

Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2026. Т. 34, № 4
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2026;34(4)

Научная статья
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003220
EDN: ХКААНД

Моделирование динамики цены криптовалют через неявные стохастические полиномиальные связи и теорию катастроф

Ю. Н. Бесчастнов

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия

E-mail: ✉ y.beschastnov@mail.ru

Поступила в редакцию 11.02.2026, принята к публикации 3.05.2026,

опубликована онлайн 12.05.2026, опубликована 31.07.2026

Аннотация. Работа посвящена созданию теоретической модели криптовалютных микрокризисов (резкого расхождения ожиданий участников рынка), в которой режимы и их переключения являются внутренним свойством системы, а не задаются извне. *Цель* — переход от экзогенных моделей с переключениями к эндогенной модели на базе теории катастроф. Основные задачи: (1) формализация модели через стохастические полиномиальные связи; (2) анализ решений этой системы; (3) вывод уравнений динамики и разработка метода выделения корней. Главные *результаты*: разработан метод выделения стохастических корней, решающий проблему бесконечного числа решений; получены замкнутые формулы для сингулярных стохастических дифференциальных уравнений, описывающих динамику стохастических корней многочлена; представлена калибровка модели на симуляционных данных для катастрофы A_{+3} , демонстрирующая способность подхода воспроизводить ключевые стилизованные факты многорежимности временного ряда. Полученный аппарат открывает дальнейшие перспективы для управления рисками на высоковолатильных рынках.

Ключевые слова: теория катастроф, бифуркации, стохастические полиномиальные связи, микрокризисы, сингулярные стохастические дифференциальные уравнения.

Благодарности. Автор благодарит своих научных наставников Г. Г. Малинецкого и В. А. Громова.

Для цитирования: Бесчастнов Ю. Н. Моделирование динамики цены криптовалют через неявные стохастические полиномиальные связи и теорию катастроф // Известия вузов. ПНД. 2026. Т. 34, № 4. С. 517–545. DOI: 10.18500/0869-6632-003220. EDN: ХКААНД

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Modeling cryptocurrency price dynamics via implicit stochastic polynomial couplings and catastrophe theory

Y. N. Beschastnov

Keldysh Institute of Applied Mathematics of the RAS, Moscow, Russia

E-mail: ✉y.beschastnov@mail.ru

Received 11.02.2026, accepted 3.05.2026, available online 12.05.2026, published 31.07.2026

Abstract. This work is devoted to constructing a theoretical model of cryptocurrency micro-crises (sharp divergences in market participants' expectations), in which regimes and their switching are intrinsic properties of the system rather than being externally imposed. The *aim* is to move from exogenous switching models to an endogenous model based on catastrophe theory. The main objectives are: (1) to formalize the model using stochastic polynomial relations; (2) to analyze the solutions of this system; (3) to derive the dynamic equations and develop a method for extracting roots. The main *results*: a method for extracting stochastic roots is developed, resolving the problem of an infinite number of solutions; closed-form formulas are obtained for singular stochastic differential equations describing the dynamics of the stochastic roots of a polynomial; calibration of the model is presented using simulated data for the A_{+3} catastrophe, demonstrating the ability of the approach to reproduce key stylized facts of multimodality in time series. The obtained framework opens further prospects for risk management in highly volatile markets.

Keywords: catastrophe theory, bifurcations, stochastic polynomial couplings, micro-crises, singular stochastic differential equations (SDEs).

Acknowledgements. To my mentors in science, G. G. Malinetsky and V. A. Gromov.

For citation: Beschastnov YN. Modeling cryptocurrency price dynamics via implicit stochastic polynomial couplings and catastrophe theory. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2026;34(4):517–545. DOI: 10.18500/0869-6632-003220

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Модельное представление аномально волатильных цен криптоактивов некорректно описывается в современных классических моделях, которыми пользуются на практике для ценообразования деривативов [1]. Причина этого в том, что у данной динамики наблюдается случайно-кусочно-гладкая эволюция плотности распределения. Другими словами, крипторынок подчиняется закону распределения, который в какой-то (возможно, случайный для нас) момент времени спонтанно меняется. Финансовая интерпретация данного факта заключается в том, что крипторынок очень чувствителен к внешним непредсказуемым факторам, которые могут резко изменить структуру, приводя к микрокризисам — резким расхождениям ожиданий участников рынка, когда рыночные ожидания распадаются на несколько мод, каждая из которых определяет разные ценовые ожидания на некоторый период вперёд. Назовем сменами режимов рынка следующие ситуации: выход из микрокризиса, вход в микрокризис или переход в другой микрокризис.

Описание цены в классической модели Блэка–Шоулза–Мертон плохо описывает реальное поведение рынка даже без микрокризиса [1]. Главный недостаток модели — представление цены как геометрическое броуновское движение с постоянной волатильностью. В реальности даже невооруженным глазом видно, что инкремент реальной цены имеет не одинаковое нормальное распределение в динамике.

На данное время в современной финансовой математике для лучшего описания динамики рынка используют представления, как в моделях SABR, LSV [1], способные корректно моделировать совместное движение цены и волатильности. Тем не менее все эти модели локальны, то

есть описывают локально-гладкую часть эволюции распределения цены. Они не способны смоделировать ключевое для микрокризисов явление — резкий переход рынка в состояние, в котором возникает множественность ожиданий.

Существует также отдельный класс моделей с переключениями (SM) [2], который редко используется на практике из-за сложности калибровки, но напрямую предназначен для описания смены режимов рынка. В этих моделях динамика цены и волатильности управляется скрытой марковской цепью, которая переключает параметры между несколькими предопределёнными состояниями. Хотя такие модели интуитивны и способны описывать изменения структуры системы, они имеют принципиальное ограничение: переключение режимов является экзогенным или параметрически эндогенным, то есть задаётся извне через динамику цепи Маркова или параметрически через определённый дополнительный явный оператор, а не возникает эндогенно через структуру и законы системы. Кроме того, данный класс моделей не подходит для описания множественности ожиданий в конкретный момент времени.

Для преодоления этого концептуального барьера в настоящей работе предлагается фундаментально иной подход, основанный на синтезе теории катастроф Рене Тома [3] и стохастического анализа. Теория катастроф предоставляет строгий математический аппарат описания большого множества типов структурного изменения в поведении гладких систем. Градиенты потенциалов, соответствующих формам катастроф, при некоторых значениях управляющих параметров имеют несколько нулей (корней), каждый из которых может интерпретироваться как отдельное ожидание участников рынка. В отличие от экзогенных и параметрически эндогенных переключений в SM (моделях с переключениями), формы катастроф определяют режимы строго эндогенно как прямое следствие структуры системы, что соответствует экономической интуиции о накоплении скрытых напряжений или охлаждения на крипторынке. Мы применяем этот аппарат для моделирования совместной динамики логарифма цены криптоактива X_s и ненаблюдаемого стохастического фактора v_s , задавая их через систему неявных стохастических полиномиальных связей вида

$$\begin{cases} \partial_{X_s} f_{s, W_s}(X_s, v_s) = 0, \\ \partial_{v_s} f_{s, W_s}(X_s, v_s) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Важное уточнение: переменная X_s в данной модели — это не наблюдаемая цена и не её логарифм. Она интерпретируется как ожидание участника рынка относительно будущего логарифма цены. В каждый момент времени система может иметь несколько вещественных решений $X_s^{(j)}$, каждое из которых соответствует ожиданию отдельной группы агентов (например, маркет-мейкеров, институциональных или розничных трейдеров). На реальном рынке одновременно существует только одна цена, но могут сосуществовать разные ожидания. Модель описывает именно эволюцию ожиданий, а не единственную ценовую траекторию.

В данной системе (1) функция f_{s, W_s} принадлежит к одному из элементарных типов катастроф Тома (серии A_n , D_n , $E_{\pm 6}$) [3], что определяет характер и количество режимов, а её коэффициенты являются бесконечно гладкими функциями от винеровского процесса и времени, обеспечивая стохастичность модели. Таким образом, режимы и переключения режимов становятся внутренним свойством системы, что устраняет ключевой недостаток экзогенных SM (моделей с переключениями) и позволяет описывать множественность ожиданий.

Однако такой неявный подход порождает глубокую и нетривиальную математическую проблему. Соответствующее формальное представление модели в виде стохастической полиномиальной системы (1) сталкивается с проблемой неединственности сильных решений [4] (определение будет описано в основной части) из-за структуры многочленов и свойства перемешивания их стохастических корней. Это означает, что для одного и того же начального условия (X_0, v_0) существует как конечное число сильных решений системы (1), так и бесконечное число

их смесей с детерминированным правилом перехода, которые также являются сильными решениями не только полиномиальной системы, но и (почти всюду) системы СДУ, порожденной этой полиномиальной системой (основная глава). Под стохастическими корнями здесь понимаются непрерывные на интервалах между особыми моментами (где дискриминант или матрица вторых производных обращается в ноль) непрерывные функции от винеровского процесса и времени (обсуждается в основной части), которые в каждый момент удовлетворяют уравнению и являются сильными решениями относительно винеровского процесса. Каждый такой корень определен на своём интервале существования, который также имеет стохастический характер, и при переходе через особую точку некоторые корни могут сливаться и уходить в комплексную плоскость, теряя непрерывность. Однако если не накладывать дополнительных ограничений, то допустимыми оказываются и любые комбинации, составленные из фрагментов различных корней на счётном дизъюнктном объединении произвольных последовательных интервалов времени (разрывное склеивание в не более чем счётные, но произвольные моменты времени). Такие смешанные решения, адаптированные к той же фильтрации, также формально являются сильными решениями исходной системы и ее СДУ (почти всюду). В результате возникает не просто конечный набор возможных сильных решений, а целый бесконечный набор. Такие случаи рассматриваться не будут! Давайте ограничимся смешиванием в критические моменты (особые точки). Хотя такие решения можно промоделировать, они представляют ограниченную ценность для практического анализа, хеджирования и управления рисками, где принципиально важно различать компоненты смешивания решений, которые, в свою очередь, определяют режимы рынка, в нашем случае стохастические корни системы (1). Тем не менее вывод решения данного типа из исходной неявной системы стохастических полиномиальных связей представляет собой отдельную сложную задачу. Таким образом, дополнительной задачей, решаемой в данной работе, является разработка и обоснование метода выделения стохастических корней системы многочленов. Предложенный метод позволяет выделить из бесконечного множества смешивания решений корни $X_s = H(W_s, s)$, по крайней мере $H \in C^{2,1}(\mathbb{R}, [0, \tau])$. Этот шаг критически важен для превращения абстрактной математической конструкции в работоспособный инструмент финансового моделирования.

Эффективность любой модели подтверждается не только теоретической строгостью, но и её способностью давать точные и устойчивые результаты при работе с данными. В отличие от эмпирических исследований, зависящих от доступности исторических рыночных данных, наша работа фокусируется на калибровке модели на симуляционных данных для катастрофы A_{+3} . Этот подход позволяет в условиях контролируемого вычислительного эксперимента верифицировать корректность математического аппарата, оценить точность численных методов и продемонстрировать воспроизводимость результатов. Процесс калибровки заключается в численном подборе параметров, минимизирующих расхождение между теоретическими и симуляционными логарифмами цен в физической мере [1], что обеспечивает объективную валидацию модели без влияния внешних рыночных шумов и неопределённостей.

Для того чтобы чётко обозначить место предлагаемого подхода в современном исследовательском поле и аргументировать его новизну, необходимо провести систематический обзор литературы. В нём мы последовательно рассмотрим: класс моделей с переключением режимов SM и их ключевые ограничения; основы теории катастроф и их применение в динамических системах, описывающих экономику и финансовые рынки; математические работы, посвящённые проблеме неединственности решений стохастических дифференциальных уравнений, что является критически важным для практической реализации нашей модели. Такой обзор позволит не только продемонстрировать исследовательский пробел, на заполнение которого направлена данная работа, но и выстроить мост между абстрактным математическим аппаратом теории катастроф и прикладными задачами финансового моделирования в условиях экстремальной неустойчивости.

1. Обзор литературы

Рассмотрим ключевые монографии, посвящённые моделям с переключениями (SM), которые формируют методологический фундамент для анализа многорежимного поведения. Важно подчеркнуть, что их объединяет общая концептуальная черта: во всех рассматриваемых подходах смена режимов трактуется либо как полностью экзогенный процесс, либо как параметрически эндогенный, то есть управляемый заранее заданными правилами, явно зависящими от состояния. При этом такие модели не описывают множественность ожиданий на рынке в конкретный момент, и ни в одной из этих работ не ставится вопрос о структурной эндогенности — возникновении самих режимов из структуры системы.

Например, в монографии [5] систематически излагается метод анализа нестационарных цепей Маркова, основанный на разделении временных масштабов. Несмотря на возникновение медленной динамики как результата усреднения и агрегации состояний, оператор агрегации вводится по заранее заданным правилам. В развитие этой темы другой классический труд [2] проводит детальное сравнение экзогенных переключений и переключений, зависящих от состояния. Однако важно отметить, что, несмотря на то, что последний тип авторы иногда называют эндогенным, эта зависимость является именно параметрической: интенсивности переключений между заранее заданными режимами функционально зависят от траектории системы, но сами режимы не возникают из неё спонтанно.

Далее, в монографии [6] фокус смещён на задачи финансовой оптимизации, где чётко разделяются экзогенные факторы (например, состояния рынка) и эндогенные управляемые решения. В этой работе режимы, такие как фазы рыночного цикла, задаются экзогенно, часто в виде марковской цепи, и не являются продуктом самоорганизации внутренних процессов. Наконец, в работе [7] разрабатывается теория стохастической достижимости для систем, где неопределённость порождается экзогенными источниками (шум, случайные моменты переключений), а гибридная структура (набор режимов и правила переходов) жёстко задана извне. Таким образом, анализ сосредоточен на влиянии внешней случайности на детерминированную логику системы, а не на её способности порождать новые режимы.

Подводя итог, можно сказать, что эти фундаментальные работы, несмотря на свою аналитическую глубину и широту приложений, остаются в рамках парадигмы, исключающей возможность моделирования режимов, возникающих исключительно из нелинейной динамики системы без предопределённых правил переключения.

Если рассматривать более прикладные работы в данной области, стоит отметить статью [8], где авторы исследуют проблему калибровки моделей локальной и стохастической волатильности (LSV) к рыночным данным. В рамках исследования они предлагают новый класс моделей Regime Switching Local Volatility (RSLV), где стохастическая волатильность управляется скачкообразным процессом с интенсивностями, зависящими от уровня цены базового актива. Однако, как и в остальных работах, смена режима здесь также является параметрически эндогенной. Это означает, что цена базового актива в периоды микрокризисов описывается заданным стохастическим дифференциальным уравнением, коэффициент диффузии которого зависит от скачкообразного процесса, а сам этот процесс определяется текущей ценой актива.

Еще один подход к исследованию режимов стохастических систем описывается через плотность распределения траекторий процессов. Общим для данных исследований является фокус на анализе и моделировании сложных стохастических систем, где эволюция состояний описывается уравнениями Фоккера–Планка и их обобщениями. Так, в статье [9] автор предложил алгоритм оценки параметров диффузии со сменой режимов, использующий преобразование Фурье для численного решения системы уравнений Фоккера–Планка. В развитие данного направления в работе [10] получена общая формулировка уравнения ФПК в рамках теории обобщённых стохастических

ческих гибридных систем (GSHS), охватывающая все известные частные случаи и позволяющая анализировать эволюцию распределений вероятностей гибридных состояний.

Рассмотрим теперь работы, связанные с теорией бифуркаций, теорией катастроф и экономическими или финансовыми динамическими системами. В первую очередь нельзя не упомянуть семь главных монографий по теории ветвления и бифуркациям нелинейных уравнений [11–17]. Также немаловажную роль играют работы Громова [18, 19], где приведен экзотический бифуркационный анализ нелинейных уравнений в частных производных. В рамках теории катастроф фигурируют четыре главные монографии [3, 20, 21].

Основной результат описания экономических кризисов через теорию катастроф представлен в книге [22] и заключается в обосновании того, что разрывы и скачки представляют собой не аномалию, а органическое свойство экономических систем. Автор предлагает их таксономию, объединяя теорию катастроф для описания резких коллапсов и теорию хаоса для сложной, чувствительной к условиям динамики, используя теорию бифуркаций как общую математическую основу. Ключевой вывод: характер процесса (непрерывный или дискретный) зависит от масштаба наблюдения. В итоге автор предлагает синтез на основе теории сложности, представляя экономику как самоорганизующуюся систему, где стабильность периодически прерывается спонтанно возникающими катастрофическими изменениями, что ставит под сомнение классический идеал плавного равновесия.

Если рассматривать стохастические аспекты теории катастроф и бифуркаций, то можно рассмотреть работы Олемского [23], где вводятся бифуркации стохастических систем с типом полета Леви, а также монографию [24], где впервые вводятся понятия статистических и динамических бифуркаций в стохастических системах. Также важную роль играют статьи по аномальной диффузии [25, 26], которая описывает финансовые кризисы и память среды при движении молекул. В работах [27, 28] исследуется теория бифуркаций и катастроф в стохастических системах, описывающих физические, биологические и нейропроцессы.

Статья [29] наиболее близка к нашей тематике. Авторы описали стохастическую модель катастрофы сборки к данным фондового рынка и показали, что модель лучше объясняет крах, чем альтернативные модели, благодаря бимодальной структуре данных, связанной с поведенческими факторами рынка.

Что касается приложения анализа динамических систем в финансах и экономике, стоит выделить статьи [30, 31]. В этих статьях исследуется, как рациональный выбор среди простых прогностических стратегий может приводить к сложной и хаотической динамике в экономических системах.

В масштабе макроструктур Масанао Аоки в своей книге [32] предлагает новый подход к макроэкономике, основанный на статистической физике. Автор отвергает модель агрегированного агента, утверждая, что макроэкономические явления — результат взаимодействия множества разнородных субъектов, а равновесие следует понимать как распределение вероятностей. Ключевыми идеями являются определяющая роль совокупного спроса и концепция «ловушки неопределённости», объясняющая длительные кризисы.

Развивая данную линию исследований, авторы [33] демонстрируют, как аппарат статистической физики используется для анализа финансовых рынков. Ключевой результат: распределения доходностей активов имеют тяжёлые хвосты, что несовместимо с гипотезой о нормальном распределении. Для описания этого явления автор предлагает использовать устойчивые распределения Леви и соответствующие стохастические процессы (полёты Леви), которые лучше учитывают экстремальные колебания рынка. Этот подход меняет парадигму оценки рыночных рисков и управления капиталом. На уровне глобального макроэкономического моделирования центральные банки и министерства финансов используют крупномасштабные параметрические динамические системы, описывающие экономику стран или мира, в частности, новокейнсианские модели с гетерогенными агентами [34, 35] и агентно-ориентированную модель Eurace@Unibi [36].

Важным для данной работы является раздел, посвящённый сингулярным стохастическим дифференциальным системам и уравнениям, допускающим множественность или даже бесконечное число решений. Ключевая монография по этой тематике [4], где собраны и доказаны результаты о слабой и сильной неединственности. Существенный вклад внесён в [37], в которой получено исчерпывающее описание всех возможных слабых решений для однородного стохастического дифференциального уравнения без сноса. На основе фундаментального решения, проходящего через нули коэффициента, можно целенаправленно конструировать любой другой процесс, добавляя контролируемую задержку в этих точках. Это позволяет не делать предположений о единственности, а выбирать или строить процесс с нужными свойствами, например, с наличием или отсутствием сильной марковости.

Среди первых работ по данной тематике следует отметить [38, 39], где только начинают исследовать уравнения с сингулярными коэффициентами, которые нарушают условия неединственности. Представляет интерес и задача о неединственности стационарного решения уравнения Маккина–Власова, изученная, в частности, в [40] и в известной монографии Франка [41].

Таким образом, проведенный анализ литературы выявил существенные ограничения существующих подходов к моделированию рыночных кризисов, в частности микрокризисов. Классические и современные модели, основанные на предположении о экзогенном переключении режимов, оказываются неспособными адекватно описывать качественные изменения, характерные для криптовалютных рынков в периоды стресса, и тем более множественность ожиданий. Несмотря на разнообразие методологий — от гибридных систем с переключениями до сложных стохастических конструкций, — в них отсутствует механизм эндогенного структурного возникновения катастрофических переходов как внутреннего свойства системы. Этот концептуальный пробел обуславливает необходимость разработки принципиально иного подхода, способного формализовать момент структурного перехода как результат самоорганизации рыночных сил. В данном контексте синтез теории катастроф и стохастического анализа представляется естественным и перспективным направлением, позволяющим преодолеть указанные ограничения.

В конструктивной части исследования вводится абстрактная детерминированная математическая модель, которая описывает динамику ненаблюдаемых (скрытых) экономических и финансовых переменных. Ее следствием является стохастическая модель, объясняющая возникновение микрокризисов. Данная модель, использующая аппарат теории катастроф, предлагает новый формализм для описания совместной динамики и позволяет дать эндогенное объяснение механизмам резких системных переходов и множественности ожиданий рынка, что будет подробно проанализировано далее.

2. Интерпретация и вывод модели сингулярных стохастических дифференциальных уравнений

2.1. Интерпретация модели. Как говорилось во введении, в основе предлагаемого подхода лежит синтез теории катастроф Рене Тома и методов стохастического анализа, позволяющий принципиально по-новому взглянуть на природу микрокризисных явлений. Теория катастроф предоставляет строгий математический аппарат для описания качественных изменений в поведении гладких систем, когда при плавном изменении управляющих параметров система внезапно переходит из одного устойчивого состояния в другое. Эти качественные перестройки, описываемые формами катастроф $A_n, D_n, E_{\pm 6}$, не являются внешними шоками, а возникают эндогенно, как следствие внутренней структуры системы. В контексте финансовых рынков это соответствует идее о резком расхождении ожиданий участников рынка.

Финансово-экономический смысл такого моделирования заключается в преодолении ключевого ограничения классических подходов, которые либо предполагают гладкую эволюцию законов распределения (модели стохастической волатильности [1]), либо вводят режимы через предопределённые операторы (модели с переключениями, SM), но при этом не учитывают множественность ожиданий и получают многорежимность как заданное свойство, а не как следствие внутренней структуры системы. Предлагаемая в данной работе модель формализует этот процесс через систему неявных стохастических полиномиальных связей, где совместная динамика логарифма цены X_s и какого-то скрытого необозримого фактора v_s задаётся условиями (1). Функция f_{s,W_s} , принадлежащая к одному из нормальных форм катастроф Тома, играет роль потенциала системы, а её коэффициенты, зависящие от винеровского процесса W_s и времени s , обеспечивают стохастический характер модели. Таким образом, (X_s, v_s) — стохастические корни системы (1) — определяются геометрией этого потенциала. Каждый вещественный корень X_s (или компонента X_s в двумерном случае) интерпретируется как одно из возможных ценовых ожиданий — уровень логарифма цены, который считает равновесным некоторая группа участников рынка. Когда система имеет несколько вещественных корней (например, три при $\Delta_s < 0$ для катастрофы A_{+3}), это означает сосуществование различных ожиданий у разных агентов. Сама по себе модель не предсказывает, какое из этих ожиданий реализуется как фактическая цена; она описывает структуру возможных состояний рынка. Момент катастрофы (бифуркации) [11, 19] соответствует резкому изменению числа сосуществующих ожиданий — входу в микрокризис или выходу из него.

$$A_2 : \quad X_s^3 + c_1 X_s + M, \quad (2.1)$$

$$A_{\pm 3} : \quad \pm X_s^4 + c_2 X_s^2 + c_1 X_s + M, \quad (2.2)$$

$$A_4 : \quad X_s^5 + c_3 X_s^3 + c_2 X_s^2 + c_1 X_s + M, \quad (2.3)$$

$$A_{\pm 5} : \quad \pm X_s^6 + c_4 X_s^4 + c_3 X_s^3 + c_2 X_s^2 + c_1 X_s + M, \quad (2.4)$$

$$A_6 : \quad X_s^7 + c_5 X_s^5 + c_4 X_s^4 + c_3 X_s^3 + c_2 X_s^2 + c_1 X_s + M, \quad (2.5)$$

$$D_{\pm 4} : \quad X_s^2 v_s \pm v_s^3 + c_3 X_s^2 + c_2 v_s + c_1 X_s + N, \quad (2.6)$$

$$D_5 : \quad X_s^2 v_s + v_s^4 + c_4 v_s^2 + c_3 X_s^2 + c_2 v_s + c_1 X_s + N, \quad (2.7)$$

$$D_{\pm 6} : \quad X_s^2 v_s \pm v_s^5 + c_5 v_s^3 + c_4 v_s^2 + c_3 X_s^2 + c_2 v_s + c_1 X_s + N, \quad (2.8)$$

$$E_{\pm 6} : \quad X_s^3 \pm v_s^4 + c_5 X_s v_s^2 + c_4 v_s^2 + c_3 X_s v_s + c_2 v_s + c_1 X_s + N. \quad (2.9)$$

Как было сказано выше, эти формы, включающие полиномы от переменных X_s, v_s с коэффициентами $c_k(W_s, s) \in C^\infty(\mathbb{R}, [0, \tau])$, зависящими от времени и винеровского процесса W_s , дополнены стандартными морсовскими частями M и N от каких-нибудь иных переменных, не интересующих нас и бесполезных для анализа из-за тривиального условия на их частные производные. На первый взгляд, данная конструкция носит сугубо теоретический характер и может восприниматься как отвлечённый математический объект. Однако дальнейшее изложение раскрывает содержательную экономическую интерпретацию этой абстрактной схемы.

Используя теоремы Тома и стохастическое расширение, можно показать, что наша стохастическая модель (1) — это локальное следствие более общей, возможно, необозримой детерминированной модели, которая описывает динамику первого момента скрытых факторов нужного нам рынка. Покажем, что существование общей модели ведет к системе вида (1), которую затем можно стохастически расширить. Затем логично предположить, что именно для определенной

криптовалютной пары (X_s, v_s) или просто X_s существует такая общая модель. Для начала распишем несколько известных фактов из теории динамических систем и эконометрики, а после введем несколько экономических предположений для полного доказательства взаимосвязи моделей.

Любой динамический дискретный показатель можно локально по времени описать через дискретное рекуррентное отображение (теорема Такенса) [42]. В связи с этим для конечного многомерного временного ряда $\{x_n\}_{n=1}^N$ можно записать дискретное отображение $x_n = P(x_{n-i_1}, \dots, x_{n-i_L})$ или даже $x_n = P_n(x_{n-i_1}, \dots, x_{n-i_L})$, описывающее эволюцию ряда. Однако для того, чтобы свести проблему к теории катастроф, нужна не просто динамическая система, а градиентная динамическая система. Существует много работ (обзор [22]) с критикой применения теории катастроф в экономике и финансовых рынках по причине того, что главным объектом исследования являются динамические градиентные системы, которые имеют очень простой вид аттрактора [3, 42] по сравнению с реальными хаотическими экономическими системами. Тем не менее если из $\{x_n\}_{n=1}^N$ (для большого N) выбрать многомерный вектор $(x_{N-L}, \dots, x_N)$, где $L \approx N/2$, то существует бесконечное множество градиентных систем с задержками, которые описывают локально по времени динамические показатели в расширенном пространстве, где $(x_{N-L}, \dots, x_N)$ является одной из неподвижных точек системы, то есть экстремумом какого-то необозримого потенциала $V(y_1, \dots, y_{L+1})$.

После получения градиентной динамической системы необходимо ввести некоторые экономические предположения для того, чтобы сделать модель более реалистичной. Введем 3 уровня локализации модели. Для начала рассмотрим самый общий уровень μ . Проблема в том, что для сильно удаленных друг от друга временных событий может произойти глобальный кризис, который поменяет структуру экономики (война, инопланетное вторжение и т. д.). Тогда агрегация определенной криптовалютной пары (X_s, v_s) может кардинально поменяться и стать зависимой совершенно от других первых моментов скрытых переменных и другого потенциала. Поэтому вектор первых моментов скрытых переменных общей модели обозначим как E_μ , а потенциал — $V_{\delta(\mu)}^\mu$, где μ показывает глобальную перестройку экономики. Далее идет второй уровень $\delta(\mu)$, который находится внутри уровня μ . Так как мы делали некоторые приближения для получения V , мы можем точно сказать, что данный градиент потенциала будет не очень долго описывать поведение скрытых факторов (локальность потенциала, локальность регрессионного анализа). Следовательно, обозначим перекалибровку потенциала внутри μ как $V_{\delta(\mu)}^\mu$ и получим

$$\dot{E}_\mu = -\nabla_E V_{\delta(\mu)}^\mu(E_\mu). \quad (3.1)$$

Для применения теоремы Тома нужно, чтобы потенциал $V_{\delta(\mu)}^\mu$ зависел только от не более пяти существенных параметров $c^{\tau_{\delta(\mu)}}$, или для простоты пусть будет всего пять управляющих параметров модели (3.1) [3], которые могут функционально меняться внутри уровня $\delta(\mu)$ (если было N параметров фиксированных, а 5 управляющих, то после калибровки из N параметров какие-то 5 стали управляющими, а старые пять управляющих стали фиксированными). Перепишем систему как

$$\dot{E}_\mu = -\nabla_E V_{\delta(\mu)}^\mu(E_\mu; c^{\tau_{\delta(\mu)}}). \quad (3.2)$$

Далее проанализируем скорость первых моментов скрытых факторов $\dot{E}_\mu$, а после уже обсудим третий уровень локализации модели $\tau_{\delta(\mu)}$. В рамках микроструктурного масштаба времени (нано- и миллисекундные интервалы) любые рынки или социально-экономические агенты функционируют как дискретные системы: цены меняются не непрерывно, а тиками, сделки заключаются в отдельные моменты времени, а состояние “orderbook” [43] можно рассматривать как ступенчатую функцию. В связи с этим даже необозримые скрытые переменные, как $E_\mu(t)$,

отражающие состояние рынка, на микроуровне естественным образом можно считать кусочно-постоянными. Поэтому предположим, что $E_\mu(t)$ — кусочно-постоянное многообразие (почти всюду, кроме множества меры Лебега нуль):

$$\nabla_E V_{\delta(\mu)}^\mu(E_\mu; c^{\tau_{\delta(\mu)}}) = 0 \quad \text{п.в.} \quad (3.3)$$

Для простоты перейдем к строгому равенству $\nabla_E V_{\delta(\mu)}^\mu(E_\mu; c^{\tau_{\delta(\mu)}}) = 0$. Тогда по теореме Тома [3, 21] существует локальный диффеоморфизм $E_\mu = g_{\delta(\mu)}^{\mu; \tau_{\delta(\mu)}}(U_{\mu; \delta(\mu)}^{\tau_{\delta(\mu)}})$ в окрестности точек $E_{\mu; \delta(\mu)}^{\tau_{\delta(\mu)}} : \nabla_E V_{\delta(\mu)}^\mu(E_{\mu; \delta(\mu)}^{\tau_{\delta(\mu)}}; c^{\tau_{\delta(\mu)}}) = 0$ такой, что после замены можно переписать как

$$\nabla_U f_{\delta(\mu)}^{\mu; \tau_{\delta(\mu)}}(U_{\mu; \delta(\mu)}^{\tau_{\delta(\mu)}}; c^{\tau_{\delta(\mu)}}) = 0, \quad (3.4)$$

где $f_{\delta(\mu)}^{\mu; \tau_{\delta(\mu)}}$ — это нормальная форма, которая получена через локальный диффеоморфизм в окрестности равновесной точки $E_{\mu; \delta(\mu)}^{\tau_{\delta(\mu)}}$ потенциала $V_{\delta(\mu)}^\mu$. Вследствие теоремы Тома $f_{\delta(\mu)}^{\mu; \tau_{\delta(\mu)}}$ может принять близкую форму только A_n, D_n и $E_{\pm 6}$ из предложенной выше модели (2.1)–(2.9). Тем самым $\tau_{\delta(\mu)}$ — это третий уровень локализации модели, который определяет локализацию $E_{\mu; \delta(\mu)}^{\tau_{\delta(\mu)}}$, то есть в какой точке именно была получена нормальная форма катастрофы.

Дополним наши экономические предположения еще одним фактом. Пусть рынок находится в хаосе (множественное проявление микрокризисов), например, из-за политических или экономических заявлений властей (математически обозначим это как $\det |\text{Hess } V_{\delta(\mu)}^\mu| = 0$ [3]), которые изменяют количество мнений и ожиданий инвесторов. Тогда справедливо, что при условии (3.4) и множественности микрокризисов на части крипторынка (3.2), а также из-за того, что описывается динамика первого момента, новая агрегированная переменная $U_{\mu; \delta(\mu)}^{\tau_{\delta(\mu)}}$, а именно её компоненты вне морсовской части будут иметь стохастический характер. В связи с этим логично перейти к стохастическому потенциалу с временным масштабом мезоуровня s , где $c_k^{\tau_{\delta(\mu)}}$ зависят от времени s и винеровского процесса $W_s^{\tau_{\delta(\mu)}}$ (параметризация коэффициентов потенциала), предполагая, что компоненты $U_{\mu; \delta(\mu)}^{\tau_{\delta(\mu)}}$ вне морсовской части — это процесс (X_s, v_s) , который является процессом Ито в расширении (X_s, v_s, W_s) [1, 24, 27, 28] относительно W_s . Также имеет смысл для каждого $\tau_{\delta(\mu)}^*$ определить начальные условия процесса как $X_0 = x, v_0 = v$.

2.2. Стохастические многочлены. В предыдущих разделах, опираясь на методологию экономики и теорию катастроф, мы обосновали вид потенциала f_{s, W_s} и условий (1). Затем с содержательной точки зрения необходимо перейти к строгому анализу (1). В данном разделе мы сосредоточимся на:

1. Доказательстве существования сильного вещественного решения в виде стохастического корня на интервале (1).
2. Определении функционального класса сильного решения в виде стохастического корня на интервале.
3. Доказательстве неединственности сильного решения в виде стохастического корня на интервале.

Замечание 1. Решение называется сильным [4], если процесс является адаптированным к фильтрации $\mathcal{F}_s^W$, порождённой процессом W_s .

Для начала рассмотрим более простой вид потенциала A_{+3} (2.2) с корангом один, где существуют аналитические выводы корней многочлена. Также предположим, c_k — бесконечно

гладкие функции двух переменных. Получаем неявную стохастическую полиномиальную связь (после перенормировки):

$$\partial_{X_s} f_{s,W_s}(X_s) \propto X_s^3 + \tilde{c}_2(W_s, s)X_s + \tilde{c}_1(W_s, s) = 0. \quad (4.1)$$

Сильное решение, очевидно, существует, так как можно предъявить аналитически корни многочлена через формулу Кардано [44]. Определим детерминант Кардано $\Delta_s = \frac{\tilde{c}_1^2(W_s, s)}{4} + \frac{\tilde{c}_2^3(W_s, s)}{27}$ и естественную фильтрацию W_s как $\mathcal{F}_s^W \sigma(W_t, t \leq s)$. Тогда момент первого попадания на границу кратных корней $\tau^1 = \inf\{s \geq 0 : \Delta_s = 0\} \in \mathcal{F}_s^W$ является марковским моментом остановки, так как Δ_s адаптирован к потоку $\{\mathcal{F}_s^W\}$. Определим k -й момент достижения $\Delta_s = 0$:

$$\tau^k = \inf\{s > \tau^{k-1} : \Delta_s = 0\}. \quad (4.2)$$

Теорема 1. τ^k является марковским моментом остановки относительно $\mathcal{F}_s^W$.

Доказательство. Требуется показать, что для любого $k \geq 1$ момент $\tau^k = \inf\{s > \tau^{k-1} : \Delta_s = 0\}$ является марковским моментом относительно фильтрации $\{\mathcal{F}_s^W\}$, то есть $\{\tau^k \leq s\} \in \mathcal{F}_s^W \forall s \geq 0$. Доказательство проведём индукцией по k . Для базы индукции по определению $\tau^1 = \inf\{s \geq 0 : \Delta_s = 0\}$. В силу непрерывности траекторий Δ_s событие

$$\{\tau^1 \leq s\} = \left\{ \inf_{u \in [0, s]} |\Delta_u| = 0 \right\} \quad (4.3)$$

принадлежит $\mathcal{F}_s^W$, поскольку функция $\omega \mapsto \inf_{u \in [0, s]} |\Delta_u|$ измерима относительно $\mathcal{F}_s^W$ (процесс Δ_s прогрессивно измерим как непрерывный адаптированный процесс). Следовательно, τ^1 — марковский момент. Затем предположим, что τ^{k-1} — марковский момент. Докажем, что τ^k также марковский момент. Зафиксируем произвольное $s \geq 0$. Утверждается, что справедливо представление

$$\{\tau^k \leq s\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap (0, s)} \left\{ \tau^{k-1} < q \right\} \cap \left\{ \inf_{u \in [q, s]} |\Delta_u| = 0 \right\}. \quad (4.4)$$

Докажем равенство (4.4). С одной стороны, пусть $\tau^k \leq s$. Тогда существует $u \in (\tau^{k-1}, s]$ такой, что $\Delta_u = 0$ и u — первый нуль после τ^{k-1} . Выберем рациональное число q , удовлетворяющее $\tau^{k-1} < q < u$ (это возможно благодаря плотности $\mathbb{Q}$). Тогда $q \in (0, s) \cap \mathbb{Q}$, выполнено $\tau^{k-1} < q$, и так как $u \in [q, s]$ и $\Delta_u = 0$, то $\inf_{u \in [q, s]} |\Delta_u| = 0$ (в силу непрерывности Δ_s инфимум достигается и равен нулю). Следовательно, точка принадлежит правой части (4.4).

С другой стороны, пусть для некоторого $q \in \mathbb{Q} \cap (0, t)$ выполнены условия $\tau^{k-1} < q$ и $\inf_{u \in [q, s]} |\Delta_u| = 0$. Из непрерывности Δ_s следует существование $v \in [q, s]$ такого, что $\Delta_v = 0$. Поскольку $v \geq q > \tau^{k-1}$, то первый нуль после τ^{k-1} не превосходит v , откуда $\tau^k \leq v \leq s$. Таким образом, точка принадлежит множеству $\{\tau^k \leq t\}$. Равенство (4.4) доказано. Для каждого фиксированного $q \in \mathbb{Q} \cap (0, s)$:

- $\{\tau^{k-1} < q\} \in \mathcal{F}_q^W \subset \mathcal{F}_s^W$, так как τ^{k-1} — марковский момент (по предположению индукции) и, значит, $\{\tau^{k-1} < q\} \in \mathcal{F}_q^W$.
- $\{\inf_{u \in [q, s]} |\Delta_u| = 0\} \in \mathcal{F}_s^W$, поскольку процесс Δ_s прогрессивно измерим (непрерывность и адаптированность) и, следовательно, случайная величина $\inf_{u \in [q, s]} |\Delta_u|$ измерима относительно $\mathcal{F}_s^W$.

Пересечение этих множеств лежит в $\mathcal{F}_s^W$. Правая часть (4.4) представляет собой счётное объединение таких пересечений, поэтому $\{\tau^k \leq s\} \in \mathcal{F}_s^W$. Таким образом, τ^k — марковский момент относительно $\mathcal{F}_s^W$. $\square$

Теорема 1 гарантирует, что моменты τ^k являются моментами остановки. Благодаря этому каждый интервал между τ^{k-1} и τ^k можно рассматривать независимо от остальных: поведение процесса после τ^{k-1} не зависит от его эволюции до этого момента, что позволяет изучать интервалы по отдельности. Если бы τ^k не были моментами остановки (например, зависели бы от будущих значений непрерывной функции Δ от броуновского движения), то такая декомпозиция на независимые интервалы была бы невозможна.

Тогда на каждом интервале (τ^k, τ^{k+1}) знак Δ_s постоянный и решение X_s задается как гладкая функция для $\Delta_s < 0$ и $\Delta_s > 0$. Для $\Delta_s = 0$ функциональный вид также кусочно-гладкий:

- Если $\Delta_s < 0$, то $\tilde{c}_2(W_s, s) < 0$ и $X_s = H_{\text{sign } \Delta_s}(W_s, s) = 2\sqrt{-\frac{\tilde{c}_2(W_s, s)}{3}} \cos \frac{\psi + 2\pi k}{3}$, где $\psi = \arccos\left(-\frac{\tilde{c}_1(W_s, s)}{2\sqrt{-\tilde{c}_2^3(W_s, s)/27}}\right)$ и $k = 0, 1, 2$.
- Если $\Delta_s > 0$, то $X_s = H_{\text{sign } \Delta_s}(W_s, s) = \sqrt[3]{-\frac{\tilde{c}_1(W_s, s)}{2} + \sqrt{\frac{\tilde{c}_1^2(W_s, s)}{4} + \frac{\tilde{c}_2^3(W_s, s)}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{\tilde{c}_1(W_s, s)}{2} - \sqrt{\frac{\tilde{c}_1^2(W_s, s)}{4} + \frac{\tilde{c}_2^3(W_s, s)}{27}}}$.
- Если $\Delta_s = 0$, то рассматривается два случая. Если $\tilde{c}_1(W_s, s) = \tilde{c}_2(W_s, s) = 0$, то $X_s = Q(W_s, s) \equiv 0$ (трехкратный). Если $\tilde{c}_2(W_s, s) \neq 0$, то $X_s = Q(W_s, s) = 2\sqrt[3]{-\frac{\tilde{c}_1(W_s, s)}{2}}$ или $X_s = Q(W_s, s) = -\sqrt[3]{-\frac{\tilde{c}_1(W_s, s)}{2}}$ (двукратный).

Как видно из функциональной формы корней, решения на интервале $(\tau^k, \tau^{k+1}]$ при $\Delta_s \leq 0$ имеют непрерывные траектории (в момент $\Delta_s = 0$ два вещественных корня схлопываются, увеличивая кратность, или два комплексно-сопряжённых корня переходят в один вещественный кратный корень). Однако в общем случае, когда все корни многочлена локально по времени переходят в комплексную плоскость, то есть $\exists(\alpha_1, \alpha_2) \subset \mathbb{R} : \forall s \in (\alpha_1, \alpha_2) \partial_{X_s} f_{s, W_s} > 0$, модель перестает адекватно описывать рынок, так как в рамках модели возникают ситуации, в которых ожидания участников перестают существовать, что невозможно на реальном рынке. Данная проблема характерна для форм катастроф с нечетным порядком многочленов (1) и будет обсуждаться в следующем примере.

Перейдём теперь к описанию всех возможных ожиданий в рамках модели. Для каждого интервала между моментами бифуркации (τ^k, τ^{k+1}) знак дискриминанта Δ_s постоянен, и каждый вещественный корень задаётся гладкой функцией $H_{\text{sign } \Delta_s}(W_s, s)$. В области $\Delta_s < 0$ таких функций три — они соответствуют трём различным ожиданиям, сосуществующим в рынке. В области $\Delta_s > 0$ — один корень (единое ожидание). В сами моменты τ^k (кратные корни) ожидания сливаются или расходятся. Полный спектр ожиданий в каждый момент времени записывается как

$$X_s = \sum_{k=0}^{\infty} \left[I_{(\tau^k, \tau^{k+1})} H_{\text{sign } \Delta_s}(W_s, s) + I_{\{\tau^k\}} Q(W_s, s) \right]. \quad (5)$$

Здесь каждое слагаемое описывает все ветви ожиданий, существующие на соответствующем интервале между бифуркациями (одну ветвь при $\Delta_s > 0$ или три при $\Delta_s < 0$). Наблюдаемая на рынке цена (логарифм цены) соответствует выбору одной из этих ветвей в каждый момент времени, например, согласно некоторому правилу (случайному, детерминированному или зависящему от ликвидности). Решения (5) являются сильными решениями относительно многочлена, так как процесс адаптирован к фильтрации $\mathcal{F}_s^W$ (корни — борелевские функции).

Обсудим, как именно выглядят (5). Допустим, в начальный момент времени мы для простоты начинаем с 0 (логарифм цены с добавленной константой), где по условию $\Delta_s = 0$, $\tilde{c}_1(W_0, 0) = \tilde{c}_2(W_0, 0) = 0$. После этого возможен случай $\Delta_{0+\Delta_s} > 0$, когда решение определяется одним корнем $X_{(0, \tau^1)}^{(1;1)}$ (i по счету корень $X_{(0, \tau^1)}^{(\text{sign } \Delta_s, i)}$ на интервале $(0, \tau^1)$) или $\Delta_{0+\Delta_s} < 0$,

когда появляется три корня $Y_{(0,\tau^1)} = (X_{(0,\tau^1)}^{(-1;1)}, X_{(0,\tau^1)}^{(-1;2)}, X_{(0,\tau^1)}^{(-1;2)})$ — множественность ожиданий логарифма цены. По той же аналогии, если начать с $Y_{(0,\tau^1)}$. Описанием решений являются не отдельные стратегии на $(\tau^0, \tau^1), (\tau^1, \tau^2), \dots, (\tau^{k-1}, \tau^k), \dots$, а все множество X_s , где фундаментом являются функциональные зависимости $H_{\text{sign } \Delta_s}$ и Q . Математическим описанием смены режима в нашей модели является касание или пересечение дискриминанта нулю, а точки $\{\tau^k\}$ — время, когда меняется режим.

Математическая неединственность решений системы (4.1) находит естественную интерпретацию в реальных финансовых рынках через множественность ожиданий цен, формируемых различными категориями участников. Когда дискриминант $\Delta_s < 0$, модель порождает три вещественных корня $X_{(s)}^{(-1;1)}, X_{(s)}^{(-1;2)}, X_{(s)}^{(-1;3)}$, каждый из которых может быть ассоциирован с ценовым уровнем, диктуемым определённой группой крупных агентов — маркет-мейкерами, институциональными инвесторами или алгоритмическими трейдерами. Эти агенты, обладающие различными горизонтами инвестирования и стратегиями, формируют локальные равновесия, сосуществующие до момента катастрофы τ^k (смены режима).

Переход между корнями в точках кратности $\Delta_s = 0$ описывает процесс координации мнений под влиянием информационных каскадов. До момента τ^k различные группы агентов «голосуют» за соответствующий ценовой уровень; при достижении критического порога происходит разрушение локального равновесия и быстрая релаксация к новому состоянию.

Перейдем теперь к общему виду одномерного многочлена с четной степенью:

$$\partial_{X_s} f_{s,W_s}(X_s) \propto X_s^{2n} + \sum_{k=0}^{2n-1} \tilde{c}_k(W_s, s) X_s^k = 0. \quad (6)$$

Для данного многочлена (6) существует проблема, когда на некотором интервале $(s_1, s_2) \subset \mathbb{R}$ все стохастические корни являются комплекснозначными. Данная конструкция не является реальной для рынков. В связи с этим предлагается перейти к случаю, когда (6) имеет хотя бы один вещественный корень. Для этого представим (6) как

$$B_{s,W_s}^{2n}(X_s) = \prod_{i=1}^n (X_s^2 + q_i(W_s, s)X_s + p_i(W_s, s)) = 0 \quad (6.1)$$

с условием того, что хотя бы один корень вещественный в (6.1):

$$\sum_{i=1}^n \text{sign}(D_s^{(i)}(W_s, s)) + n > 0, \quad (6.2)$$

$$D_i(W_s, s) = q_i^2(W_s, s) - 4p_i(W_s, s). \quad (6.3)$$

Чтобы выполнялось данное ограничение, введем локальное время [44], которое при стохастическом поведении не даст перепрыгнуть из состояния, где есть вещественный корень, в состояние, где все корни комплекснозначные:

$$\mathbf{v}_s(W_s, s) = (q_1(W_s, s), \dots, q_n(W_s, s), p_1(W_s, s), \dots, p_n(W_s, s)), \quad (7.1)$$

$$\mathbf{v}_s = \mathbf{v}_s + L_s^0(\mathbf{v}), \quad (7.2)$$

$$L_s^0(\mathbf{v}^k) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^s I_{\{|\sum_{i=1}^n \text{sign}(D_i(W_u, u)) + n| < \varepsilon\}} d[\mathbf{v}^k]_u, \quad (7.3)$$

где $d[\mathbf{v}^k]_u$ — это приращение квадратичной вариации процесса $\tilde{c}_k$. Так как это бесконечно гладкая функция W_s и s , то по лемме Ито [1]:

$$d[\mathbf{v}^k]_u = \left(\frac{\partial \mathbf{v}^k}{\partial W_u}(W_u, u) \right)^2 du. \quad (7.4)$$

Для сохранения структуры гладкости можно аппроксимировать $L_s^0(v^k)$ через функцию Гаусса [45], так неформально локальное время можно записать как

$$\int_0^s \delta(\Pi_n) d[v^k]_u = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^s \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \exp\left(-\frac{\Pi_n^2}{2\varepsilon}\right) \left(\frac{\partial v^k}{\partial W_u}(W_u, u)\right)^2 du, \quad (7.5)$$

где $\Pi_n = \sum_{i=1}^n \text{sign}(D_i(W_u, u)) + n$. Дополнительно, чтобы (7.2) был бесконечно гладким вектором от W_s и s , можно функцию знака приблизить через арктангенс для достаточно больших значений l :

$$\text{sign}(D_i(W_s, s)) \approx \frac{2}{\pi} \tan^{-1}(l D_i(W_s, s)), \quad (7.6)$$

$$\tilde{\Pi}_n^l(W_u, u) = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^n \tan^{-1}(l D_i(W_u, u)) + n. \quad (7.7)$$

Следовательно, коэффициенты можно переписать (при $l \gg 1$) как

$$v_s^k = v_s^k + \int_0^s \sqrt{\frac{l}{2\pi}} \exp\left(-\frac{l(\tilde{\Pi}_n^l)^2}{2}\right) \left(\frac{\partial v^k}{\partial W_u}(W_u, u)\right)^2 du. \quad (8)$$

Теперь обсудим случай кратности корней. Для многочлена общего вида существует формула дискриминанта, которая выводится из результата Сильвестра [46]. Для начала покажем определение результата Сильвестра:

$$R(f, g) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n & 0 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_{m-1} & b_m & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & b_0 & \cdots & b_{m-2} & b_{m-1} & b_m & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}, \quad (9.1)$$

где a_k — коэффициенты многочлена f , а b_k — многочлена g . Затем определим дискриминант многочлена через его корни ρ_j [46]:

$$\Delta^{2n}(f) = \prod_{i < j} (\rho_j - \rho_i)^2 = (-1)^{\frac{2n(2n-1)}{2}} \prod_{i \neq j} (\rho_j - \rho_i). \quad (9.2)$$

Выпишем формулу дискриминанта [46] только от коэффициентов многочлена:

$$\Delta^{2n}(f) = (-1)^{\frac{2n(2n-1)}{2}} R(f, f'). \quad (9.3)$$

Переход с одного знака $\Delta^{2n}(f)$ на противоположный показывает, что существует комплексно-сопряженная пара корней, которая после перехода стала двумя различными вещественными корнями или наоборот — рождение хотя бы одной пары комплексно-сопряженных корней из двух действительных. В точке $\Delta^{2n}(f) = 0$ увеличивается кратность корней (формула (9.2)). Из (9.3) видно, что $\Delta^{2n}(f)$ является непрерывной и бесконечно гладкой функцией от W_s и s . Введем несколько полезных лемм для дальнейшего анализа.

Лемма 1. Для многочлена с вещественными коэффициентами $\{c_k\}_{k=0}^n$ утверждение $\exists(x^*, c_0^*, \dots, c_n^*) \in \mathbb{C}^{n+2} : P(x^*, c_0^*, \dots, c_n^*) = 0$ и $\partial_x P(x^*, c_0^*, \dots, c_n^*) = 0$ равносильно $\Delta^n(P)_{c_0^*, \dots, c_n^*} = 0$.

Доказательство. По определению, если $P(x^*, c_0^*, \dots, c_n^*) = 0$ и $\partial_x P(x^*, c_0^*, \dots, c_n^*) = 0$, то существует кратный корень x^* , который по определению (9.2) даст $\Delta_n(P)_{c_0^*, \dots, c_n^*} = 0$. Аналогично в другую сторону, так как $\Delta_n(P)_{c_0^*, \dots, c_n^*} = 0$ тоже дает условие кратности корней. $\square$

Лемма 2. *Стохастические вещественные корни (6) локально представимы как бесконечно гладкая функция от W_s и s .*

Доказательство. Если представить многочлен с вещественным корнем X_s^* и коэффициентами $\tilde{c}_0^*, \dots, \tilde{c}_{2n}^*$ как неявную функцию от $2n + 2$ переменных, приравненную к 0, с условием $\partial_{X_s^*} P(X_s^*, \tilde{c}_0^*, \dots, \tilde{c}_{2n}^*) \neq 0$, то по теореме о неявной функции [11] существует такая окрестность $U \subset \mathbb{R}^{2n+1}$, на которой X_s^* — гладкая функция от $(\tilde{c}_0^*, \dots, \tilde{c}_{2n}^*) \in U$. Следовательно, по наложенным предположениям на $\tilde{c}_0^*, \dots, \tilde{c}_{2n}^*$, X_s^* — гладкая функция от W_s и s для $s \in (\tau, \pi)$, где τ — момент входа в U , а π — момент ближайшего выхода из U . $\square$

Лемма 3. $\varphi^k = \inf\{s \geq \varphi^{k-1} : P(X_s^*, \tilde{c}_0^*, \dots, \tilde{c}_{2n}^*) = 0 \ \& \ \partial_{X_s^*} P(X_s^*, \tilde{c}_0^*, \dots, \tilde{c}_{2n}^*) = 0\}$ — это марковский момент остановки относительно $\mathcal{F}_s^W$.

Доказательство. Так как у $\Delta^{2n}(f)$ непрерывные траектории и бесконечно гладкая зависимость от W_s и s , то данный процесс является прогрессивно измеримым относительно $\mathcal{F}_s^W$. Тогда по теореме и лемме 1 φ^k — это марковский момент остановки относительно $\mathcal{F}_s^W$. $\square$

Теперь выведем основную теорему о функциональном виде стохастических корней многочлена (6).

Теорема 2. $\forall [a, b] \subset (\varphi^{k-1}, \varphi^k)$ вещественные корни многочлена (6) представимы как бесконечно гладкая двумерная функция $H(W_s, s)$, где φ^k из леммы 3.

Доказательство. По леммам 2 и 3 для $\forall \varepsilon > 0 : \forall s \in (s^* - \varepsilon, s^* + \varepsilon) \subset [a, b] \subset (\varphi^{k-1}, \varphi^k)$, где $\partial_{X_s^*} P(X_s^*, \tilde{c}_0^*, \dots, \tilde{c}_{2n}^*) \neq 0$ и $P(X_s^*, \tilde{c}_0^*, \dots, \tilde{c}_{2n}^*) = 0$, существует $X_s = H_i(W_s, s)$, $i = 1, \dots, n$, где n — количество корней (вещественных) (6). Тогда по определению компакта $[a, b]$ можно покрыть конечным подпокрытием. Таким образом, на всем интервале $[a, b]$ остается непрерывность корня (корни упорядочены и не пересекаются по определению φ^k). Так как на $(s^* - \varepsilon, s^* + \varepsilon)$ корни даже бесконечно гладкие, то и для интервала $(s^* - 3\varepsilon/2, s^* + \varepsilon/2)$ корни будут бесконечно гладкие, а это значит, что и на $(s^* - 3\varepsilon/2, s^* + \varepsilon)$ будет бесконечно гладкое единственное продолжение. $\square$

Вторая теорема дает завершающий штрих к анализу многочлена (6) или (6.1), где существует случай, когда рынок временно описывается только одним действительным корнем. После доказательства теоремы может остаться вопрос, что происходит в точке φ^k . Ответ на данный вопрос зависит от интерпретации рынка. Мы предлагаем непрерывно продолжать вещественные корни слева направо в этих точках, то есть рассматривать непрерывное продолжение интервала $(\varphi^{k-1}, \varphi^k)$ на полуинтервал $(\varphi^{k-1}, \varphi^k]$. Все, что было до этого момента, описывает в общем случае катастрофы типа A_n . Теперь перейдем к двумерным потенциалам и их градиентам (D_n, E) . Рассмотрим двумерную систему полиномиальных связей:

$$\begin{cases} f_1(X_s, v_s) = \sum_{k,n \leq 2n} \alpha_{k,n}(W_s, s) v_s^n X_s^k = 0, \\ f_2(X_s, v_s) = \sum_{k,n \leq 2n} \beta_{k,n}(W_s, s) v_s^n X_s^k = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Для данного случая придумать такую же простую теорию, как для (6), уже не получится. На первый взгляд можно сказать, если у (9) есть вещественное решение и матрица Якоби не вырождена, то по теореме, аналогичной теореме 2, вещественные решения — это бесконечно гладкие функции от W_s и s на интервале $(\varphi^k, \varphi^{k+1})$ марковских моментов $\varphi^k = \inf\{s \geq \varphi^{k-1} : (f_1, f_2) = 0 \ \& \ \det |J| = 0\}$,

где $J = (\nabla f_1, \nabla f_2)$ — матрица Якоби, определитель которой согласован с $\mathcal{F}_s^W$ и имеет непрерывные траектории (непрерывен в 0 по определению бифуркаций [11, 17]).

Тем не менее можно воспользоваться вычислительными методами теории бифуркаций. Методы, описанные в статье [19], вычислительно позволяют классифицировать точку параметров бифуркации. В данной работе не будет рассматриваться подробное описание данного подхода, однако давайте поясним его суть. Точки бифуркаций можно разбить на два класса: предельные точки и точки ветвления. Предельные точки описывают как раз тот момент, когда в постбифуркационном состоянии нет вещественных решений, то есть ветвления. Для классификации точек строится множество расширенных матриц Якоби системы (9) [11, 18, 19]. Если хотя бы у одной матрицы определитель не ноль, то это предельная точка. Очевидно, определитель — это гладкая функция от W_s, s на интервалах $(\varphi^k, \varphi^{k+1})$, количество расширенных матриц определено системой (9), а индикатор можно приблизить гладкой функцией. Следовательно, можно воспользоваться похожим трюком с локальным временем (7.2) и наложить на $\alpha_{k,n}$ и $\beta_{k,n}$ условия, запрещающие вход в область, где нет вещественных решений.

2.3. Сингулярные стохастические дифференциальные уравнения. Итак, мы детально проанализировали условия (1). Теперь перейдем к задаче по определению функциональной формы корней. Давайте рассмотрим более общую задачу, а именно произвольные бесконечно гладкие функции ϕ, ψ такие, что

$$\begin{cases} \phi(X_s, v_s, W_s, s) = 0, \\ \psi(X_s, v_s, W_s, s) = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Для калибровки модели и получения функциональных форм корней проще всего перейти к системе стохастических дифференциальных уравнений, так как это позволяет использовать известные методы калибровки по данным, а также сводит задачу к более простой вычислительной процедуре идентификации форм $H(W_s, s)$. Опишем переход от стохастических полиномиальных связей (1) к системе СДУ. Предполагается, что W_s — стандартный винеровский процесс, для которого $(dW_s)^2 = ds$, а (X_s, v_s, W_s) — Ито-процесс с дифференциалами dX_s, dv_s общего вида:

$$dX_s = \mu_X ds + \sigma_X dW_s, \quad (10.1)$$

$$dv_s = \mu_v ds + \sigma_v dW_s. \quad (10.2)$$

Требуется выразить коэффициенты сноса μ_X, μ_v и волатильности σ_X, σ_v через частные производные функций ϕ, ψ . Применяя лемму Ито к каждому уравнению системы и учитывая, что $\phi \equiv 0$ и $\psi \equiv 0$ влечёт $d\phi = 0$ и $d\psi = 0$, получаем условия обращения в нуль коэффициентов при ds и dW_s в разложении каждого дифференциала. Дифференциал ϕ вычисляется как

$$\begin{aligned} d\phi &= \frac{\partial \phi}{\partial x} dX_s + \frac{\partial \phi}{\partial v} dv_s + \frac{\partial \phi}{\partial w} dW_s + \frac{\partial \phi}{\partial s} ds + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} (dX_s)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2} (dv_s)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial w^2} (dW_s)^2 + \\ &+ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial v} dX_s dv_s + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial w} dX_s dW_s + \frac{\partial^2 \phi}{\partial v \partial w} dv_s dW_s, \\ d\psi &= \frac{\partial \psi}{\partial x} dX_s + \frac{\partial \psi}{\partial v} dv_s + \frac{\partial \psi}{\partial w} dW_s + \frac{\partial \psi}{\partial s} ds + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} (dX_s)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} (dv_s)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial w^2} (dW_s)^2 + \\ &+ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial v} dX_s dv_s + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial w} dX_s dW_s + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v \partial w} dv_s dW_s. \end{aligned}$$

Подставляя выражения для дифференциалов процессов и используя правила умножения Ито: $(dW_s)^2 = ds$; $dX_s dW_s = \sigma_X ds$; $dv_s dW_s = \sigma_v ds$; $dX_s dv_s = \sigma_X \sigma_v ds$; $(dX_s)^2 = \sigma_X^2 ds$; $(dv_s)^2 = \sigma_v^2 ds$. После группировки слагаемых находим

$$\begin{aligned} d\phi &= \left(\phi_x \mu_X + \phi_v \mu_v + \phi_s + \frac{1}{2}(\phi_{xx} \sigma_X^2 + \phi_{vv} \sigma_v^2 + \phi_{ww}) + \phi_{xv} \sigma_X \sigma_v + \phi_{xw} \sigma_X + \phi_{vw} \sigma_v \right) ds + \\ &\quad + (\phi_x \sigma_X + \phi_v \sigma_v + \phi_w) dW_s, \\ d\psi &= \left(\psi_x \mu_X + \psi_v \mu_v + \psi_s + \frac{1}{2}(\psi_{xx} \sigma_X^2 + \psi_{vv} \sigma_v^2 + \psi_{ww}) + \psi_{xv} \sigma_X \sigma_v + \psi_{xw} \sigma_X + \psi_{vw} \sigma_v \right) ds + \\ &\quad + (\psi_x \sigma_X + \psi_v \sigma_v + \psi_w) dW_s, \end{aligned}$$

где частные производные вычислены в точке (X_s, v_s, W_s, s) . Условия $d\phi = 0$; $d\psi = 0$ приводят к системе

$$\begin{cases} \phi_x \mu_X + \phi_v \mu_v + \phi_s + \frac{1}{2}(\phi_{xx} \sigma_X^2 + \phi_{vv} \sigma_v^2 + \phi_{ww}) + \phi_{xv} \sigma_X \sigma_v + \phi_{xw} \sigma_X + \phi_{vw} \sigma_v = 0, \\ \phi_x \sigma_X + \phi_v \sigma_v + \phi_w = 0, \\ \psi_x \mu_X + \psi_v \mu_v + \psi_s + \frac{1}{2}(\psi_{xx} \sigma_X^2 + \psi_{vv} \sigma_v^2 + \psi_{ww}) + \psi_{xv} \sigma_X \sigma_v + \psi_{xw} \sigma_X + \psi_{vw} \sigma_v = 0, \\ \psi_x \sigma_X + \psi_v \sigma_v + \psi_w = 0. \end{cases} \quad (10.3)$$

Первое и третье уравнения образуют систему для σ_X и σ_v :

$$\begin{cases} \phi_x \sigma_X + \phi_v \sigma_v + \phi_w = 0, \\ \psi_x \sigma_X + \psi_v \sigma_v + \psi_w = 0. \end{cases} \quad (10.4)$$

Её решение при условии ненулевого определителя $J = \phi_x \psi_v - \psi_x \phi_v$ даёт

$$\sigma_X = -\frac{\phi_w \psi_v - \psi_w \phi_v}{J}, \quad \sigma_v = -\frac{\phi_x \psi_w - \psi_x \phi_w}{J}. \quad (10.5)$$

Вторая пара уравнений определяет линейную систему для μ_X и μ_v :

$$\begin{cases} \phi_x \mu_X + \phi_v \mu_v = \gamma, \\ \psi_x \mu_X + \psi_v \mu_v = \beta, \end{cases} \quad (10.6)$$

где

$$\gamma = -\phi_s - \frac{1}{2}(\phi_{xx} \sigma_X^2 + \phi_{vv} \sigma_v^2 + \phi_{ww}) - \phi_{xv} \sigma_X \sigma_v - \phi_{xw} \sigma_X - \phi_{vw} \sigma_v,$$

$$\beta = -\psi_s - \frac{1}{2}(\psi_{xx} \sigma_X^2 + \psi_{vv} \sigma_v^2 + \psi_{ww}) - \psi_{xv} \sigma_X \sigma_v - \psi_{xw} \sigma_X - \psi_{vw} \sigma_v.$$

Решение этой системы имеет вид

$$\mu_X = \frac{\gamma \psi_v - \beta \phi_v}{J}, \quad \mu_v = \frac{\phi_x \beta - \psi_x \gamma}{J}. \quad (10.7)$$

Подставляя выражения для γ и β , а далее σ_X и σ_v , получаем окончательные формулы для коэффициентов СДУ системы. Таким образом, дифференциалы процессов X_t и v_t выражаются как

$$dX_s = \mu_X ds + \sigma_X dW_s, \quad (11.1)$$

$$dv_s = \mu_v ds + \sigma_v dW_s, \quad (11.2)$$

$$X_0 = x, \quad v_0 = v, \quad (11.3)$$

где σ_X, σ_v заданы явно через первые производные ϕ, ψ , а μ_X, μ_v — через первые и вторые

производные этих функций, а также через найденные σ_X, σ_v . Для простоты выкладок далее будем работать с моделью без процесса v_s $G(X_s, W_s, s) = 0$, то есть с катастрофами типа A_n и СДУ:

$$dX_s = -\frac{1}{G_x} \left(G_s + \frac{1}{2} G_{ww} + \frac{1}{2} G_{xx} \left(\frac{G_w}{G_x} \right)^2 - G_{xw} \frac{G_w}{G_x} \right) ds - \frac{G_w}{G_x} dW_s, \quad (12.1)$$

$$X_0 = x. \quad (12.2)$$

Из предыдущего раздела работы мы знаем, что решение можно представить в виде $X_s = H(W_s, s)$, где H — это бесконечно гладкая функция двух переменных. Тогда, применяя лемму Ито, имеем

$$dX_s = \left(\frac{\partial H}{\partial s} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial w^2} \right) ds + \frac{\partial H}{\partial w} dW_s. \quad (13)$$

Таким образом, данную задачу можно свести к нахождению функции H :

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial w} = \sigma(H(w, s), w, s), \\ \frac{\partial H}{\partial s} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial w^2} = \mu(H(w, s), w, s). \end{cases} \quad (14)$$

Теорема 3. Если выполнены условия на вид σ, μ :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \sigma}{\partial H} \left(\mu - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial H} \sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial w} \right) \right) + \frac{\partial \sigma}{\partial s} = \\ & = \frac{\partial \mu}{\partial H} \sigma + \frac{\partial \mu}{\partial w} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial H^2} \sigma + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial w^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial H^2} \sigma^2 + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial w^2} \sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial H} \frac{\partial \sigma}{\partial H} \sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial H} \frac{\partial \sigma}{\partial w} \right), \end{aligned} \quad (15)$$

то (14) разрешима.

Доказательство. Выведем условия совместимости (14): $\frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{\partial H}{\partial s} \right) = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial H}{\partial w} \right)$. Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial w} \left(\mu(H(w, s), w, s) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial w^2} \right) = \frac{\partial}{\partial s} (\sigma(H(w, s), w, s))$$

или

$$\frac{\partial}{\partial w} \left(\mu(H(w, s), w, s) - \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma}{\partial s} \frac{\partial H}{\partial w} \right) = \frac{\partial}{\partial s} (\mu(H(w, s), w, s)).$$

Далее,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial s} (\sigma(H(w, s), w, s)) = \frac{\partial \sigma}{\partial H} \frac{\partial H}{\partial s} + \frac{\partial \sigma}{\partial s} = \\ & = \frac{\partial \sigma}{\partial H} \left(\mu(H(w, s), w, s) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial H} \sigma(H(w, s), w, s) + \frac{\partial \sigma}{\partial w} \right) \right) + \frac{\partial \sigma}{\partial s}, \\ & \frac{\partial}{\partial w} \left(\mu(H(w, s), w, s) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial w^2} \right) = \frac{\partial \mu}{\partial H} \sigma(H(w, s), w, s) + \frac{\partial \mu}{\partial w} - \frac{1}{2} \frac{\partial^3 H}{\partial w^3} = \\ & = \frac{\partial \mu}{\partial H} \sigma(H(w, s), w, s) + \frac{\partial \mu}{\partial w} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial H} \sigma(H(w, s), w, s) + \frac{\partial \sigma}{\partial w} \right) = \\ & = \frac{\partial \mu}{\partial H} \sigma(H(w, s), w, s) + \frac{\partial \mu}{\partial w} - \\ & - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial H^2} \sigma(H(w, s), w, s) + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial w^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial H^2} \sigma^2(H(w, s), w, s) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial w^2} \sigma(H(w, s), w, s) + \frac{\partial \sigma}{\partial H} \frac{\partial \sigma}{\partial H} \sigma(H(w, s), w, s) + \frac{\partial \sigma}{\partial H} \frac{\partial \sigma}{\partial w} \right). \end{aligned}$$

Приравнявая полученные выражения, получаем условие (15). $\square$

Таким образом, если условия выполняются, мы можем взять точку $H(r, 0) = h_0$. Далее, используя метод пристрелки, проинтегрировать выражение в противоположном направлении [19] $\frac{\partial H}{\partial w} = \sigma(H(w, 0), w, 0)$ с условием $H(r, 0) = h_0$ и получить $H(w, 0)$. Затем решить методом конечных разностей [45] задачу $\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial w^2} = \mu(H(w, t), w, t)$ с условием $H(w, 0)$ из предыдущего уравнения. Анализ двумерной модели проводится по схеме, аналогичной изложенной для одномерного случая. Соответственно, все промежуточные выводы о получении форм $X_s = H_1(W_s, s)$, $v_s = H_2(W_s, s)$, переносятся на двумерный случай без существенных изменений.

3. Вычислительный эксперимент для катастрофы A_{+3}

Настоящий раздел посвящен демонстрации работоспособности предложенного математического аппарата на симуляционных данных. В отличие от эмпирических исследований, использующих исторические рыночные данные, мы фокусируемся на контролируемом вычислительном эксперименте, что позволяет строго верифицировать корректность теоретических выкладок и численных методов в условиях известных истинных параметров.

Рассмотрим задачу оценивания параметров стохастического дифференциального уравнения Ито, в котором диффузионная функция зависит от латентного винеровского процесса. Пусть наблюдаемый процесс X_s удовлетворяет уравнению

$$dX_s = \mu(X_s, W_s, s; \theta) ds + \sigma(X_s, W_s, s; \theta) dW_s, \quad s \in [0, T], \quad (16)$$

где W_s — стандартный винеровский процесс, не подлежащий прямому наблюдению, а $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$ — вектор неизвестных параметров, подлежащих оцениванию. В контексте симуляционного эксперимента траектория X_s генерируется численно с заданными истинными значениями параметров θ_0 , что позволяет оценить точность восстановления методом обратных вычислений. Доступны дискретные наблюдения $\{X_{s_i}\}_{i=1}^N$ на временной сетке с шагом $\Delta s_i = s_{i+1} - s_i$. Ключевая особенность данной постановки заключается в зависимости функции σ от латентного процесса W_s , что исключает применение стандартных методов оценивания, основанных на условных плотностях перехода с известной диффузией.

Для разработки метода оценивания обратимся к свойствам квадратичной вариации процесса Ито. Из теории стохастических процессов известно, что квадратичная вариация $[X]_s$ определяется исключительно диффузионным членом и удовлетворяет соотношению $d[X]_s = \sigma^2(X_s, W_s, s; \theta) ds$. В дискретном времени на малом интервале $[s_i, s_{i+1}]$ квадратичная вариация аппроксимируется квадратом приращения процесса, то есть $d[X]_{s_i} \approx (X_{s_{i+1}} - X_{s_i})^2$. Это приводит к фундаментальному соотношению между наблюдаемыми приращениями и диффузионной функцией:

$$\frac{(X_{s_{i+1}} - X_{s_i})^2}{\Delta s_i} \approx \sigma^2(X_{s_i}, W_{s_i}, s_i; \theta). \quad (17)$$

Данное приближение становится точным в пределе при $\Delta s_i \rightarrow 0$ в силу свойств квадратичной вариации винеровского процесса, для которого $d[W]_s = ds$.

Поскольку процесс W_s является латентным, прямое вычисление правдоподобия невозможно. Предлагаемый приближенный метод основывается на методе моментов с усреднением по ансамблю сгенерированных траекторий винеровского процесса. В рамках симуляционного подхода мы генерируем K независимых реализаций $\{W_s^{(k)}\}_{k=1}^K$ винеровского процесса, используя стандартные алгоритмы моделирования случайных блужданий, и вычисляем для каждой дискретные приращения $\Delta W_{s_i}^{(k)} = W_{s_{i+1}}^{(k)} - W_{s_i}^{(k)}$. Метод использует два моментных условия. Первое условие относится к квадратичной вариации и имеет вид

$$\mathbb{E} \left[\frac{(X_{s_{i+1}} - X_{s_i})^2}{\Delta s_i} - \sigma^2(X_{s_i}, W_{s_i}, s_i; \theta) \right] = 0. \quad (17.1)$$

Второе условие соответствует условному среднему приращения процесса:

$$\mathbb{E} [X_{s_{i+1}} - X_{s_i} - \mu(X_{s_i}, W_{s_i}, s_i; \theta) \Delta s_i - \sigma(X_{s_i}, W_{s_i}, s_i; \theta) \Delta W_{s_i}] = 0. \quad (17.2)$$

Оба условия выполняются по определению стохастического интеграла Ито и свойству мартингалности интеграла по винеровскому процессу.

Заменяя теоретические условные математические ожидания по конкретной реализации временного ряда на эмпирические средние по ансамблю из K траекторий, получаем функционал потерь, который минимизируется для оценивания параметров. Функционал представляет собой сумму двух слагаемых, каждое из которых измеряет отклонение эмпирического момента от его модельного аналога, усреднённого по латентному процессу. Первое слагаемое имеет вид

$$L_1(\theta) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{(X_{s_{i+1}} - X_{s_i})^2}{\Delta s_i} - \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \sigma^2(X_{s_i}, W_{s_i}^{(k)}, s_i; \theta) \right)^2 \quad (17.3)$$

и отвечает за соответствие эмпирической локальной вариации данных её модельному значению. Второе слагаемое записывается как (напомним, что математическое ожидание интеграла Ито равно нулю при адаптированности и квадратичной интегрируемости)

$$L_2(\theta) = \sum_{i=1}^N \left(X_{s_{i+1}} - X_{s_i} - \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mu(X_{s_i}, W_{s_i}^{(k)}, s_i; \theta) \Delta s_i \right)^2 \quad (17.4)$$

и обеспечивает соответствие наблюдаемых приращений их условному среднему по модели.

Предложенный метод, основанный на [47], хотя и является грубым приближением структурной модели, но обладает важными свойствами. При увеличении числа траекторий ансамбля K эмпирические средние сходятся к теоретическим ожиданиям, что обеспечивает состоятельность оценок при $N, K \rightarrow \infty$. Первое слагаемое L_1 использует квадратичную вариацию, позволяя идентифицировать параметры диффузии независимо от дрейфа; второе слагаемое L_2 задействует первый момент приращений и даёт возможность оценить параметры дрейфа. Исключение L_1 делает параметры волатильности неидентифицируемыми, тогда как использование только L_1 допустимо для оценивания диффузии.

В настоящей работе мы ограничиваемся минимизацией суммы $L_1(\theta) + L_2(\theta)$ без дополнительного взвешивания, поскольку исследование носит теоретический характер, а вычислительные эксперименты проводятся на симуляционных данных. В более общем случае, когда моментные условия или общая функция потерь ($L_1(\theta) + L_2(\theta)$) могут быть гетероскедастичны или автокоррелированы, следует применять обобщённый метод моментов (GMM) с соответствующей весовой матрицей (см., например, [48]).

Стоит отметить, что исключение первого слагаемого из функционала приводит к потере идентифицируемости параметров диффузии, поскольку в условном среднем стохастический интеграл имеет нулевое математическое ожидание, и вклад диффузии в первый момент приращений исчезает при усреднении по ансамблю. С другой стороны, использование только первого слагаемого допустимо и часто применяется в литературе, поскольку квадратичная вариация содержит достаточную информацию для оценивания параметров волатильности, а параметры дрейфа могут быть оценены последовательно или игнорированы, если они не представляют интереса.

Рассмотрим применение предложенного метода ансамблевой идентификации к конкретному классу стохастических дифференциальных уравнений, возникающих в теории катастроф и нелинейной динамике. Модель описывается потенциалом A_{+3} с одной активной переменной, где динамика наблюдаемой переменной X_s связана с латентным процессом W_s через стохастическую полиномиальную зависимость. Конкретизируем зависимость в виде

$$c_2(W_s, s) = bW_s, \quad c_1(W_s, s) = \sin aW_s. \quad (18.1)$$

Данная спецификация соответствует кубическому уравнению $X_s^3 + c_2(W_s)X_s + c_1(W_s) = 0$, где винеровский процесс W_s входит линейно в коэффициент при X_s и через синус в свободный член. Такой выбор обусловлен необходимостью получить немонотонный и знакопеременный дискриминант

$$\Delta(W_s) = \frac{c_1^2}{4} + \frac{c_2^3}{27} = \frac{\sin^2(aW_s)}{4} + \frac{(bW_s)^3}{27}, \quad (18.2)$$

который определяет число вещественных корней: $\Delta > 0$ соответствует одному вещественному решению, а $\Delta < 0$ — трём вещественным решениям. При старте из $W_0 = 0 \forall a \neq 0, b$ и почти каждой траектории $W_s \exists \beta > 0 : \forall s \in (0, \beta) \Delta(s) > 0$, то есть на некотором начальном интервале времени система будет находиться в состоянии, когда вещественное решение определяется одним стохастическим корнем. По мере блуждания W_s дискриминант с вероятностью единица через некоторое время выйдет в отрицательную область (так как синус ограничен сверху единицей, и второе слагаемое в дискриминанте рано или поздно начнёт преобладать), что соответствует бифуркации — переходу в область с тремя вещественными корнями (смена режима).

В экономической интерпретации: в области $\Delta > 0$ большинство участников рынка имеют единое ожидание цены или логарифма цены, которое в большинстве случаев определяют макроагенты (фирмы с гигантской капитализацией). Таким образом, формируется одна траектория логарифма цены. Тем не менее возникают микрокризисные ситуации, когда ценовое ожидание у некоторых макроагентов различается, что соответствует в нашей модели трем различным ожиданиям (три действительных стохастических корня) при $\Delta < 0$. В такой ситуации крупные экономические агенты могут выбирать разные стратегии, формирующие различные ценовые ожидания, а розничные инвесторы подстраиваются под эти ожидания. Таким образом, можно определить один из многочисленных сценариев реализации логарифма цены, последовательно выбирая в интервалах между бифуркациями одно из нескольких ожиданий, которое и задаёт конкретную траекторию.

С начальным условием $X_0 = 0$ сгенерируем симуляционный ряд для случая $b = 1, a = 3$ с мелким шагом дискретизации $\Delta = 0.001$ на интервале $[0, 2.5]$, решая на каждом шаге s_i численно кубическое уравнение $X_s^3 + c_2(W_s)X_s + c_1(W_s) = 0$ методом Ньютона [19]. Параллельно для каждого s_i вычисляется (18.2); если дискриминант пересекает ноль, то в случае возникновения несколько корней выбирается один корень случайно равновероятно. Коэффициенты и параметры подобраны таким образом, чтобы на рисунках наглядно демонстрировалась репрезентативность для рассматриваемых реализаций процессов.

Подчеркнём, что полученная траектория X_{s_i} — это одна из бесконечного множества возможных реализаций логарифма цены, соответствующая конкретному правилу выбора ветви (равновероятный случайный выбор). Сама же модель описывает эволюцию ожиданий. Калибровка параметров модели по единственному временному ряду корректна, поскольку мы предполагаем, что наблюдаемый ряд является одним из сценариев, порождённых множеством ожиданий. Восстанавливая параметры θ_1, θ_2 по такому ряду, мы фактически идентифицируем коэффициенты c_1, c_2 , которые одинаковы для всех возможных сценариев. Таким образом, калибровка не требует знания всех ветвей одновременно — достаточно одной траектории при условии, что процесс выбора ветви не вносит систематического смещения.

Представленные на рис. 1 результаты симуляции позволяют детально проанализировать связь между дискриминантом Δ_s , числом вещественных корней кубического уравнения и возможными сценариями эволюции логарифма цены X_s . Напомним, что W_s — стандартный винеровский процесс, служащий источником стохастичности как в коэффициентах кубического уравнения, так и в итоговом стохастическом дифференциальном уравнении. На рис. 1, а для одной фиксированной реализации W_s на интервале $[0, 2.5]$ изображены все вещественные корни стохастического

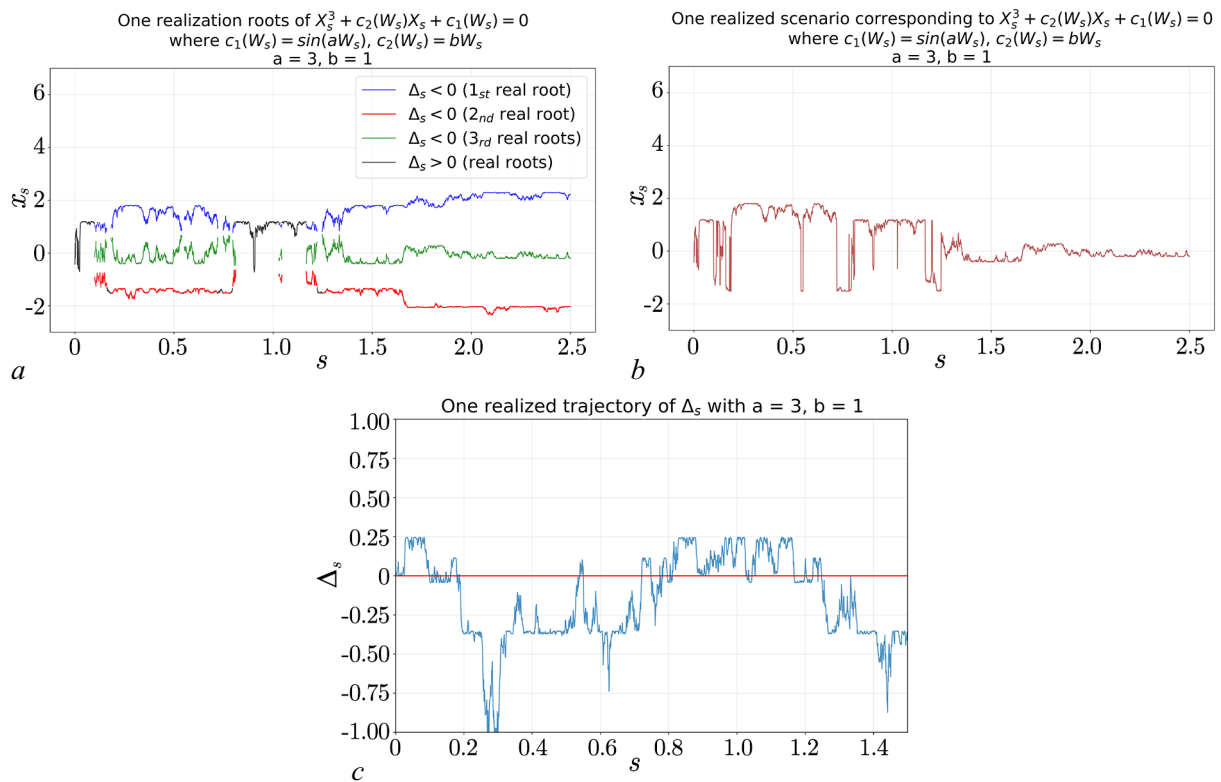


Рис. 1. *a* — Симуляция стохастических корней в соответствии с определённой реализацией W_s для стохастического многочлена $X_s^3 + c_2(W_s)X_s + c_1(W_s) = 0$ со случайными коэффициентами $c_1(W_s) = \sin(aW_s)$, $c_2 = bW_s$ при параметрах $a = 3$, $b = 1$; цвета соответствуют различным случаям дискриминанта Δ_s : чёрный — один действительный корень при $\Delta_s > 0$, синий, зелёный, красный — три действительных корня при $\Delta_s < 0$. *b* — Одна симуляция траектории $\{X_{s_i}\}$ (один из многочисленных сценариев реализации логарифма цены) уравнения $X_s^3 + c_2(W_s)X_s + c_1(W_s) = 0$, полученная методом Ньютона в соответствии с определённой реализацией W_s и правилом выбора ветви в окрестности точки бифуркации. *c* — Симуляция траектории дискриминанта в соответствии с определённой реализацией W_s (цвет онлайн)

Fig. 1. *a* — Simulation of the stochastic roots corresponding to a certain realization of W_s for the stochastic polynomial $X_s^3 + c_2(W_s)X_s + c_1(W_s) = 0$ with random coefficients $c_1(W_s) = \sin(aW_s)$, $c_2 = bW_s$ for parameters $a = 3$, $b = 1$; colors denote different cases of the discriminant Δ_s : black — one real root for $\Delta_s > 0$, blue, green, red — three real roots for $\Delta_s < 0$. *b* — One trajectory $\{X_{s_i}\}$ (one of the numerous scenarios for the realization of the logarithm of the price) of the equation $X_s^3 + c_2(W_s)X_s + c_1(W_s) = 0$ obtained by Newton's method according to a certain realization of W_s and the branch selection rule in the neighborhood of the bifurcation point. *c* — Simulated trajectory of the discriminant corresponding to a certain realization of W_s (color online)

кубического многочлена. Хорошо видны интервалы времени s , на которых существует три действительных корня (синий, зелёный и красный цвета), и интервалы, где имеется единственный корень (чёрный цвет). Сравнение с рис. 1, *c* подтверждает, что трёхкорневая область соответствует отрицательным значениям дискриминанта ($\Delta_s < 0$), а однокорневая — положительным ($\Delta_s > 0$). Таким образом, рис. 1, *a* демонстрирует полный набор всех возможных сценариев реализаций логарифма цены, порождаемых одной и той же траекторией винеровского процесса W_s . В момент бифуркации $\Delta_s = 0$ (смены режима) происходит изменение числа рыночных ожиданий.

На рис. 1, *b* показана одна конкретная реализация логарифма цены X_s , полученная в результате численного решения $X_s^3 + c_2(W_s)X_s + c_1(W_s) = 0$ методом Ньютона при той же самой реализации W_s и равновероятного выбора корня в окрестности точки бифуркации. Эта траектория представляет собой один из конечного числа возможных сценариев на отрезке $[0, 2.5]$ (для одной реализации W_s), которые можно извлечь из всех сценариев, изображённых на рис. 1, *a*.

Полученная траектория $\{X_{s_i}\}_{i=1}^N$ (рис. 1, б) с $N = 2500$ точками используется как наблюдаемые данные для обратной задачи оценивания параметров и нахождения функциональных форм стохастических корней $H(W_s, s)$:

$$c_2(W_s, s) = \theta_1 W_s, \quad c_1(W_s, s) = \sin \theta_2 W_s \quad (18.3)$$

в стохастическом уравнении $X_s^3 + c_2(W_s)X_s + c_1(W_s) = 0$ или ее дифференциальной форме:

$$dX_s = \left[-\frac{\theta_2^2}{2} \sin(\theta_2 W_s) - \frac{3X_s(\theta_1 X_s + \theta_2 \cos(\theta_2 W_s))^2}{(3X_s^2 + \theta_1 W_s)^3} + \right. \\ \left. + \frac{\theta_1(\theta_1 X_s + \theta_2 \cos(\theta_2 W_s))}{(3X_s^2 + \theta_1 W_s)^2} \right] ds - \frac{\theta_1 X_s + \theta_2 \cos(\theta_2 W_s)}{3X_s^2 + \theta_1 W_s} dW_s. \quad (18.4)$$

Для восстановления параметров минимизируем функционал $L_1(\theta) + L_2(\theta)$ методом адаптивного градиентного спуска Adam [48]. Ансамбль содержит $K = 500$ реализаций винеровского процесса. Результаты оценивания демонстрируют высокую точность: $\hat{\theta}_1 = 0.94$, $\hat{\theta}_2 = 3.11$ (относительная ошибка менее 4%). Это подтверждает, что даже по одной реализации (одному из многих возможных сценариев) можно восстановить параметры, определяющие поле ожиданий. Ошибка менее 4% говорит о том, что случайный выбор ветви не разрушает идентифицируемость модели. После успешного оценивания параметров мы переходим к восстановлению функции $H(w, s)$, которая явно выражает зависимость $X_s = H(W_s, s)$. Так как все коэффициенты c_k по условию зависят только от W_s , то мы можем искать решение как $X_s = H(W_s)$ по лемме 2.

Следовательно, используя результат теоремы 3 и лемм 1, 2, можно сказать, что задача нахождения H эквивалентна детерминированной задаче:

$$\begin{cases} k \geq 0, \\ w \in (w_k^*, w_{k+1}^*), \\ w \in (w_{-k-1}^*, w_{-k}^*), \\ \frac{\partial H}{\partial w} = \sigma(H(w), w), \\ \left. \frac{\partial P}{\partial H} \right|_{H=H(w_k^*)} = 0, \\ H(w_0^*) = 0, w_0^* = 0, \end{cases} \quad (18.5)$$

где w_k^* определяем как элемент множества $\{\arg_w \Delta_s(w) = 0\}$, а $P(H) = H^3 + c_2(w)H + c_1(w) = 0$ как функционал от $H(w)$. Очевидно, что $w_0^* = 0$ тоже лежит в $\{\arg_w \Delta_s(w) = 0\}$. Так как мы знаем все (w_k^*, w_{k+1}^*) , сначала мы решаем задачу от $w_0^* = 0$ до w_1^* , а также до w_{-1}^* , так как винеровский процесс принимает не только положительные значения. На каждом интервале (w_k^*, w_{k+1}^*) или (w_{-k-1}^*, w_{-k}^*) H ищется методом Рунге–Кутты 4-го порядка в обратном направлении и методом пристрелки [19], то есть «стреляем» из точки w_{k+1}^* в точку w_k^* с невязкой $\left. \frac{\partial P}{\partial H} \right|_{H=H(w_k^*)} = 0$, интегрируя методом Рунге–Кутты 4-го порядка (аналогично w_{-k-1}^* к w_{-k}^*). Ниже приведём пример с (w_{-l-1}^*, w_{-l}^*) для отрицательного дискриминанта, а также с (w_p^*, w_{p+1}^*) для положительного дискриминанта и найдём решение обратной задачи $H(w)$ для этих областей значений винеровского процесса W_s .

Для начала давайте посмотрим на график дискриминанта (18.2) с параметрами $\hat{\theta}_i$ как на функцию от винеровского процесса $\frac{\sin^2(\hat{\theta}_2 w)}{4} + \frac{(\hat{\theta}_1 w)^3}{27}$.

На представленном рис. 2 видно, что дискриминант $\Delta(w)$ (с параметрами $\hat{\theta}_i$) отрицателен на интервале от -6 до первого пересечения нуля (примерно $w \approx -1.745$). Затем до $w = 0$ дискриминант несколько раз пересекает нуль, меняя знак, что создаёт много чередующихся областей

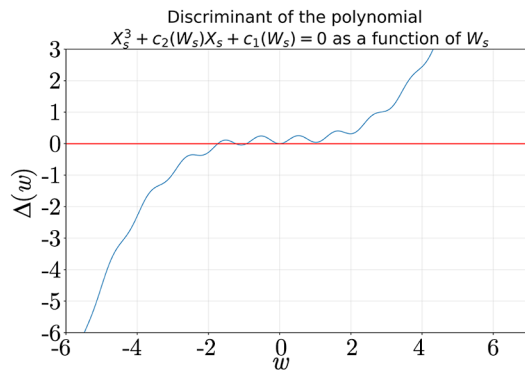


Рис. 2. Дискриминант многочлена (с параметрами $\hat{\theta}_i$) $X_s^3 + c_2(W_s)X_s + c_1(W_s) = 0$ как функция от W_s (W_s изменяется от -6 до 7) (цвет онлайн)

Fig. 2. The discriminant of the polynomial (with parameters $\hat{\theta}_i$) $X_s^3 + c_2(W_s)X_s + c_1(W_s) = 0$ as a function of W_s (W_s ranges from -6 to 7) (color online)

метрами $\hat{\theta}_i$), и аналитические решения (с параметрами a, b), найденные по формуле Кардано. Первый интервал (w_{-4}^*, w_{-3}^*) соответствует области, где дискриминант отрицателен. Здесь w_{-4}^* принимается равным -6 , поскольку на промежутке $(-\infty, w_{-3}^*)$ дискриминант заведомо отрицателен. Значение w_{-3}^* определяется по графику дискриминанта и составляет приблизительно -1.745 . Второй интервал (w_0^*, w_1^*) отвечает области положительного дискриминанта. В качестве левой границы выбрано $w_0^* = 0$, а правая граница w_1^* ограничена значением 7 , так как на самом деле $w_1^* = +\infty$ — дискриминант остаётся положительным для всех $w > 0$. Такое ограничение позволяет наглядно представить характер решений на репрезентативном участке.

Судя по рис. 3, обратная задача решается с не сильно большой ошибкой: численные решения, полученные с восстановленными параметрами $\hat{\theta}_i$, практически совпадают с аналитическими

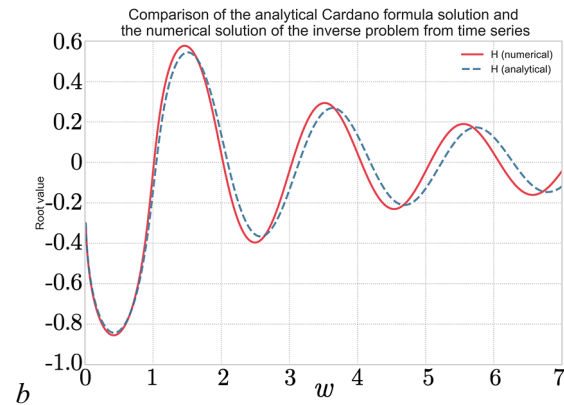
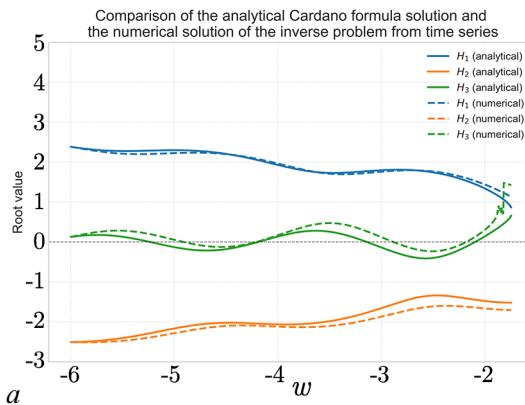


Рис. 3. *a* — Сравнение аналитического решения (по формуле Кардано с параметрами a, b) и численного решения (с параметрами $\hat{\theta}_i$, восстановленными по временному ряду) для интервала $(w_{-4}^*, w_{-3}^*) = (-6, -1.745)$, где дискриминант (посчитанный по $\hat{\theta}_i$) отрицателен. Сплошными линиями показаны аналитические корни H_1, H_2, H_3 , Маркерами — соответствующие численные значения. *b* — Сравнение для интервала $(w_0^*, w_1^*) = (0, 7)$ с положительным дискриминантом. Приведён единственный действительный корень H (численный — сплошная линия, аналитический — маркеры) (цвет онлайн)

Fig. 3. *a* — Comparison of the analytical solution (Cardano's formula with parameters a, b) and the numerical solution (with parameters $\hat{\theta}_i$ recovered from the time series) on the interval $(w_{-4}^*, w_{-3}^*) = (-6, -1.745)$, where the discriminant (calculated using $\hat{\theta}_i$) is negative. Solid lines represent the analytical roots H_1, H_2, H_3 , markers indicate the corresponding numerical values. *b* — Comparison on the interval $(w_0^*, w_1^*) = (0, 7)$ with a positive discriminant. The unique real root H is shown (numerical — solid line, analytical — markers) (color online)

с разными знаками. На интервале от 0 до 7 дискриминант снова положителен и не пересекает нуль. Поскольку для анализа удобны области с постоянным знаком дискриминанта, было принято решение рассматривать два репрезентативных интервала: от -6 до первого нуля (где $\Delta(w) < 0$) и от 0 до 7 (где $\Delta(w) > 0$). Это позволяет избежать нерепрезентативной осцилирующей области между ними и упростить поиск корней $H(w)$ на участках с фиксированным типом поведения.

Ниже будут представлены диаграммы решений на двух выбранных интервалах. Для каждого интервала показаны два типа решений: решения, полученные с параметрами, восстановленными по временному ряду (с параметрами

корнями, вычисленными по формуле Кардано с истинными параметрами a, b . На рис. 1, *a* для интервала $(w_{-4}^*, w_{-3}^*) = (-6, -1.745)$, где дискриминант (рассчитанный по $\hat{\theta}_i$) отрицателен, сплошными линиями показаны аналитические корни H_1, H_2, H_3 , маркеры — соответствующие численные значения; на рис. 1, *b* для интервала $(w_0^*, w_1^*) = (0, 7)$ с положительным дискриминантом приведён единственный действительный корень H (численный — сплошная линия, аналитический — маркеры), и в обоих случаях расхождение между аналитическим и численным решениями незначительно.

Заключение

В работе предложена новая теоретическая модель криптовалютных микрокризисов (резкое расхождение ожиданий участников рынка), основанная на теории катастроф и стохастических полиномиальных связях. Принципиальное отличие разработанной модели от классических подходов состоит в том, что она описывает эволюцию множественности ожиданий участников рынка, а не единственную ценовую траекторию. Переменная X_s интерпретируется как ожидание логарифма цены, а наблюдаемая цена — как результат выбора одного из сосуществующих ожиданий в моменты бифуркаций. Это позволяет структурно эндогенно объяснять микрокризисы (резкое расхождение ожиданий) без экзогенных переключений режимов.

Разработан метод выделения стохастических корней, разрешающий проблему бесконечного числа решений неявной системы полиномиальных связей. Получены явные формулы для сингулярных стохастических дифференциальных уравнений, описывающих динамику стохастических корней многочлена.

Проведён вычислительный эксперимент на симуляционных данных для катастрофы A_{+3} , подтвердивший состоятельность предложенного метода оценивания параметров и функциональной зависимости $H(w)$. Результаты демонстрируют, что модель способна воспроизводить ключевые особенности поведения симуляционных данных, включая смену режимов.

Предложенный аппарат открывает перспективы для дальнейшего развития методов управления рисками на высоковолатильных рынках, обеспечивая строгую математическую основу для моделирования экстремальных событий в условиях неопределённости и множественности ожиданий.

Список литературы

1. *Bergomi L.* Stochastic Volatility Modeling. Boca Raton: CRC Press, 2015. 522 p.
2. *Nguyen H.-D., Yin G. G., Zhu C.* Hybrid Switching Diffusions. Cham: Springer, 2009. 541 p. DOI: 10.1007/978-3-031-93303-5.
3. *Гулмор Р.* Прикладная теория катастроф. М.: Мир, 1984. Т 1. 350 с.
4. *Cherny A. S., Engelbert H.-J.* Singular Stochastic Differential Equations. Berlin: Springer, 2005. 128 p. DOI: 10.1007/b104187.
5. *Yin G. G., Zhang Q.* Continuous-Time Markov Chains and Applications: A Two-Time-Scale Approach. New York: Springer, 2012. 430 p. DOI: 10.1007/978-1-4614-4346-9.
6. *Bäuerle N., Rieder U.* Markov Decision Processes with Applications to Finance. Berlin: Springer, 2011. 388 p. DOI: 10.1007/978-3-642-18324-9.
7. *Bujorianu L. M.* Stochastic Reachability Analysis of Hybrid Systems. London: Springer, 2012. 250 p. DOI: 10.1007/978-1-4471-2795-6.
8. *Jourdain B., Zhou A.* Existence of a calibrated regime switching local volatility model // Mathematical Finance. 2020. Vol. 30, no. 2. P. 501–546. DOI: 10.1111/mafi.12231.
9. *Lux T.* Estimation of regime-switching diffusions via Fourier transforms // Statistics and Computing. 2024. Vol. 34, no. 2. P. 88. DOI: 10.1007/s11222-024-10397-6.
10. *Bect J.* A unifying formulation of the Fokker–Planck–Kolmogorov equation for general stochastic

- hybrid systems // *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*. 2010. Vol. 4, no. 2. P. 357–370. DOI: 10.1016/j.nahs.2009.07.008.
11. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969. 527 с.
 12. *Красносельский М. А., Забрейко П. П.* Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука, 1975. 511 с.
 13. *Sidorov N., Sidorov D., Sinitsyn A. V.* Toward General Theory of Differential-Operator and Kinetic Models. Singapore: World Scientific, 2020. 496 p. DOI: 10.1142/11651.
 14. *Скрыпник И. В.* Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка // *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Нов. достиж.* 1990. Т. 37. С. 3–87.
 15. *Нуренберг Л.* Лекции по нелинейному функциональному анализу. М.: Мир, 1977. 232 с.
 16. *Kuznetsov Y. A.* Elements of Applied Bifurcation Theory. Cham: Springer, 2023. 703 p. DOI: 10.1007/978-3-031-22007-4.
 17. Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения / Под ред. Дж. Б. Келлера и С. Антмана; пер. с англ. Б. В. Логинова и Л. С. Срубщика; под ред. В. А. Треногина и В. И. Юдовича. М.: Мир, 1974. 254 с.
 18. *Gromov V. A.* Catastrophes of cylindrical shell // In: Dutta H. (ed) *Mathematical Modelling: Principle and Theory*. Providence: American Mathematical Society, 2023. P. 215–244. DOI: 10.1090/conm/786/15798.
 19. *Громов В. А., Томащук К. К., Бесчастнов Ю. Н., Сидоренко А. А., Какурин В. В.* Метод построения полной бифуркационной картины краевой задачи для нелинейных уравнений в частных производных: применение теоремы Колмогорова–Арнольда // *Известия вузов. ПНД*. 2025. Т. 33, № 4. С. 435–465. DOI: 10.18500/0869-6632-003160.
 20. *Арнольд В. И.* Теория катастроф. М.: Наука, 1990. 126 с.
 21. *Постон Т., Стюарт И.* Теория катастроф и её приложения. М.: Мир, 1980. 607 с.
 22. *Rosser J. B.* From Catastrophe to Chaos: A General Theory of Economic Discontinuities. New York: Springer, 2013. 402 p. DOI: 10.1007/978-1-4613-3796-6.
 23. *Олемской А. И., Харченко Д. О.* Самоорганизация самоподобных стохастических систем. М.: Ижевский институт компьютерных исследований, 2007. 296 с.
 24. *Arnold L.* Random dynamical systems // In: Johnson R. (ed) *Dynamical Systems*. Berlin: Springer, 2006. P. 1–43. DOI: 10.1007/BFb0095238.
 25. *Учайкин В. В.* Автомодельная аномальная диффузия и устойчивые законы // *УФН*. 2003. Т. 173, № 8. С. 847–876. DOI: 10.3367/UFNr.0173.200308c.0847.
 26. *Curado E. M. F., Nobre F. D.* Derivation of nonlinear Fokker-Planck equations by means of approximations to the master equation // *Phys. Rev. E*. 2003. Vol. 67, no. 2. P. 021107. DOI: 10.1103/PhysRevE.67.021107.
 27. *Хорстхемке В., Лефевр Р.* Индуцированные шумом переходы: Теория и применение в физике, химии и биологии. М.: Мир, 1987. 397 с.
 28. *Berglund N., Gentz B.* Noise-Induced Phenomena in Slow-Fast Dynamical Systems. London: Springer, 2006. 276 p. DOI: 10.1007/1-84628-186-5.
 29. *Baruník J., Vosvrda M.* Can a stochastic cusp catastrophe model explain stock market crashes? // *Journal of Economic Dynamics and Control*. 2009. Vol. 33, no. 10. P. 1824–1836. DOI: 10.1016/j.jedc.2009.04.004.
 30. *Brock W. A., Hommes C. H.* A rational route to randomness // *Econometrica*. 1997. Vol. 65, no. 5. P. 1059–1095. DOI: 10.2307/2171879.
 31. *Brock W. A., Hommes C. H.* Heterogeneous beliefs and routes to chaos in a simple asset pricing model // *Journal of Economic Dynamics and Control*. 1998. Vol. 22, no. 8–9. P. 1235–1274. DOI: 10.1016/S0165-1889(98)00011-6.
 32. *Aoki M., Yoshikawa H.* Reconstructing Macroeconomics: A Perspective from Statistical Physics and Combinatorial Stochastic Processes. Cambridge: Cambridge University Press, 2011. 352 p.

33. *Voit J.* The Statistical Mechanics of Financial Markets. Berlin: Springer, 2005. 378 p. DOI: 10.1007/b137351.
34. *Kaplan G., Moll B., Violante G. L.* Monetary policy according to HANK // *American Economic Review*. 2018. Vol. 108, no. 3. P. 697–743. DOI: 10.1257/aer.20160042.
35. *Auclert A., Bardóczy B., Rognlie M., Straub L.* Using the sequence-space Jacobian to solve and estimate heterogeneous-agent models // *Econometrica*. 2021. Vol. 89, no. 5. P. 2375–2408. DOI: 10.3982/ECTA17434.
36. *Dawid H., Harting P., van der Hoog S., Neugart M.* Macroeconomics with heterogeneous agent models: fostering transparency, reproducibility and replication // *Journal of Evolutionary Economics*. 2019. Vol. 29. P. 467–538. DOI: 10.1007/s00191-018-0594-0.
37. *Engelbert H. J., Schmidt W.* On solutions of one-dimensional stochastic differential equations without drift // *Wahrscheinlichkeitstheorie verw Gebiete*. 1985. Vol. 68. P. 287–314. DOI: 10.1007/BF00532642.
38. *Girsanov I. V.* An example of non-uniqueness of the solution of the stochastic equation of K. Ito // *Theory Probab. Appl.* 1962. Vol. 7, no. 3. P. 325–331. DOI: 10.1137/1107031.
39. *Cherny A. S.* On the uniqueness in law and the pathwise uniqueness for stochastic differential equations // *Theory Probab. Appl.* 2002. Vol. 46, no. 3. P. 406–419. DOI: 10.1137/S0040585X97979093.
40. *Kolodziejczyk M., Ottobre M., Simpson G.* Counting the number of stationary solutions of partial differential equations via infinite dimensional sampling // *Philos. Trans. A Math. Phys. Eng. Sci.* 2025. Vol. 383, no. 2298. P. 20240239. DOI: 10.1098/rsta.2024.0239.
41. *Frank T. D.* Nonlinear Fokker-Planck Equations: Fundamentals and Applications. Berlin: Springer, 2005. 408 p. DOI: 10.1007/b137680.
42. *Малинецкий Г. Г., Пономов А. Б.* Современные проблемы нелинейной динамики // *Известия вузов. ПНД*. 2001. Т. 9, № 3. С. 119–121.
43. *Jain K., Firoozye N., Kochems J., Treleven P.* Limit order book simulations: A review // *arXiv:2402.17359*. arXiv Preprint, 2024. DOI: 10.48550/arXiv.2402.17359.
44. *Липцер П. Ш., Ширяев А. Н.* Теория мартингалов. М.: Наука, 1986. 512 с.
45. *Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М.* Численные методы. М.: Наука, 1987. 598 с.
46. *Gelfand I. M., Kapranov M. M., Zelevinsky A. V.* Discriminants, Resultants, and Multidimensional Determinants. Boston: Birkhäuser, 1994. 523 p. DOI: 10.1007/978-0-8176-4771-1.
47. *Duffie D., Singleton K. J.* Simulated moments estimation of Markov models of asset prices // *NBER Technical Working Papers 0087*. New York: National Bureau of Economic Research, Inc., 1990.
48. *Martínez-Iriarte J., Sun Y., Wang X.* Asymptotic F tests under possibly weak identification // *Journal of Econometrics*. 2020. Vol. 218, no. 1. P. 140–177. DOI: 10.1016/j.jeconom.2019.10.011.

References

1. Bergomi L. Stochastic Volatility Modeling. Boca Raton: CRC Press; 2015. 522 p.
2. Nguyen H-D, Yin GG, Zhu C. Hybrid Switching Diffusions. Cham: Springer; 2009. 541 p. DOI: 10.1007/978-3-031-93303-5.
3. Gilmore R. Catastrophe Theory for Scientists and Engineers. NY: Courier Corporation; 1993. 666 p.
4. Cherny AS, Engelbert H-J. Singular Stochastic Differential Equations. Berlin: Springer; 2005. 128 p. DOI: 10.1007/b104187.
5. Yin GG, Zhang Q. Continuous-Time Markov Chains and Applications: A Two-Time-Scale Approach. New York: Springer; 2012. 430 p. DOI: 10.1007/978-1-4614-4346-9.
6. Bäuerle N, Rieder U. Markov Decision Processes with Applications to Finance. Berlin: Springer; 2011. 388 p. DOI: 10.1007/978-3-642-18324-9.

7. Bujorianu LM. Stochastic Reachability Analysis of Hybrid Systems. London: Springer; 2012. 250 p. DOI: 10.1007/978-1-4471-2795-6.
8. Jourdain B, Zhou A. Existence of a calibrated regime switching local volatility model. *Mathematical Finance*. 2020;30(2):501–546. DOI: 10.1111/mafi.12231.
9. Lux T. Estimation of regime-switching diffusions via Fourier transforms. *Statistics and Computing*. 2024;34(2):88. DOI: 10.1007/s11222-024-10397-6.
10. Bect J. A unifying formulation of the Fokker–Planck–Kolmogorov equation for general stochastic hybrid systems. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*. 2010;4(2):357–370. DOI: 10.1016/j.nahs.2009.07.008.
11. Vainberg MM, Trenogin VA. Theory of Branching of Solutions of Nonlinear Equations. Groningen: Wolters-Noordhoff BV; 1974. 510 p.
12. Krasnoselskii MA, Zabreiko PP. Geometric Methods of Nonlinear Analysis. M.: Nauka; 1975. 511 p. (in Russian).
13. Sidorov N, Sidorov D, Sinitsyn AV. Toward General Theory of Differential-Operator and Kinetic Models. Singapore: World Scientific; 2020. 496 p. DOI: 10.1142/11651.
14. Skrypnik IV. Higher order nonlinear elliptic equations. *J. Math. Sci.* 1991;56:2505–2557. DOI: 10.1007/BF01097352.
15. Nirenberg L. Topics in Nonlinear Functional Analysis. New York: Courant Institute; 2001. 145 p.
16. Kuznetsov Y. A. Elements of Applied Bifurcation Theory. Cham: Springer, 2023. 703 p. DOI: 10.1007/978-3-031-22007-4.
17. Keller JB. Bifurcation theory and nonlinear eigenvalue problems. New York: W.A. Benjamin; 1969. 434 p.
18. Gromov VA. Catastrophes of cylindrical shell. In: Dutta H, editor. *Mathematical Modelling: Principle and Theory*. Providence: American Mathematical Society; 2023. P. 215–244. DOI: 10.1090/conm/786/15798.
19. Gromov VA, Tomashchuk KK, Beschastnov YN, Sidorenko AA, Kakurin VV. A method for constructing a complete bifurcation picture of a boundary value problem for nonlinear partial differential equations: application of the Kolmogorov–Arnold theorem. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2025;33(4):435–465. (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-003160.
20. Arnold VI. Catastrophe Theory. Berlin: Springer; 1992. 150 p. DOI: 10.1007/978-3-642-58124-3.
21. Poston T, Stewart I. Catastrophe Theory and Its Applications. North Chelmsford: Courier Corporation; 2014. 512 p.
22. Rosser JB. From Catastrophe to Chaos: A General Theory of Economic Discontinuities. New York: Springer; 2013. 402 p. DOI: 10.1007/978-1-4613-3796-6.
23. Olemskoy AI, Kharchenko DO. Self-Organisation of Self-Similar Stochastic Systems. M.: Izhevsk Institute of Computer Research; 2007. 296 p.
24. Arnold L. Random dynamical systems. In: Johnson R, editor. *Dynamical Systems*. Berlin: Springer; 2006. P. 1–43. DOI: 10.1007/BFb0095238.
25. Uchaikin VV. Self-similar anomalous diffusion and Levy-stable laws. *Phys. Usp.* 2003;46:821–849. DOI: 10.1070/PU2003v046n08ABEH001324.
26. Curado EMF, Nobre FD. Derivation of nonlinear Fokker–Planck equations by means of approximations to the master equation. *Phys. Rev. E*. 2003;67(2):021107.
27. Horsthemke W, Lefever R. Noise-Induced Transitions. Berlin: Springer; 1984. 322 p. DOI: 10.1007/3-540-36852-3.
28. Berglund N, Gentz B. Noise-Induced Phenomena in Slow-Fast Dynamical Systems. London: Springer; 2006. 276 p. DOI: 10.1007/1-84628-186-5.
29. Baruník J, Vosvrda M. Can a stochastic cusp catastrophe model explain stock market crashes? *Journal of Economic Dynamics and Control*. 2009;33(10):1824–1836. DOI: 10.1016/j.jedc.2009.04.004.
30. Brock WA, Hommes CH. A rational route to randomness. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*. 1997;65(5):1059–1095. DOI: 10.2307/2171879.

31. Brock WA, Hommes CH. Heterogeneous beliefs and routes to chaos in a simple asset pricing model. *Journal of Economic Dynamics and Control*. 1998;22(8–9):1235–1274. DOI: 10.1016/S0165-1889(98)00011-6.
32. Aoki M, Yoshikawa H. *Reconstructing Macroeconomics: A Perspective from Statistical Physics and Combinatorial Stochastic Processes*. Cambridge: Cambridge University Press; 2011. 352 p.
33. Voit J. *The Statistical Mechanics of Financial Markets*. Berlin: Springer; 2005. 378 p. DOI: 10.1007/b137351.
34. Kaplan G, Moll B, Violante GL. Monetary policy according to HANK. *American Economic Review*. 2018;108(3):697–743. DOI: 10.1257/aer.20160042.
35. Auclert A, Bardóczy B, Rognlie M, Straub L. Using the sequence-space Jacobian to solve and estimate heterogeneous-agent models. *Econometrica*. 2021;89(5):2375–2408. DOI: 10.3982/ECTA17434.
36. Dawid H, Harting P, van der Hoog S, Neugart M. Macroeconomics with heterogeneous agent models: fostering transparency, reproducibility and replication. *Journal of Evolutionary Economics*. 2019;29:467–538. DOI: 10.1007/s00191-018-0594-0.
37. Engelbert HJ, Schmidt W. On solutions of one-dimensional stochastic differential equations without drift. *Wahrscheinlichkeitstheorie verw Gebiete*. 1985;68:287–314. DOI: 10.1007/BF00532642.
38. Girsanov IV. An example of non-uniqueness of the solution of the stochastic equation of K. Ito. *Theory Probab. Appl.* 1962;7(3):325–331. DOI: 10.1137/1107031.
39. Cherny AS. On the uniqueness in law and the pathwise uniqueness for stochastic differential equations. *Theory Probab. Appl.* 2002;46(3):406–419. DOI: 10.1137/S0040585X97979093.
40. Kolodziejczyk M, Ottobre M, Simpson G. Counting the number of stationary solutions of partial differential equations via infinite dimensional sampling. *Philos. Trans. A Math. Phys. Eng. Sci.* 2025;383(2298):20240239. DOI: 10.1098/rsta.2024.0239.
41. Frank TD. *Nonlinear Fokker-Planck Equations: Fundamentals and Applications*. Berlin: Springer; 2005. 408 p. DOI: 10.1007/b137680.
42. Malinetsky GG, Potapov AB. Modern problems of nonlinear dynamics. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2001;9(3):119–121 (in Russian).
43. Jain K, Firoozye N, Kochems J, Treleaven P. Limit order book simulations: A review. arXiv:2402.17359. arXiv Preprint; 2024. DOI: 10.48550/arXiv.2402.17359.
44. Liptser RSh, Shiryaev AN. *Theory of Martingales*. M.: Nauka; 1986. 512 p. (in Russian).
45. Bakhvalov NS, Zhidkov NP, Kobelkov GM. *Numerical Methods*. M.: Nauka; 1987. 598 p.
46. Gelfand IM, Kapranov MM, Zelevinsky AV. *Discriminants, Resultants, and Multidimensional Determinants*. Boston: Birkhäuser; 1994. 523 p. DOI: 10.1007/978-0-8176-4771-1.
47. Duffie D, Singleton KJ. Simulated moments estimation of Markov models of asset prices. NBER Technical Working Papers 0087. New York: National Bureau of Economic Research; 1990.
48. Martínez-Iriarte J, Sun Y, Wang X. Asymptotic F tests under possibly weak identification. *Journal of Econometrics*. 2020;218(1):140–177. DOI: 10.1016/j.jeconom.2019.10.011.



Бесчастнов Юрий Николаевич — родился в Москве (1998). Окончил магистратуру «Науки о данных» факультета компьютерных наук НИУ «Высшая школа экономики» (2022). С 2025 года работает в лаборатории анализа семантики НИУ «Высшая школа экономики» в должности младшего научного сотрудника. С 2023 года является аспирантом в Институте прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН. Научные интересы — численные методы бифуркационного анализа уравнений в частных производных, стохастический анализ, анализ временных рядов.

Россия, 125047 Москва, Миусская пл., 4
 Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН
 E-mail: y.beschastnov@mail.ru
 ORCID: 0000-0001-6511-5894
 AuthorID (eLibrary.Ru): 1338594