типа, колеблющейся с частотой Ω_1 ; в диапазоне $1 \lesssim d \lesssim 3$ наблюдаются три локализованные волны, колеблющиеся с частотами Ω_1, Ω_3 ; при $d \gtrsim 3$ наблюдаются связанные колебания трех локализованных волн, в спектре частот которых появляется мода Ω_2 , что существенно усложняет картину колебаний. Обнаруженные механизмы перераспределения энергии между локализованными на примесях волнами открывают новые возможности для управления локализованными возбуждениями в нелинейных средах.

Список литературы

1. A Dynamical Perspective on the φ^4 Model: Past, Present and Future. Kevrekidis P., Cuevas-Maraver J. (eds). Cham: Springer, 2019. 311 p. DOI: 10.1007/978-3-030-11839-6.
2. Gani V. A., Kudryavtsev A. E., Lizunova M. A. Kink interactions in the (1+1)-dimensional φ^6 model // Phys. Rev. D. 2014. Vol. 89, no. 12. P. 125009. DOI: 10.1103/PhysRevD.89.125009.
3. Marjaneh A. M., Saadatmand D., Zhou K., Dmitriev S. V., Zomorrodian M. E. High energy density in the collision of n kinks in the φ^4 model // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2017. Vol. 49. P. 30–38. DOI: 10.1016/j.cnsns.2017.01.022.
4. Yan H., Zhong Y., Liu Y. X., Maeda K. I. Kink–antikink collision in a Lorentz-violating φ^4 model // Phys. Lett. B. 2020. Vol. 807. P. 135542. DOI: 10.1016/j.physletb.2020.135542.
5. Yamaletdinov R. D., Slipko V. A., Pershin Y. V. Kinks and antikinks of buckled graphene: a testing ground for the φ^4 field model // Phys. Rev. B. 2017. Vol. 96, no. 9. P. 094306. DOI: 10.1103/PhysRevB.96.094306.
6. Yamaletdinov R. D., Romańczukiewicz T., Pershin Y. V. Manipulating graphene kinks through positive and negative radiation pressure effects // Carbon. 2019. Vol. 141. P. 253–257. DOI:10.1016/j.carbon.2018.09.032.
7. Cuevas-Maraver J., Kevrekidis P., Williams F. (eds) The sine-Gordon Model and its Applications: From Pendula and Josephson Junctions to Gravity and High-Energy Physics. Cham: Springer, 2014. 263 p. DOI: 10.1007/978-3-319-06722-3.
8. Гетманов Б. С. Связанные состояния солитонов в модели теории поля φ_2^4 // Письма в ЖЭТФ. 1976. Т. 24, № 5. С. 323–327.
9. Saadatmand D., Dmitriev S. V., Borisov D. I., Kevrekidis P. G., Fatykhov M. A., Javidan K. Effect of the φ^4 kink's internal mode at scattering on a \mathcal{PT} -symmetric defect // Письма в ЖЭТФ. 2015. Т. 101, № 7. С. 550–555.
10. Saadatmand D., Javidan K. Collective-coordinate analysis of inhomogeneous nonlinear Klein–Gordon field theory // Braz. J. Phys. 2013. Vol. 43. P. 48–56. DOI: 10.1007/s13538-012-0113-y.
11. Marjaneh A., Simas F., Bazeia D. Collisions of kinks in deformed φ^4 and φ^6 models // Chaos, Solitons and Fractals. 2022. Vol. 164. P. 112723. DOI: 10.1016/j.chaos.2022.112723.

12. Zhang F., Kivshar Y. S., Vázquez L. Resonant kink-impurity interactions in the φ^4 model // Phys. Rev. A. 1992. Vol. 46, no. 8. P. 5214–5220. DOI: 10.1103/PhysRevA.46.5214.
13. Lizunova M. A., Kager J., de Lange S., van Wezel J. Kinks and realistic impurity models in φ^4 -theory // Int. J. Mod. Phys. B. 2022. Vol. 36, no. 5. P. 2250042. DOI: 10.1142/S0217979222500424.
14. Lizunova M., Kager J., de Lange S., van Wezel J. Emergence of oscillons in kink-impurity interactions // J. Phys. A: Math. Theor. 2021. Vol. 54, no. 31. P. 315701. DOI: 10.1088/1751-8121/ac0d36.
15. Romańczukiewicz T., Shnir Y. Oscillons in the presence of external potential // J. High Energ. Phys. 2018. Vol. 2018. P. 101. DOI: 10.1007/JHEP01(2018)101.
16. Fakhretdinov M. I., Samsonov K. Yu., Dmitriev S. V., Ekomasov E. G. Attractive impurity as a generator of wobbling kinks and breathers in the φ^4 model // Russ. J. Nonlinear Dyn. 2024. Vol. 20, no. 1. P. 15–26. DOI: 10.20537/nd231206.
17. Fakhretdinov M. I., Samsonov K. Yu., Dmitriev S. V., Ekomasov E. G. Kink dynamics in the φ^4 model with extended impurity // Russ. J. Nonlinear Dyn. 2023. Vol. 19, no. 3. P. 303–320. DOI: 10.20537/nd230603.
18. Dorey P., Romańczukiewicz T. Resonant kink-antikink scattering through quasinormal modes // Phys. Lett. B. 2018. Vol. 779. P. 117–123. DOI: 10.1016/j.physletb.2018.02.003.
19. Ekomasov E. G., Gumerov A. M., Kudryavtsev R. V., Dmitriev S. V., Nazarov V. N. Multisoliton dynamics in the sine-Gordon model with two point impurities // Braz. J. Phys. 2018. Vol. 48, no. 6. P. 576–584. DOI: 10.1007/s13538-018-0606-4.
20. Самсонов К. Ю., Кабанов Д. К., Назаров В. Н., Екомасов Е. Г. Локализованные нелинейные волны уравнения синус-Гордона в модели с тремя протяженными примесями // Компьютерные исследования и моделирование. 2024. Т. 16, № 4. С. 855–868. DOI: 10.20537/2076-7633-2024-16-4-855-868.
21. Екомасов Е. Г., Самсонов К. Ю., Гумеров А. М., Кудрявцев Р. В. Структура и динамика локализованных нелинейных волн уравнения синус-Гордона в модели с одинаковыми притягивающими примесями // Известия вузов. ПНД. 2022. Т. 30, № 6. С. 749–765. DOI: 10.18500/0869-6632-003011.
22. Екомасов Е. Г., Кудрявцев Р. В., Самсонов К. Ю., Назаров В. Н., Кабанов Д. К. Динамика кинка уравнения синус-Гордона в модели с тремя одинаковыми притягивающими или отталкивающими примесями // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 6. С. 693–709. DOI: 10.18500/0869-6632-003069.
23. Фахретдинов М. И., Екомасов Е. Г. Локализованные волны уравнения φ^4 в модели с двумя протяженными примесями // Компьютерные исследования и моделирование. 2025. Т. 17, № 3. С. 437–449. DOI: 10.20537/2076-7633-2025-17-3-437-449.
24. Fakhretdinov M. I., Kabanov D. K., Ekomasov E. G. Localized waves of the φ^4 equation in the model with two-point impurities // Rus. J. Nonlin. Dyn. 2025. Vol. 21, no. 3. P. 419–432. DOI: 10.20537/nd250703.
25. Schiesser W. E. The Numerical Method of Lines: Integration of Partial Differential Equations. San Diego: Academic Press, 2012. 326 p.
26. Белова Т. И., Кудрявцев А. Е. Солитоны и их взаимодействия в классической теории поля // УФН. 1997. Т. 167. С. 377–406. DOI: 10.3367/UFNr.0167.199704b.0377.
27. Israeli M., Orszag S. A. Approximation of radiation boundary conditions // Journal of Computational Physics. 1981. Vol. 41, no. 1. P. 115–135. DOI: 10.1016/0021-9991(81)90082-6.

References

1. A Dynamical Perspective on the φ^4 Model: Past, Present and Future. Kevrekidis P, Cuevas-Maraver J, editors. Cham: Springer; 2019. 311 p. DOI: 10.1007/978-3-030-11839-6.

2. Gani VA, Kudryavtsev AE, Lizunova MA. Kink interactions in the (1+1)-dimensional φ^6 model. *Phys. Rev. D.* 2014;89(12):125009. DOI: 10.1103/PhysRevD.89.125009.
3. Marjaneh AM, Saadatmand D, Zhou K, Dmitriev SV, Zomorrodian ME. High energy density in the collision of n kinks in the φ^4 model. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 2017;49:30–38. DOI: 10.1016/j.cnsns.2017.01.022.
4. Yan H, Zhong Y, Liu YX, Maeda KI. Kink–antikink collision in a Lorentz-violating φ^4 model. *Phys. Lett. B.* 2020;807:135542. DOI: 10.1016/j.physletb.2020.135542.
5. Yamaletdinov RD, Slipko VA, Pershin YV. Kinks and antikinks of buckled graphene: a testing ground for the φ^4 field model. *Phys. Rev. B.* 2017;96(9):094306. DOI: 10.1103/PhysRevB.96.094306.
6. Yamaletdinov RD, Romańczukiewicz T, Pershin YV. Manipulating graphene kinks through positive and negative radiation pressure effects. *Carbon.* 2019;141:253–257. DOI: 10.1016/j.carbon.2018.09.032.
7. The sine-Gordon Model and its Applications: From Pendula and Josephson Junctions to Gravity and High-Energy Physics. Cuevas-Maraver J, Kevrekidis P, Williams F, editors. Cham: Springer; 2014. 263 p. DOI: 10.1007/978-3-319-06722-3.
8. Getmanov BS. Soliton bound states in the φ^4 in two-dimensions field theory. *JETP Lett.* 1976;24:291–295.
9. Saadatmand D, Dmitriev SV, Borisov DI, Kevrekidis PG, Fatykhov MA, Javidan K. Effect of the φ^4 kink’s internal mode at scattering on a \mathcal{PT} -symmetric defect. *JETP Lett.* 2015;101:497–502. DOI: 10.1134/S0021364015070140.
10. Saadatmand D, Javidan K. Collective-coordinate analysis of inhomogeneous nonlinear Klein–Gordon field theory. *Braz. J. Phys.* 2013;43:48–56. DOI: 10.1007/s13538-012-0113-y.
11. Marjaneh A, Simas F, Bazeia D. Collisions of kinks in deformed φ^4 and φ^6 models. *Chaos, Solitons and Fractals.* 2022;164:112723. DOI: 10.1016/j.chaos.2022.112723.
12. Zhang F, Kivshar YS, Vázquez L. Resonant kink-impurity interactions in the φ^4 model. *Phys. Rev. A.* 1992;46(8):5214–5220. DOI: 10.1103/PhysRevA.46.5214.
13. Lizunova MA, Kager J, de Lange S, van Wezel J. Kinks and realistic impurity models in φ^4 -theory. *Int. J. Mod. Phys. B.* 2022;36(5):2250042. DOI: 10.1142/S0217979222500424.
14. Lizunova M, Kager J, de Lange S, van Wezel J. Emergence of oscillons in kink–impurity interactions. *J. Phys. A: Math. Theor.* 2021;54(31):315701. DOI: 10.1088/1751-8121/ac0d36.
15. Romańczukiewicz T, Shnir Y. Oscillons in the presence of external potential. *J. High Energ. Phys.* 2018;2018:101. DOI: 10.1007/JHEP01(2018)101.
16. Fakhretdinov MI, Samsonov KYu, Dmitriev SV, Ekomasov EG. Attractive impurity as a generator of wobbling kinks and breathers in the φ^4 model. *Russ. J. Nonlinear Dyn.* 2024;20(1):15–26. DOI: 10.20537/nd231206.
17. Fakhretdinov MI, Samsonov KYu, Dmitriev SV, Ekomasov EG. Kink dynamics in the φ^4 model with extended impurity. *Russ. J. Nonlinear Dyn.* 2023. Vol. 19;(3):303–320. DOI: 10.20537/nd230603.
18. Dorey P, Romańczukiewicz T. Resonant kink–antikink scattering through quasinormal modes. *Phys. Lett. B.* 2018;779:117–123. DOI: 10.1016/j.physletb.2018.02.003.
19. Ekomasov EG, Gumerov AM, Kudryavtsev RV, Dmitriev SV, Nazarov VN. Multisoliton dynamics in the sine-Gordon model with two point impurities. *Braz. J. Phys.* 2018;48(6):576–584. DOI: 10.1007/s13538-018-0606-4.
20. Samsonov KYu, Kabanov DK, Nazarov VN, Ekomasov EG. Localized nonlinear waves of the sine-Gordon equation in the model with three extended impurities. *Comput. Res. Model.* 2024;16(4):855–868. DOI: 10.20537/2076-7633-2024-16-4-855-868.
21. Ekomasov EG, Samsonov KYu, Gumerov AM, Kudryavtsev RV. Nonlinear waves of the sine-

- Gordon equation in the model with three attracting impurities. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2022;30(6):749–765. DOI: 10.18500/0869-6632-003011.
22. Ekomasov EG, Kudryavtsev RV, Samsonov KYu, Nazarov VN, Kabanov DK. Kink dynamics of the sine-Gordon equation in a model with three identical attracting or repulsive impurities. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2023;31(6):693–709. DOI: 10.18500/0869-6632-003069.
 23. Fakhretdinov MI, Ekomasov EG. Localized waves of the φ^4 equation in models with two extended impurities. *Comput. Res. Model.* 2025;17(3):437–449. DOI: 10.20537/2076-7633-2025-17-3-437-449.
 24. Fakhretdinov MI, Kabanov DK, Ekomasov EG. Localized waves of the φ^4 equation in the model with two-point impurities. *Rus. J. Nonlin. Dyn.* 2025;21(3):419–432. DOI: 10.20537/nd250703.
 25. Schiesser WE. *The Numerical Method of Lines: Integration of Partial Differential Equations*. San Diego: Academic Press; 2012. 326 p.
 26. Belova TI, Kudryavtsev AE. Solitons and their interactions in classical field theory. *Phys. Usp.* 1997;40:359–387. DOI: 10.1070/PU1997v040n04ABEH000227.
 27. Israeli M, Orszag SA. Approximation of radiation boundary conditions. *Journal of Computational Physics*. 1981;41(1):115–135. DOI: 10.1016/0021-9991(81)90082-6.



Фахретдинов Марат Ирекович — родился в Уфе (1984). Окончил физический факультет Башкирского государственного университета (2007). Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности «Теоретическая физика». Доцент кафедры теоретической физики Уфимского университета науки и технологий. Область исследовательских интересов — нелинейные волны, вычислительная физика. Опубликовал около 50 научных и методических работ.

Россия, Республика Башкортостан, 450076 Уфа, ул. Заки Валиди, 32/1
 Уфимский университет науки и технологий
 E-mail: fmi106tf@gmail.com
 ORCID: 0000-0002-5338-2933
 AuthorID (eLibrary.Ru): 586430



Екомасов Евгений Григорьевич — родился в с. Анучино Приморского края (1958). Окончил физический факультет Башкирского государственного университета (1980). Защитил диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности «Физика магнитных явлений» (1991, МГУ) и доктора физико-математических наук по специальности «Физика конденсированного состояния» (2005, ЧелГУ). Профессор кафедры теоретической физики Уфимского университета науки и технологий. Награжден Нагрудным знаком «Почетный работник высшего образования РФ» (2011) и Почетной грамотой Министерства образования и науки РФ (2008). Область исследовательских интересов — теоретическая и математическая физика, физика конденсированного состояния, спинтроника, вычислительная физика. Опубликовал более 200 научных и методических работ.

Россия, Республика Башкортостан, 450076 Уфа, ул. Заки Валиди, 32/1
 Уфимский университет науки и технологий
 E-mail: ekomasoveg@gmail.com
 ORCID: 0000-0002-6194-3358
 AuthorID (eLibrary.Ru): 29060